คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 6
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ แลซทิซ โคเซต และทฤษฎีบทลากรานจ์ **สัปดาห์ที่** 6 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

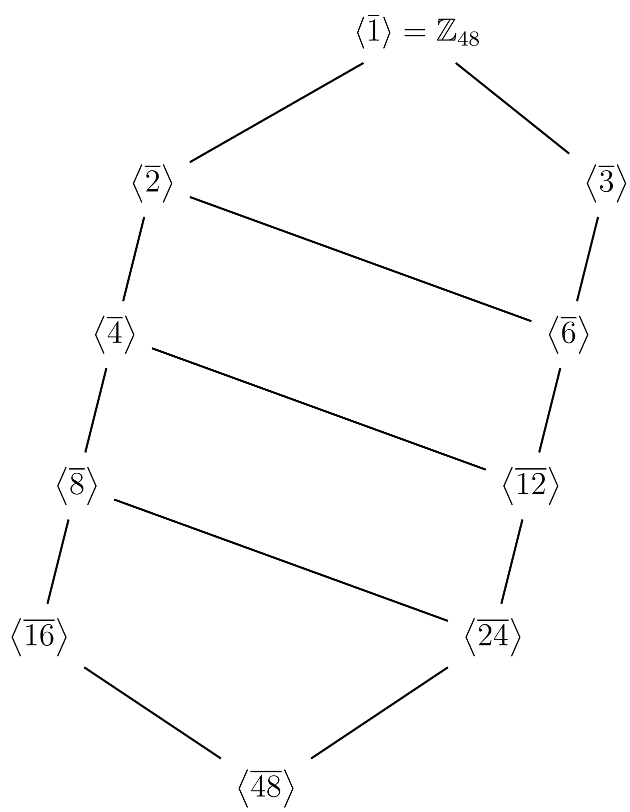
---

1. จงเขียนแลตทิซของ $\mathbb{Z}_{48}$ และ $\mathbb{Z}_{27}^{\times}$

วิธีทำ เนื่องจาก $|\mathbb{Z}_{48}| = 48$ และ ตัวหารของ 48 คือ $1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48$ กรุปย่อยทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{48}$ คือ

$$\begin{aligned}
\langle \tfrac{48}{48}\bar{1}\rangle &= \langle \bar{1}\rangle = \mathbb{Z}_{48} & \langle \tfrac{48}{6}\bar{1}\rangle &= \langle \bar{8}\rangle = \{\bar{0}, \bar{8}, \overline{16}, \overline{24}, \overline{32}\} \\
\langle \tfrac{48}{24}\bar{1}\rangle &= \langle \bar{2}\rangle = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, ..., \overline{46}\} & \langle \tfrac{48}{4}\bar{1}\rangle &= \langle \overline{12}\rangle = \{\bar{0}, \overline{12}, \overline{24}, \overline{36}\} \\
\langle \tfrac{48}{16}\bar{1}\rangle &= \langle \bar{3}\rangle = \{\bar{0}, \bar{3}, \bar{6}, ..., \overline{45}\} & \langle \tfrac{48}{3}\bar{1}\rangle &= \langle \overline{16}\rangle = \{\bar{0}, \overline{16}, \overline{32}\} \\
\langle \tfrac{48}{12}\bar{1}\rangle &= \langle \bar{4}\rangle = \{\bar{0}, \bar{4}, \bar{8}, ..., \overline{44}\} & \langle \tfrac{48}{2}\bar{1}\rangle &= \langle \overline{24}\rangle = \{\bar{0}, \overline{24}\} \\
\langle \tfrac{48}{8}\bar{1}\rangle &= \langle \bar{6}\rangle = \{\bar{0}, \bar{6}, \overline{12}, \overline{18}, \overline{24}, \overline{30}, \overline{36}\} & \langle \tfrac{48}{1}\bar{1}\rangle &= \langle \overline{48}\rangle = \{\bar{0}\}
\end{aligned}$$

เขียนแลตทิซได้ดังนี้



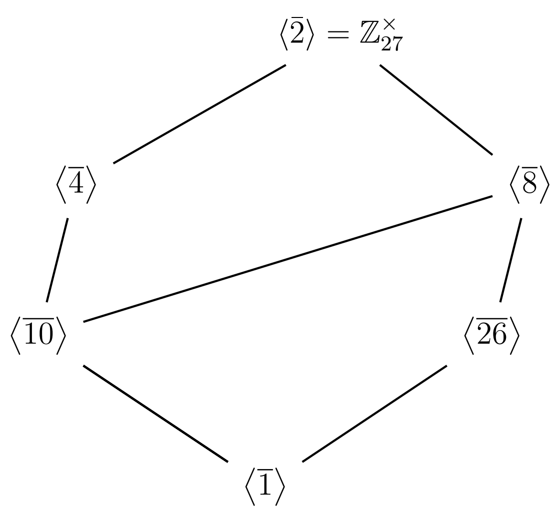
$|\mathbb{Z}_{27}^{\times}| = \phi(27) = \phi(3^3) = 3^3 - 3^2 = 18$ จะเห็นว่า

