คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 4
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยน และกรุปย่อย **สัปดาห์ที่** 4 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ $\alpha = (1\ 3\ 7\ 2)(2\ 3\ 5\ 4)$ และ $\beta = (1\ 6\ 3)(1\ 3\ 5\ 7)$ เป็นสมาชิกใน S_8 จงหา $(\alpha\beta)^{2021}$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= (1\ 3\ 7\ 2)(2\ 3\ 5\ 4)(1\ 6\ 3)(1\ 3\ 5\ 7)\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\3&7&4&1&2&5&6&8\end{pmatrix}\\ &= (1\ 3\ 4)(2\ 7\ 6\ 5)\end{aligned}$$

   ดังนั้น

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)^{2021} &= [(1\ 3\ 4)(2\ 7\ 6\ 5)]^{2021}\\ &= (1\ 3\ 4)^{2021}(2\ 7\ 6\ 5)^{2021}\\ &= [(1\ 3\ 4)^{3(673)+2}(2\ 7\ 6\ 5)^{4(505)+1}\\ &= [(1\ 3\ 4)^3]^{673}(1\ 3\ 4)^2[(2\ 7\ 6\ 5)^4]^{505}(2\ 7\ 6\ 5)^1\\ &= (1)^{673}(1\ 3\ 4)(1\ 3\ 4)(1)^{505}(2\ 7\ 6\ 5)\\ &= (1\ 3\ 4)(1\ 3\ 4)(2\ 7\ 6\ 5)\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&7&1&3&2&5&6&8\end{pmatrix}\\ &= (1\ 4\ 3)(2\ 7\ 6\ 5) \quad \#\end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $\alpha = (1\ 3\ 4\ 7\ 2\ 8)$ และ β เป็นสมาชิกใน S_{20}

   2.1 จงหาอันดับ (order) ของ $\alpha(2\ 4\ 5\ 9\ 8)$

   วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}\alpha(2\ 4\ 5\ 9\ 8) &= (1\ 3\ 4\ 7\ 2\ 8)(2\ 4\ 5\ 9\ 8)\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8&9&10...20\\3&7&4&5&9&6&2&8&1&10...20\end{pmatrix}\\ &= (1\ 3\ 4\ 5\ 9)(2\ 7)\end{aligned}$$

   ดังนั้น

$$\circ(\alpha(2\ 4\ 5\ 9\ 8)) = \circ((1\ 3\ 4\ 5\ 9)(2\ 7)) = \ell\text{cm}(5,2) = 10$$

2.2 ถ้า α และ β เป็นวัฏจักรต่างสมาชิกกันซึ่ง $\circ(\alpha\beta) = 12$
จงหาอันดับที่เป็นไปได้ทั้งหมดของ β
วิธีทำ เนื่องจาก $\alpha = (1\ 3\ 4\ 7\ 2\ 8)$ มีค่ายาวเท่ากับ 6 ดังนั้นมีสมาชิกในวัฏจักร 6 ตัว และ $\circ(\alpha) = 6$
จะเห็นว่าα และ β เป็นวัฏจักรต่างสมาชิกกัน นั่นคือ β มีจำนวนสามาชิกในวัฏจักรได้ไม่เกิน $20 - 6 = 14$ ตัว และ

$$12 = \circ(\alpha\beta) = \ell\text{cm}(\circ(\alpha), \circ(\beta)) = \ell\text{cm}(6, \circ(\beta))$$

ดังนั้น $\circ(\beta)$ ที่เป็นไปได้ทั้งหมดคือ 4 และ 12 $\#$

3. ใน S_7 ถ้า $(1\ a\ 4\ 5)^{999} = (5\ 4\ a\ 1)$ จงหา a ที่เป็นไปได้ทั้งหมด

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(1\ a\ 4\ 5)^{999} &= [(1\ a\ 4\ 5)]^{4(250)-1} \\
&= [(1\ a\ 4\ 5)^4]^{250}(1\ a\ 4\ 5)^{-1} \\
&= (1)^{249}(1\ a\ 4\ 5)^{-1} \\
&= (1\ a\ 4\ 5)^{-1} \\
&= (5\ 4\ a\ 1)
\end{aligned}$$

