เฉลย Assignment 7
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ กรุปย่อยปกติ และกรุปผลหาร **สัปดาห์ที่** 7 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. ให้ N เป็นกรุปย่อยของ G จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า } (Ng)(Nh) = N(gh) \quad \text{ทุก ๆ } g,h \in G \qquad \text{แล้ว} \qquad N \trianglelefteq G$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ N เป็นกรุปย่อยของ G สมมติว่า $(Ng)(Nh) = N(gh)$ ทุก ๆ $g,h \in G$
ให้ $a \in G$
$(\subseteq)$ ให้ $x \in aNa^{-1}$ จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $x = ana^{-1}$ นั่นคือ

$$nx = n(ana^{-1}) = (na)(na^{-1}) \in (Na)N(a^{-1}) = N(aa^{-1}) = Ne = N$$

จะได้ว่ามี $m \in N$ ซึ่ง $nx = m$ ฉะนั้น $x = n^{-1}m \in N$ ดังนั้น $x \in N$
$(\supseteq)$ ให้ $x \in N$ จะได้ว่า $x^{-1} \in N$ พิจารณา

$$xa^{-1}xa = (Na^{-1})(Na) = N(a^{-1}a) = Ne = N$$

จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $xa^{-1}xa = n$ แล้ว

$$x = ax^{-1}na^{-1} = a(x^{-1}n)a^{-1}$$

เนื่องจาก $x^{-1}n \in N$ ดังนั้น $x \in aNa^{-1}$
ฉะนั้น $aNa^{-1} = N$ สรุปได้ว่า $N \trianglelefteq G$ $\square$

2. ให้ N เป็นกรุปย่อยของ G จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า } N \trianglelefteq G \qquad \text{แล้ว} \qquad (Ng)(Nh) = N(gh) \quad \text{ทุก ๆ } g,h \in G$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ N เป็นกรุปย่อยของ G
สมมติว่า $N \trianglelefteq G$ และ $g,h \in G$
$(\subseteq)$ ให้ $x \in (Ng)(Nh)$ จะได้ว่ามี $n,m \in N$ ซึ่ง $x = (ng)(mh)$ ฉะนั้น

$$x = (ng)(mh) = (ng)(mg^{-1}gh) = n(gmg^{-1})gh$$

เนื่องจาก $N \trianglelefteq G$ ดังนั้น $gmg^{-1} \in N$ ทำให้ได้ว่า $n(gmg^{-1}) \in N$
ดังนั้น $x \in N(gh)$
$(\supseteq)$ ให้ $x \in N(gh)$ จะได้ว่ามี $n \in N$ ซึ่ง $x = ngh = (ng)(eh)$ เนื่องจาก $e \in N$ ฉะนั้น

$$x \in (Ng)(Nh)$$

ดังนั้น $x \in (Ng)(Nh)$
สรุปได้ว่า $(Ng)(Nh) = N(gh)$ $\square$

3. ให้ N เป็นกรุปย่อยของ G จงแสดงว่า

$$N \trianglelefteq G \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad gNg^{-1} \subseteq N \quad \text{ทุก ๆ } g \in G$$

บทพิสูจน์ . ให้ N เป็นกรุปย่อยของ G
$(\longrightarrow)$ สมมติว่า $N \trianglelefteq G$ จากนิยาม $gNg^{-1} = N$ เห็นได้ชัด $gNg^{-1} \subseteq N$
$(\longleftarrow)$ สมมติ $gNg^{-1} \subseteq N$ ทุก ๆ $g \in G$
ให้ $a \in G$ และ $n \in N$ แล้ว $n^{-1} \in N$ โดยสมมติฐาน จะได้ว่า $an^{-1}a^{-1} \in aNa^{-1} \subseteq N$
จะได้ว่า $(an^{-1}a^{-1})^{-1} \in N$
แล้วมี $x \in N$ ซึ่ง $(an^{-1}a^{-1})^{-1} = x$ ฉะนั้น $ana^{-1} = x$ นั่นคือ

$$n = ana^{-1} \in aNa^{-1}$$

ดังนั้น $N \subseteq aNa^{-1}$ ฉะนั้น $N = aNa^{-1}$ สรุปได้ว่า $N \trianglelefteq G$ □

4. ให้ H และ K เป็นกรุปย่อยของ G จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad K \trianglelefteq G \quad \text{แล้ว} \quad K \trianglelefteq HK$$

บทพิสูจน์ . ให้ $H \leq G$, $K \leq G$ สมมติว่า $K \trianglelefteq G$
เนื่องจาก K เป็นกรุป และ $K \subseteq HK$ ดังนั้น $K \leq HK$
ให้ $g \in HK$ เนื่องจาก $HK \subseteq G$ จะได้ว่า $g \in G$ จากสมมติฐาน $K \trianglelefteq G$ ทำให้ได้ว่า

$$gKg^{-1} = K$$

สรุปได้ว่า $K \trianglelefteq HK$ □

5. ให้ N และ M เป็นกรุปย่อยปกติของกรุป G จงแสดงว่า $N \cap M$ เป็นกรุปย่อยปกติของ G