$$
\begin{array}{l|l|l}
(\bar{2})^1 = \bar{2} & (\bar{2})^7 = \overline{20} & (\bar{2})^{13} = \overline{-16} = \overline{11} \\
(\bar{2})^2 = \bar{4} & (\bar{2})^8 = \overline{40} = \overline{13} & (\bar{2})^{14} = \overline{22} \\
(\bar{2})^3 = \bar{8} & (\bar{2})^9 = \overline{26} = \overline{-1} & (\bar{2})^{15} = \overline{44} = \overline{17} \\
(\bar{2})^4 = \overline{16} & (\bar{2})^{10} = \overline{-2} = \overline{25} & (\bar{2})^{16} = \overline{34} = \bar{7} \\
(\bar{2})^5 = \overline{32} = \bar{5} & (\bar{2})^{11} = \overline{-4} = \overline{23} & (\bar{2})^{17} = \overline{14} \\
(\bar{2})^6 = \overline{10} & (\bar{2})^{12} = \overline{-8} = \overline{17} & (\bar{2})^{18} = \overline{28} = \bar{1}
\end{array}
$$

ดังนั้น $\langle \bar{2} \rangle = \mathbb{Z}_{27}^{\times}$ ตัวหารของ 18 คือ 1, 2, 3, 6, 9, 18 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_{27}^{\times}$ คือ

$$
\begin{array}{ccccc}
\left\langle (\bar{2})^{\frac{18}{1}} \right\rangle & = & \langle \bar{1} \rangle & = & \{\bar{1}\} \\
\left\langle (\bar{2})^{\frac{18}{2}} \right\rangle & = & \langle \overline{26} \rangle & = & \{\bar{1}, \overline{26}\} \\
\left\langle (\bar{2})^{\frac{18}{3}} \right\rangle & = & \langle \overline{10} \rangle & = & \{\bar{1}, \overline{10}, \overline{19}\} \\
\left\langle (\bar{2})^{\frac{18}{6}} \right\rangle & = & \langle \bar{8} \rangle & = & \{\bar{1}, \bar{8}, \overline{10}, \overline{26}, \overline{19}, \overline{17}\} \\
\left\langle (\bar{2})^{\frac{18}{9}} \right\rangle & = & \langle \bar{4} \rangle & = & \{\bar{1}, \bar{4}, \overline{16}, \overline{10}, \overline{13}, \overline{25}, \overline{19}, \overline{22}, \bar{7}\} \\
\left\langle (\bar{2})^{\frac{18}{18}} \right\rangle & = & \langle \bar{2} \rangle & = & \mathbb{Z}_{27}^{\times}
\end{array}
$$

เขียนแลตทิซได้ดังนี้



2. จงเขียนแลตทิซของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$

วิธีทำ จะเห็นได้ว่า $(\bar{1}, \bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ และ $|\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9| = 4 \times 9 = 36$
ตัวหารของ 36 คือ 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36 ดังนั้นกรุปย่อยของ $\mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$ คือ

$$\left\langle \frac{36}{1}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle(\bar{0}, \bar{0})\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{36}{2}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{2}, \bar{0})\right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{36}{3}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{0}, \bar{3})\right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6})\}$$

$$\left\langle \frac{36}{4}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{1}, \bar{0})\right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{0})\}$$

$$\left\langle \frac{36}{6}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{2}, \bar{6})\right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{3})\}$$

