คณิตศาสตร์

เฉลย Assignment 8

MAC3310 พีชคณิตนามธรรม MAC3310

หัวข้อ สาทิสสัณฐาน และสมสัณฐาน **สัปดาห์ที่** 9 **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน

ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. กำหนดให้ $\varphi : S_5 \to S_5$ นิยามโดย
$$\varphi(x) = (1\ 4\ 5)x(1\ 5\ 4)$$
จงตรวจสอบว่า φ เป็นสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in S_5$ แล้ว
$$\begin{aligned}
\varphi(xy) &= (1\ 4\ 5)xy(1\ 5\ 4) \\
&= (1\ 4\ 5)x(1)y(1\ 5\ 4) \\
&= (1\ 4\ 5)x(1\ 5\ 4)(1\ 4\ 5)y(1\ 5\ 4) && \text{เนื่องจาก } (1\ 5\ 4)(1\ 4\ 5) = (1) \\
&= \varphi(x)\varphi(y)
\end{aligned}$$
ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และเคอร์นัลคือ
$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \{x \in S_5 : \varphi(x) = (1)\} \\
&= \{x \in S_5 : (1\ 4\ 5)x(1\ 5\ 4) = (1)\} \\
&= \{x \in S_5 : x = (1\ 5\ 4)(1)(1\ 4\ 5)\} \\
&= \{x \in S_5 : x = (1)\} \\
&= \{(1)\}
\end{aligned}$$

2. กำหนดให้ $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{C}^*, \cdot)$ นิยามโดย
$$\varphi(x) = \cos x - i \sin x$$
จงตรวจสอบว่า φ เป็นสาทิสสัณฐาน (homomorphism) หรือไม่ และหา Ker(φ)

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\cos x - i\sin x = \cos(-x) + i\sin(-x) = e^{i(-x)} = e^{-ix}$ ดังนั้น
$$\varphi(x) = e^{-ix}$$
ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว
$$\varphi(x+y) = e^{-i(x+y)} = e^{-ix-iy} = e^{-ix}e^{-iy} = \varphi(x)\varphi(y)$$
ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน และเคอร์นัลคือ
$$\begin{aligned}
Ker(\varphi) &= \{x \in \mathbb{R} : \varphi(x) = 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \cos x - i\sin x = 1\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : \cos x = 1 \text{ และ } \sin x = 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : x = 2k\pi \text{ เมื่อ } k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \\
&= \langle 2\pi \rangle
\end{aligned}$$

3. ให้ G และ G' เป็นกรุป โดยที่ $\varphi : G \to G'$ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน จงพิสูจน์ว่า

$$\mathsf{Ran}(\varphi) \leq G'$$

บทพิสูจน์ . ให้ e เป็นเอกลักษณ์ของ G เนื่องจาก $\varphi(e) = e'$ ดังนั้น $e' \in \mathsf{Ran}(\varphi)$ ให้ $x, y \in \mathsf{Ran}(\varphi)$ นั่นคือมี $s, t \in G$ ซึ่ง $\varphi(s) = x$ และ $\varphi(t) = y$ เลือก $g = st^{-1} \in G$ แล้ว

$$\varphi(g) = \varphi(st^{-1}) = \varphi(s)\varphi(t^{-1}) = \varphi(s)(\varphi(t))^{-1} = xy^{-1}$$

ดังนั้น $xy^{-1} \in \mathsf{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ $\mathsf{Ran}(\varphi) \leq G'$

□

4. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป ซึ่ง $\varphi : G_1 \to G_2$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน ถ้า $H \leq G_1$ และ

$$K = \{\varphi(h) : h \in H\}$$

จงพิสูจน์ว่า $K \leq G_2$

บทพิสูจน์ . ให้ $a, b \in K$ จะได้ว่ามี $h_1, h_2 \in H$ ซึ่ง $\varphi(h_1) = a$ และ $\varphi(h_2) = b$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} ab^{-1} &= \varphi(h_1)(\varphi(h_2))^{-1} \\ &= \varphi(h_1)\varphi(h_2^{-1}) \\ &= \varphi(h_1 h_2^{-1}) \end{aligned}$$

เนื่องจาก $H \leq G_1$ ดังนั้น $h_1 h_2^{-1} \in H$ นั่นคือ $ab^{-1} \in K$
สรุปได้ว่า $K \leq G_2$