บทพิสูจน์ . สมมติ N และ M เป็นกรุปย่อยปกติของกรุป G
ให้ $g \in G$ และ $x \in g(N \cap M)g^{-1}$ จะได้ว่ามี $y \in N \cap M$ ซึ่ง $x = gyg^{-1}$
เนื่องจาก $y \in N \cap M \subseteq N$ และ $N \trianglelefteq G$ ดังนั้น $x = gyg^{-1} \in gNg^{-1} \subseteq N$
นื่องจาก $y \in N \cap M \subseteq M$ และ $M \trianglelefteq G$ ดังนั้น $x = gyg^{-1} \in gMg^{-1} \subseteq M$
นั่นคือ $x \in N \cap M$ สรุปได้ว่า $N \cap M \trianglelefteq G$ □

6. ให้ $H = \langle A \rangle$ และ $K = \langle B \rangle$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
จงหา KH และ HK ใน $GL_2(\mathbb{R})$
วิธีทำ จะได้ว่า

$$H = \langle A \rangle = \{A^n : n \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n : n \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n \in \mathbb{Z} \right\}$$
$$K = \langle B \rangle = \{B^m : m \in \mathbb{Z}\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^m : m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} : m \in \mathbb{Z} \right\}$$

ดังนั้น

$$HK = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} : n, m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+nm & n \\ m & 1 \end{bmatrix} : n, m \in \mathbb{Z} \right\} \quad \#$$
$$KH = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : n, m \in \mathbb{Z} \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & n \\ m & 1+mn \end{bmatrix} : n, m \in \mathbb{Z} \right\} \quad \#$$

7. จงแจกแจงสมาชิกละหาตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_{27}^{\times}/\left\langle\overline{10}\right\rangle$

วิธีทำ พิจารณา

$$[\mathbb{Z}_{27}^{\times}:\left\langle\overline{10}\right\rangle]=\frac{\phi(27)}{\circ(\overline{10})}=\frac{18}{3}=6$$

และ $\left\langle\overline{10}\right\rangle=\{\bar{1},\overline{10},\overline{19}\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{2}&=\{\bar{2},\overline{20},\overline{11}\}\\
\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{4}&=\{\bar{4},\overline{13},\overline{22}\}\\
\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{5}&=\{\bar{5},\overline{23},\overline{14}\}\\
\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{7}&=\{\bar{7},\overline{16},\overline{25}\}\\
\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{8}&=\{\bar{8},\overline{26},\overline{17}\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathbb{Z}_{27}^{\times}/\left\langle\overline{10}\right\rangle=\{\left\langle\overline{10}\right\rangle,\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{2},\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{4},\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{5},\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{7},\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{8}\}$$

เนื่องจาก $\bar{2}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{27}^{\times}$ ดังนั้น $\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{2}$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_{27}^{\times}/\left\langle\overline{10}\right\rangle$ แล้ว $1\leq k<6$ ซึ่ง $\gcd(k,6)=1$ คือ $k=1,5$ ดังนั้นตัวก่อกำเนิดทั้งหมดคือ

$$\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{2}\text{ และ }(\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{2})^5=\left\langle\overline{10}\right\rangle(\bar{2})^5=\left\langle\overline{10}\right\rangle\bar{5}$$

8. จงแจกแจงสมาชิกละหาตัวก่อกำเนิด (generator) ทั้งหมดของ $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9/\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle$

วิธีทำ พิจารณา

$$[\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9:\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle]=\frac{4\cdot 9}{\circ((\bar{2},\bar{3}))}=\frac{36}{6}=6$$

และ $\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle=\{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{2},\bar{3}),(\bar{0},\bar{6}),(\bar{2},\bar{0}),(\bar{0},\bar{3}),(\bar{2},\bar{6})\}$ แล้ว

$$\begin{aligned}
\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{0})&=\{(\bar{1},\bar{0}),(\bar{3},\bar{3}),(\bar{1},\bar{6}),(\bar{3},\bar{0}),(\bar{1},\bar{3}),(\bar{3},\bar{6})\}\\
\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{0},\bar{1})&=\{(\bar{0},\bar{1}),(\bar{2},\bar{4}),(\bar{0},\bar{7}),(\bar{2},\bar{1}),(\bar{0},\bar{4}),(\bar{2},\bar{7})\}\\
\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{1})&=\{(\bar{1},\bar{1}),(\bar{3},\bar{4}),(\bar{1},\bar{7}),(\bar{3},\bar{1}),(\bar{1},\bar{4}),(\bar{3},\bar{7})\}\\
\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{2})&=\{(\bar{1},\bar{2}),(\bar{3},\bar{5}),(\bar{1},\bar{8}),(\bar{3},\bar{2}),(\bar{1},\bar{5}),(\bar{3},\bar{8})\}\\
\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{2},\bar{2})&=\{(\bar{2},\bar{2}),(\bar{0},\bar{5}),(\bar{2},\bar{8}),(\bar{0},\bar{2}),(\bar{2},\bar{5}),(\bar{0},\bar{8})\}
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9/\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle=\{\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle,\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{0}),\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{0},\bar{1}),\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{1}),\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{2}),\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{2},\bar{2})\}$$

เนื่องจาก $(\bar{1},\bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9$ ดังนั้น $\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{1})$ เป็นตัวก่อกำเนิดของ $\mathbb{Z}_4\times\mathbb{Z}_9/\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle$ แล้ว $1\leq k<6$ ซึ่ง $\gcd(k,6)=1$ คือ $k=1,5$ ดังนั้นตัวก่อกำเนิดทั้งหมดคือ

$$\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{1})\text{ และ }\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+5(\bar{1},\bar{1})=\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{5})=\langle(\bar{2},\bar{3})\rangle+(\bar{1},\bar{2})$$