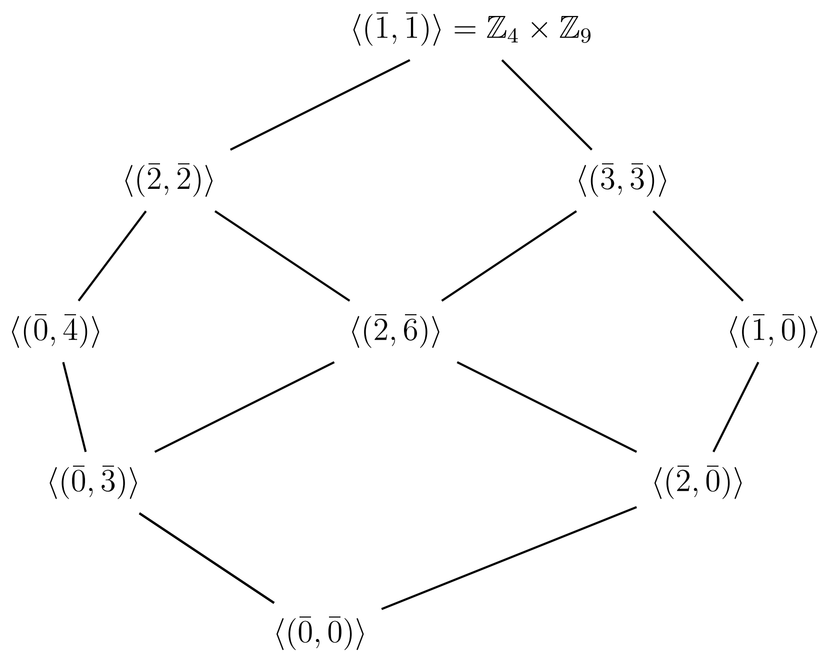
$$\left\langle \frac{36}{9}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{0}, \bar{4})\right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{0}, \bar{8})\}$$

$$\left\langle \frac{36}{12}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{3}, \bar{3})\right\rangle = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{3}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{3}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{6}), (\bar{3}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{1}, \bar{6})\}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{36}{18}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \left\langle(\bar{2}, \bar{2})\right\rangle = \{&(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{2}, \bar{2}), (\bar{0}, \bar{4}), (\bar{2}, \bar{6}), (\bar{0}, \bar{8}), (\bar{2}, \bar{1}), (\bar{0}, \bar{3}), (\bar{2}, \bar{5}), (\bar{0}, \bar{7}), (\bar{2}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{2}), (\bar{2}, \bar{4})\\ &(\bar{0}, \bar{6}), (\bar{2}, \bar{8}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{2}, \bar{3}), (\bar{0}, \bar{5}), (\bar{2}, \bar{7})\}\end{aligned}$$

$$\left\langle \frac{36}{36}(\bar{1}, \bar{1}) \right\rangle = \langle(\bar{1}, \bar{1})\rangle = \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_9$$

เขียนแลตทิซได้ดังนี้



3. ให้ H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$ จงแสดงว่า

$$ab^{-1} \in H \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad Ha = Hb$$

***บทพิสูจน์*.** H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$
($\rightarrow$) สมมติว่า $ab^{-1} \in H$
ให้ $x \in Ha$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $x = ha$ จะได้ว่า $xb^{-1} = h(ab^{-1}) \in H$ ดังนั้น $(xb^{-1})^{-1} \in H$ นั่นคือ

$$bx^{-1} \in H$$

มี $h_1 \in H$ ซึ่ง $bx^{-1} = h_1$ นั่นคือ $x = (b^{-1}h_1)^{-1} = h_1^{-1}b \in Hb$ ดังน้น $Ha \subseteq Hb$
ในกรณี $Hb \subseteq Ha$ ในทำนองเดียวกันกับการพิสูจน์ $Ha \subseteq Hb$
($\leftarrow$) สมมติว่า $Ha = Hb$
เนื่องจาก $e \in H$ และ $a = ea \in Ha$ ดังนั้น $a \in Hb$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $a = hb$ แล้ว

$$ab^{-1} = h \in H$$

$\square$

4. ให้ H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$ จงแสดงว่า

$$Ha = Hb \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a \in Hb$$

***บทพิสูจน์*.** H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$
($\rightarrow$) สมมติว่า $Ha = Hb$
เนื่องจาก $e \in H$ และ $a = ea \in Ha$ ดังนั้น $a \in Hb$
($\leftarrow$) สมมติว่า $a \in Hb$ จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $a = hb$ หรือ $b = h^{-1}a$
ให้ $x \in Ha$ จะได้ว่ามี $h_1 \in H$ ซึ่ง $x = h_1a$ แล้ว

$$x = h_1(hb) = (h_1h)b \in Hb$$

ดังนั้น $Ha \subseteq Hb$
ให้ $y \in Hb$ จะได้ว่ามี $h_2 \in H$ ซึ่ง $y = h_2b$ แล้ว

$$x = h_2(h^{-1}b) = (h_2h^{-1})b \in Hb$$

ดังนั้น $Hb \subseteq Ha$ $\square$

5. ให้ H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$ จงแสดงว่า

$$a \in Hb \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad ab^{-1} \in H$$