นั่นคือ เป็นสมาชิกใดก็ได้ที่ไม่ซ้ำกับ 1,4 และ 5 ดังนั้น $a = 2, 3, 6$ หรือ 7

4. ให้ H เป็นเซตย่อยของกรุป G โดยที่ $H \neq \varnothing$ จงพิสูจน์ว่า

$$H \leq G \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad ab^{-1} \in H \text{ สำหรับทุก } a, b \in H$$

บทพิสูจน์ . สมมติว่า $H \leq G$ ให้ $a, b \in H$ จะได้ว่า $b^{-1} \in H$ ดังนั้น $ab^{-1} \in H$
ในทางกลับกันสมมติว่า ให้ $a \in H$ โดยสมมติฐานจะได้ว่า $e = aa^{-1} \in H$
จากที่ $e \in H$ โดยสมมติฐานอีกครั้งจะได้ว่า $a^{-1} = ea^{-1} \in H$
สุดท้ายพิสูจน์ว่ามี H สมบัติปิด ให้ $a, b \in H$ จะได้ว่า $b^{-1} \in H$ เนื่องจาก $b = (b^{-1})^{-1}$ ดังนั้นโดยสมมติฐานจะได้

$$ab = a(b^{-1})^{-1} \in H$$

สรุปได้ว่า $H \leq G$ □

5. จงตรวจสอบ $H \subseteq \mathbb{R}^*$ ต่อไปนี้ ว่าเป็นกรุปย่อยของ $\mathbb{R}^*$

5.1 $H = \{2^m : m \in \mathbb{Z}\}$
วิธีทำ เนื่องจาก $1 = 2^0 \in H$ ดังนั้น 1 เป็นเอกลักษณ์การคูณใน H
ให้ 2^m และ 2^n เป็นสมาชิกใน H เมื่อ $m, n \in \mathbb{Z}$ แล้ว $n - m \in \mathbb{Z}$ และ

$$2^n(2^m)^{-1} = 2^n(2^{-m}) = 2^{n-m} \in H$$

ดังนั้น $H \leq \mathbb{R}^*$

5.2 $H = \{m^2 : m \in \mathbb{Z}^*\}$
วิธีทำ จะเห็นว่า $2^2 \in H$ สมมติว่ามี $m \in \mathbb{Z}^*$ ที่ทำให้ $2^2(m^2) = 1$ นั่นคือ

$$2(2m^2) = (2m)^2 = 1$$

เนื่องจาก $2m^2 \in \mathbb{Z}^*$ จะได้ว่า $2 \mid 1$ เกิดข้อขัดแย้ง สรุปได้ว่า 2^2 ไม่มีตัวผกผันใน H ฉะนั้น Hไม่เป็นกรุปย่อยของ $\mathbb{R}^*$

6. จงตรวจสอบว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} : a \neq 0 \text{ และ } c \neq 0 \right\}$$

วิธีทำ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a \neq 0$, $c \neq 0$, $x \neq 0$ และ $z \neq 0$ จะได้ว่า $xz \neq 0$, $ax \neq 0$ และ $cz \neq 0$ แล้ว

$$B^{-1} = \frac{1}{xz} \begin{bmatrix} z & 0 \\ -y & x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ -\frac{y}{xz} & \frac{1}{z} \end{bmatrix} \in H$$

และ

$$AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 \\ bx + cy & cz \end{bmatrix} \in H$$

ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

7. จงตรวจสอบว่า H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} : ab > 0 \right\}$$

วิธีทำ ถ้า $a = b = 1$ แล้ว $ab = 1 > 0$ ดังนั้น $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H

ให้ $A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $ab > 0$ และ $xy > 0$ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax & 0 \\ 0 & by \end{bmatrix}$$

จะได้ว่า $(ax)(by) = (ab)(xy) > 0$ ดังนั้น $AB \in H$

เนื่องจาก $ab > 0$ ดังนั้น $\dfrac{1}{ab} > 0$ และ $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{bmatrix} \in H$ ดังนั้น $H \leq GL_2(\mathbb{R})$

8. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน $GL_2(\mathbb{R})$ จงเขียน $\langle A \rangle$ ในรูปแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \\ A^3 &= A^2 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \\ &\vdots \\ A^n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ดังนั้น $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ I เป็นเมติกซ์เอกลักษณ์
จะเห็นว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-n} = (A^n)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
และ $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ สรุปได้ว่า

$$\langle A \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -n & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$