



Assignment 8
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ สาทิสสัณฐาน และสมสัณฐาน สัปดาห์ที่ 9 คะแนนเต็ม 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. กำหนดให้ $\varphi : S_5 \rightarrow S_5$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (1\ 4\ 5)x(1\ 5\ 4)$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา $\text{Ker}(\varphi)$

2. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \rightarrow (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = \cos x - i \sin x$$

จงตรวจสอบว่า φ เป็นสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา $\text{Ker}(\varphi)$

3. ให้ G และ G' เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G \rightarrow G'$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน จงพิสูจน์ว่า

$$\text{Ran}(\varphi) \leq G'$$

4. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป ซึ่ง $\varphi : G_1 \rightarrow G_2$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน ถ้า $H \leq G_1$ และ

$$K = \{\varphi(h) : h \in H\}$$

จงพิสูจน์ว่า $K \leq G_2$

5. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป ซึ่ง $G_1 \cong G_2$ จงพิสูจน์ว่า

G_1 เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group) ก็ต่อเมื่อ G_2 เป็นกรุปอาบีเลียน

6. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป ซึ่ง $G_1 \cong G_2$ จงพิสูจน์ว่า

G_1 เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) ก็ต่อเมื่อ G_2 เป็นกรุปวัฏจักร

7. ให้ G_1, G'_1 และ G_2, G'_2 เป็นกรุป จงพิสูจน์ว่า

$$\text{ถ้า } G_1 \cong G'_1 \text{ และ } G_2 \cong G'_2 \text{ แล้ว } G_1 \times G_2 \cong G'_1 \times G'_2$$

8. จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ \mathbb{Z}_4 และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

9. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย $\varphi(x) = \overline{x^3}$ จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$

10. จงแสดงว่า $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ โดยใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่งสำหรับกรุป