คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 3
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สมบัติกรุปเบื้องต้น อันดับของสมาชิก และผลคูณตรงของกรุป **สัปดาห์ที่** 3 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $n \in \mathbb{N}$ โดยที่ $n > 1$ จงแสดงว่า $\mathbb{Z}_n^\times$ มีสมบัติปิดภายใต้การคูณ

บทพิสูจน์. ให้ $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}_n^\times$ จะได้ว่า $\gcd(a,n) = 1$ และ $\gcd(b,n) = 1$ นั่นคือมีจำนวนเต็ม x, y, s และ t ซึ่ง

$$1 = ax + ny \quad \text{และ} \quad 1 = bs + nt$$

แล้ว

$$1 = 1 \cdot 1 = (ax+ny)(bs+nt) = ab(xs) + n(axt + ybs + nyt)$$

ดังนั้น $\gcd(ab, n) = 1$ โดยขั้นตอนวิธีการหารมีจำนวนเต็ม q, r ซึ่ง

$$ab = nq + r \qquad \text{เมื่อ} \quad 0 \le r < n$$

จะได้ว่า $\bar{a}\bar{b} = \overline{ab} = \bar{r} \in \mathbb{Z}_n^\times$ และ $1 = \gcd(ab,n) = \gcd(r,n)$ สรุปได้ว่า $\bar{a}\bar{b} \in \mathbb{Z}_n^\times$ □

2. ให้ G เป็นกรุป โดยที่ $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$(a_1a_2...a_n)^{-1} = a_n^{-1}....a_2^{-1}a_1^{-1} \qquad \text{(โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์)}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ $(a_1a_2...a_n)^{-1} = a_n^{-1}....a_2^{-1}a_1^{-1}$
เห็นได้ชัดว่า $a_1^{-1} = a_1^{-1}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $n \in \mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า $(a_1a_2...a_k)^{-1} = a_k^{-1}....a_2^{-1}a_1^{-1}$ แล้ว

$$a_{k+1}^{-1}a_k^{-1}...a_2^{-1}a_1^{-1} = a_{k+1}^{-1}(a_k^{-1}...a_2^{-1}a_1^{-1}) = a_{k+1}^{-1}(a_1a_2...a_k)^{-1}$$

พิจารณา

$$\begin{aligned}
(a_{k+1}^{-1}a_k^{-1}...a_2^{-1}a_1^{-1})(a_1a_2...a_ka_{k+1}) &= [a_{k+1}^{-1}(a_1a_2...a_k)^{-1}][(a_1a_2...a_k)a_{k+1}] \\
&= a_{k+1}^{-1}[(a_1a_2...a_k)^{-1}(a_1a_2...a_k)]a_{k+1} \\
&= a_{k+1}^{-1}ea_{k+1} \\
&= a_{k+1}^{-1}a_{k+1} \\
&= e \\
(a_1a_2...a_ka_{k+1})(a_{k+1}^{-1}a_k^{-1}...a_2^{-1}a_1^{-1}) &= [(a_1a_2...a_k)a_{k+1}][a_{k+1}^{-1}(a_1a_2...a_k)^{-1}] \\
&= (a_1a_2...a_k)^{-1}[a_{k+1}^{-1}a_k^{-1}](a_1a_2...a_k) \\
&= (a_1a_2...a_k)^{-1}e(a_1a_2...a_k) \\
&= (a_1a_2...a_k)^{-1}(a_1a_2...a_k) \\
&= e
\end{aligned}$$

ดังนั้น $a_k^{-1}....a_2^{-1}a_1^{-1}$ เป็นตัวผกผันของ $a_1a_2...a_ka_{k+1}$ นั่นคือ