***บทพิสูจน์*.** H เป็นกรุปย่อยของ G และ $a, b \in G$
($\rightarrow$) สมมติว่า $a \in Hb$
จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $a = hb$ ดังนั้น

$$ab^{-1} = h \in H$$

($\leftarrow$) สมมติว่า $ab^{-1} \in H$
จะได้ว่ามี $h \in H$ ซึ่ง $ab^{-1} = h$ ดังนั้น

$$a = hb \in Hb$$

$\square$

6. ให้ $H = \langle A \rangle$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ โดยที่ $H \leq GL_2(\mathbb{R})$ จงเขียนโคเซต

$$H\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}H$$

ในรูปเซตแบบมีเงื่อนไข

วิธีทำ พิจารณา

$$\begin{aligned}
A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \\
A^2 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 2 & 1 \end{bmatrix} \\
A^3 &= A^2A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 3 & 1 \end{bmatrix} \\
A^4 &= A^2A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\cdot 4 & 1 \end{bmatrix} \\
&\vdots \\
A^n &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ I เป็นเมติกซ์เอกลักษณ์

จะเห็นว่า $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ แล้ว $A^{-n} = (A^n)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2n & 1 \end{bmatrix}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

และ $A^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$ ดังนั้น

$$H = \langle A \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$

ฉะนั้น

$$H\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2n+3 & 4n+4 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \#$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}H = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2n & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+4n & 2 \\ 3+8n & 4 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\} \qquad \#$$

7. ให้ H เป็นกรุปย่อยของกรุป G และ $a, b \in G$ จงพิสูจน์ว่า

มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึงจาก aH ไป Hb

บทพิสูจน์ . ให้ H เป็นกรุปย่อยของกรุป G และ $a, b \in G$ กำหนดให้

$$f : Ha \to bH \quad \text{นิยามโดย} \quad f(ha) = bh \qquad \text{เมื่อ } h \in H$$

ขั้นตอนแรกพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชัน ให้ $h_1 a = h_2 a$ โดยสมบัติการตัดออกจะได้ $h_1 = h_2$ ทำให้ได้

$$f(h_1 a) = bh_1 = bh_2 = f(h_2 a)$$

ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน เห็นได้ชัดว่าโดเมนของ f เท่ากับ Ha จากนั้นจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1-1 สมมติว่า $f(h_1 a) = f(h_2 a)$ นั่นคือ

$$bh_1 = f(h_1 a) = f(h_2 a) = bh_2$$

โดยสมบัติการตัดออกจะได้ว่า $h_1 = h_2$ ฉะนั้น $h_1 a = h_2 a$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1-1
และจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ให้ $bh \in bH$ จะได้ว่า $ah \in aH$ ซึ่ง $f(ah) = bh$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง □

8. จงหาดรรชนีต่อไปนี้

(a) $[\mathbb{Z}_{100} : \langle \overline{20} \rangle]$
วิธีทำ จะได้ว่า $|\mathbb{Z}_{100}| = 100$ และ $\langle \overline{20} \rangle = \{\overline{0}, \overline{20}, \overline{40}, \overline{60}, \overline{80}\}$ แล้ว $|\langle \overline{20} \rangle| = 5$ ดังนั้น

$$[\mathbb{Z}_{100} : \langle \overline{20} \rangle] = \frac{100}{5} = 20 \quad \#$$

(b) $[\mathbb{Z}_{100}^{\times} : \langle \overline{7} \rangle]$
วิธีทำ จะได้ว่า $|\mathbb{Z}_{100}^{\times}| = \phi(100) = \phi(2^2 \cdot 5^2) = (2^2 - 2)(5^2 - 5) = 40$
และ $\langle \overline{7} \rangle = \{\overline{1}, \overline{7}, \overline{49}, \overline{43}\}$ แล้ว $|\langle \overline{7} \rangle| = 4$ ดังนั้น

$$[\mathbb{Z}_{100}^{\times} : \langle \overline{7} \rangle] = \frac{40}{4} = 10 \quad \#$$

(c) $[\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{25} : \langle (\bar{4}, \bar{5}) \rangle]$
วิธีทำ จะได้ว่า $|\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{25}| = 36 \cdot 25$ จะเห็นว่า $\circ(\bar{4}) = 9$ ใน $\mathbb{Z}_{36}$ และ $\circ(\bar{5}) = 5$ ใน $\mathbb{Z}_{25}$ แล้ว

$$|\langle (\bar{4}, \bar{5}) \rangle| = \circ((\bar{4}, \bar{5})) = \ell\text{cm}(9, 5) = 9 \cdot 5$$

ดังนั้น

$$[\mathbb{Z}_{36} \times \mathbb{Z}_{25} : \langle (\bar{4}, \bar{5}) \rangle] = \frac{36 \cdot 25}{9 \cdot 5} = 20 \quad \#$$