$$(a_1a_2...a_{k+1})^{-1} = a_{k+1}^{-1}....a_2^{-1}a_1^{-1}$$

จะได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง □

3. จงหาอันดับของทุกสมาชิกใน $\mathbb{Z}_{11}^*$

วิธีทำ

สมาชิก	$\bar{1}$	$\bar{2}$	$\bar{3}$	$\bar{4}$	$\bar{5}$
	$(\bar{1})^1 = \bar{1}$	$(\bar{2})^1 = \bar{2}$ $(\bar{2})^2 = \bar{4}$ $(\bar{2})^3 = \bar{8}$ $(\bar{2})^4 = \bar{5}$ $(\bar{2})^5 = \overline{10}$ $(\bar{2})^6 = \bar{9}$ $(\bar{2})^7 = \bar{7}$ $(\bar{2})^8 = \bar{3}$ $(\bar{2})^9 = \bar{6}$ $(\bar{2})^{10} = \bar{1}$	$(\bar{3})^1 = \bar{3}$ $(\bar{3})^2 = \bar{9}$ $(\bar{3})^3 = \bar{5}$ $(\bar{3})^4 = \bar{4}$ $(\bar{3})^5 = \bar{1}$	$(\bar{4})^1 = \bar{4}$ $(\bar{4})^2 = \bar{5}$ $(\bar{4})^3 = \bar{9}$ $(\bar{4})^4 = \bar{3}$ $(\bar{4})^5 = \bar{1}$	$(\bar{5})^1 = \bar{5}$ $(\bar{5})^2 = \bar{3}$ $(\bar{5})^3 = \bar{4}$ $(\bar{5})^4 = \bar{9}$ $(\bar{5})^5 = \bar{1}$
อันดับ	1	10	5	5	5

สมาชิก	$\bar{6}$	$\bar{7}$	$\bar{8}$	$\bar{9}$	$\overline{10}$
	$(\bar{6})^1 = \bar{6}$ $(\bar{6})^2 = \bar{3}$ $(\bar{6})^3 = \bar{7}$ $(\bar{6})^4 = \bar{9}$ $(\bar{6})^5 = \overline{10}$ $(\bar{6})^6 = \bar{5}$ $(\bar{6})^7 = \bar{8}$ $(\bar{6})^8 = \bar{4}$ $(\bar{6})^9 = \bar{2}$ $(\bar{6})^{10} = \bar{1}$	$(\bar{7})^1 = \bar{7}$ $(\bar{7})^2 = \bar{5}$ $(\bar{7})^3 = \bar{2}$ $(\bar{7})^4 = \bar{3}$ $(\bar{7})^5 = \overline{10}$ $(\bar{7})^6 = \bar{4}$ $(\bar{7})^7 = \bar{6}$ $(\bar{7})^8 = \bar{9}$ $(\bar{7})^9 = \bar{8}$ $(\bar{7})^{10} = \bar{1}$	$(\bar{8})^1 = \bar{8}$ $(\bar{8})^2 = \bar{9}$ $(\bar{8})^3 = \bar{6}$ $(\bar{8})^4 = \bar{4}$ $(\bar{8})^5 = \overline{10}$ $(\bar{8})^6 = \bar{3}$ $(\bar{8})^7 = \bar{2}$ $(\bar{8})^8 = \bar{5}$ $(\bar{8})^9 = \bar{7}$ $(\bar{8})^{10} = \bar{1}$	$(\bar{9})^1 = \bar{9}$ $(\bar{9})^2 = \bar{4}$ $(\bar{9})^3 = \bar{3}$ $(\bar{9})^4 = \bar{5}$ $(\bar{9})^5 = \bar{1}$	$(\overline{10})^1 = \overline{10}$ $(\overline{10})^2 = \bar{1}$
อันดับ	10	10	10	5	2

4. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$

   4.1 มีจำนวนจริง a, b ที่ทำให้ A มีอันดับเท่ากับ 2 หรือไม่เพราะเหตุใด

   วิธีทำ

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = A^2 = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{bmatrix}$$

   จะได้ว่า $a^2 = 1,\ a^2 + ab = 0$ และ $b^2 = 1$ สรุปได้ว่า $a = 1, b = -1$ หรือ $a = -1, b = 1$

   4.2 มีจำนวนจริง a, b ที่ทำให้ A มีอันดับเท่ากับ 3 หรือไม่เพราะเหตุใด

   วิธีทำ สมมติว่ามีจำนวนจริง a, b ที่ทำให้ A มีอันดับเท่ากับ 3 นั่นคือ $A^3 = I$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I = A^3 = AA^2 = \begin{bmatrix} a & a \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & a^2 + ab \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & a^3 + a^2b + ab^2 \\ 0 & b^3 \end{bmatrix}$$

   จะได้ว่า $a^3 = 1,\ b^3 = 1$ นั่นคือ $a = b = 1$ จะเห็นว่า $3 = 1^3 + 1^2(1) + 1(1^2) = a^3 + a^2b + ab^2 = 0$ เกิดข้อขัดแย้ง ดังนั้นไม่มี a, b ที่ทำให้ A มีอันดับเท่ากับ 3

5. จงตรวจสอบว่าอันดับของสมาชิกต่อไปนี้ ใน $\mathbb{C}^*$ เท่ากันหรือไม่เพราะเหตุใด

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \qquad z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \quad \text{และ} \quad z_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

วิธีทำ เนื่องจาก z_1, z_2, z_3, z_4 คือจำนวนเชิงซ้อนหนึ่งหน่วยในคอร์ดรันที่ 1, 2, 3 และ 4 ตามลำดับ ดังนั้น

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \\
z_2 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} \\
z_3 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6} \\
z_4 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = \cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}
\end{aligned}$$

จะได้ว่า 12 เป็นจำนวนเต็มบวกน้อยสุดที่ทำให้

$$\begin{aligned}
z_1^{12} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12} = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^{12} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1 \\
z_2^{12} &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{12} = \left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right)^{12} = \cos 10\pi + i\sin 10\pi = 1 \\
z_3^{12} &= \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12} = \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)^{12} = \cos 14\pi + i\sin 14\pi = 1 \\
z_4^{12} &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^{12} = \left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)^{12} = \cos 22\pi + i\sin 22\pi = 1
\end{aligned}$$

ดังนั้น $\circ(z_1) = \circ(z_2) = \circ(z_3) = \circ(z_4) = 12$

6. ให้ $G = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ และนิยามการดำเนินการทวิภาคบน G ดังนี้

$$(a,b) * (c,d) = (a+c+2, 2bd)$$

จงตรวจสอบว่า $(G,*)$ เป็นกรุปหรือไม่

บทพิสูจน์ . ให้ $(a,b),(c,d),(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a,b) * [(c,d) * (x,y)] &= (a,b) * (c+x+2, 2dy) \\
&= (a + (c+x+2) + 2, 2b(2dy)) \\
&= ((a+c+2) + x + 2, 2(2bd)y) \\
&= (a+c+2, 2bd) * (x,y) \\
&= [(a,b) * (c,d)] * (x,y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก

$$(a,b) * \left(-2, \frac{1}{2}\right) = \left(a+2-2, 2b\cdot\frac{1}{2}\right) = (a,b) = \left(2+a-2, 2\cdot\frac{1}{2}\cdot b\right) = \left(-2, \frac{1}{2}\right) * (a,b)$$

นั่นคือ $\left(-2, \frac{1}{2}\right)$ เป็นเอกลักษณ์ สำหรับ $(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^*$ นั่นคือ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$(a,b) * \left(-4-a, \frac{1}{4b}\right) = \left((-4-a)+a+2, 2b \cdot \frac{1}{4b}\right) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$
$$\left(-4-a, \frac{1}{4b}\right) * (a,b) = \left(a+(-4-a)+2, 2 \cdot \frac{1}{4b} \cdot b\right) = \left(-2, \frac{1}{2}\right)$$

ดังนั้น $\left(-4-a, \dfrac{1}{4b}\right)$ เป็นตัวผกผันของ (a,b) สรุปได้ว่า $(G,*)$ เป็นกรุป □

7. ให้ $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ และนิยามการดำเนินการทวิภาคบน G ดังนี้

$$(a,b) * (c,d) = (ac, bc+d)$$

จงแสดงว่า $(G,*)$ เป็นกรุป

***บทพิสูจน์*.** ให้ $(a,b),(c,d),(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
(a,b) * [(c,d) * (x,y)] &= (a,b) * (cx, dx+y) \\
&= (acx, bcx+dx+y) \\
&= (acx, (bc+d)x+y) \\
&= (ac, bc+d) * (x,y) \\
&= [(a,b) * (c,d)] * (x,y)
\end{aligned}$$

ดังนั้น $*$ มีสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม เนื่องจาก

$$(a,b) * (1,0) = (a1, b1+0) = (a,b) = (1a, 0a+b) = (1,0) * (a,b)$$

นั่นคือ $(1,0)$ เป็นเอกลักษณ์ สำหรับ $(a,b) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ นั่นคือ $a \neq 0$ จะได้ว่า

$$(a,b) * \left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) = \left(a \cdot \frac{1}{a}, b \cdot \frac{1}{a} - \frac{b}{a}\right) = (1,0)$$
$$\left(\frac{1}{a}, -\frac{b}{a}\right) * (a,b) = \left(\frac{1}{a} \cdot a, -\frac{b}{a} \cdot a + b\right) = (1,0)$$

ดังนั้น $\left(\dfrac{1}{a}, -\dfrac{b}{a}\right)$ เป็นตัวผกผันของ (a,b) สรุปได้ว่า $(G,*)$ เป็นกรุป □

8. จงหาอันดับของ $(\bar{5},\bar{6})$ และ $(\overline{17},\overline{17})$ ใน $\mathbb{Z}_{19}^{*}\times\mathbb{Z}_{20}^{\times}$

วิธีทำ หาอันดับของ $\bar{5}$ ใน $\mathbb{Z}_{19}^{*}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lllllll}
(\bar{5})^1 & & & & & = & \bar{5} \\
(\bar{5})^2 & & & = & \overline{25} & = & \bar{6} \\
(\bar{5})^3 & = & (\bar{5})(\bar{5})^2 & = & \overline{30} & = & \overline{11} \\
(\bar{5})^4 & = & (\bar{5})(\bar{5})^3 & = & \overline{55} & = & \overline{-2} \\
(\bar{5})^5 & = & (\bar{5})(\bar{5})^4 & = & \overline{-10} & = & \bar{9} \\
(\bar{5})^6 & = & (\bar{5})(\bar{5})^5 & = & \overline{45} & = & \bar{7} \\
(\bar{5})^7 & = & (\bar{5})(\bar{5})^6 & = & \overline{35} & = & \overline{-3} \\
(\bar{5})^8 & = & (\bar{5})(\bar{5})^7 & = & \overline{-15} & = & \bar{4} \\
(\bar{5})^9 & = & (\bar{5})(\bar{5})^8 & = & \overline{20} & = & \bar{1}
\end{array}$$

หาอันดับของ $\overline{11}$ ใน $\mathbb{Z}_{20}^{\times}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lllll}
(\overline{11})^1 & & & = & \bar{6} \\
(\overline{11})^2 & = & \overline{121} & = & \bar{1}
\end{array}$$

ดังนั้น $\circ(\bar{5})=9$ และ $\circ(\overline{11})=1$ จะได้ว่า

$$\circ((\bar{5},\overline{11}))=\ell\mathsf{cm}(9,2)=18$$

เนื่องจาก $\overline{17}=\overline{-2}$ ใน $\mathbb{Z}_{19}^{*}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lllllll}
(\overline{-2})^1 & & & & & = & \overline{-2} \\
(\overline{-2})^2 & & & & & = & \bar{4} \\
(\overline{-2})^3 & & & & & = & \overline{-8} \\
(\overline{-2})^4 & = & (\overline{-2})(\overline{-2})^3 & = & \overline{16} & = & \overline{-3} \\
(\overline{-2})^5 & = & (\overline{-2})(\overline{-2})^4 & = & \bar{6} & = & \bar{6} \\
(\overline{-2})^6 & = & (\overline{-2})(\overline{-2})^5 & = & \overline{-12} & = & \bar{7} \\
(\overline{-2})^7 & = & (\overline{-2})(\overline{-2})^6 & = & \overline{-14} & = & \bar{5} \\
(\overline{-2})^8 & = & (\overline{-2})(\overline{-2})^7 & = & \overline{-10} & = & \bar{9} \\
(\overline{-2})^9 & = & (\overline{-2})(\overline{-2})^8 & = & \overline{-18} & = & \bar{1}
\end{array}$$

เนื่องจาก $\overline{17}=\overline{-3}$ ใน $\mathbb{Z}_{20}^{\times}$ พิจารณา

$$\begin{array}{lllllll}
(\overline{-3})^1 & & & & & = & \overline{-3} \\
(\overline{-3})^2 & & & & & = & \bar{9} \\
(\overline{-3})^3 & = & (\overline{-3})(\overline{-3})^2 & = & \overline{-27} & = & \overline{-7} \\
(\overline{-3})^4 & = & (\overline{-3})(\overline{-3})^3 & = & \overline{21} & = & \bar{1}
\end{array}$$

ดังนั้น $\circ(\overline{17})=9$ ใน $\mathbb{Z}_{19}^{*}$ และ $\circ(\overline{17})=4$ ใน $\mathbb{Z}_{20}^{\times}$ จะได้ว่า

$$\circ((\overline{17},\overline{17}))=\ell\mathsf{cm}(9,4)=36$$