□

5. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป ซึ่ง $G_1 \cong G_2$ จงพิสูจน์ว่า

G_1 เป็นกรุปอาบีเลียน (abelian group) ก็ต่อเมื่อ G_2 เป็นกรุปอาบีเลียน

บทพิสูจน์ . สมมติว่า G เป็นกรุปอาบีเลียน ให้ $s, t \in G'$ จะได้ว่า $\varphi^{-1}(s), \varphi^{-1}(t) \in G$ แล้ว

$$\begin{aligned} st &= \varphi(\varphi^{-1}(s))\varphi(\varphi^{-1}(t)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(s)\varphi^{-1}(t)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(t)\varphi^{-1}(s)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(t))\varphi(\varphi^{-1}(s)) \\ &= ts \end{aligned}$$

ดังนั้น G' เป็นกรุปอาบีเลียน
ในทางกลับกันสมมติว่า G' เป็นกรุปอาบีเลียน ให้ $x, y \in G$ จะได้ว่า $\varphi(x), \varphi(y) \in G'$ แล้ว

$$\begin{aligned} xy &= \varphi^{-1}(\varphi(x))\varphi^{-1}(\varphi(y)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(x)\varphi(y)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(y)\varphi(x)) \\ &= \varphi^{-1}(\varphi(y))\varphi^{-1}(\varphi(x)) \\ &= yx \end{aligned}$$

ดังนั้น G เป็นกรุปอาบีเลียน

□

6. ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป ซึ่ง $G_1 \cong G_2$ จงพิสูจน์ว่า

G_1 เป็นกรุปวัฏจักร (cyclic group) ก็ต่อเมื่อ G_2 เป็นกรุปวัฏจักร

บทพิสูจน์ . สมมติว่า G เป็นกรุปวัฏจักร โดยทฤษฎีบท 5.1.10 ข้อ 3 จะได้ว่า Ran(φ) เป็นกรุปวัฏจักร เนื่องจาก $G' =$ Ran(φ) ดังนั้น G' เป็นกรุปวัฏจักร ในทางกลับกับถ้า G' เป็นกรุปวัฏจักร และ $\varphi^{-1} : G_2 \to G_1$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน เช่นกันจะได้ว่า Ran(φ^{-1}) เป็นกรุปวัฏจักร และ $G_1 =$ Ran(φ^{-1}) ดังนั้น G_1 เป็นกรุปวัฏจักร □

7. ให้ G_1, G_1' และ G_2, G_2' เป็นกรุป จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $G_1 \cong G_1'$ และ $G_2 \cong G_2'$ แล้ว $G_1 \times G_2 \cong G_1' \times G_2'$

บทพิสูจน์ . ให้ G_1 และ G_2 เป็นกรุป สมมติว่า $G_1 \cong G_1'$ และ $G_2 \cong G_2'$ จะได้ว่ามี

$\varphi_1 : G_1 \to G_1'$ และ $\varphi_2 : G_2 \to G_2'$ เป็นฟังก์ชันสมสัณฐาน

ให้ $\varphi : G_1 \times G_2 \to G_1' \times G_2'$ นิยามโดย

$$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y))$$

ให้ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G_1 \times G_2$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\varphi((x_1, y_1)(x_2, y_2)) &= \varphi((x_1x_2, y_1y_2)) \\
&= (\varphi_1(x_1x_2), \varphi_2(y_1y_2)) \\
&= (\varphi_1(x_1)\varphi_1(x_2), \varphi_2(y_1)\varphi_2(y_2)) \\
&= (\varphi_1(x_1), \varphi_2(y_1))(\varphi_1(x_2), \varphi_2(y_2)) \\
&= \varphi(x_1, y_1)\varphi(x_2, y_2)
\end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสามิสสัณฐาน
สมมติว่า $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ จะได้ว่า

$$(\varphi_1(x_1), \varphi_2(y_1)) = (\varphi_1(x_2), \varphi_2(y_2))$$

นั่นคือ $\varphi_1(x_1) = \varphi_1(x_2)$ และ $\varphi_2(y_1) = \varphi_2(y_2)$ เนื่องจาก φ_1, φ_2 เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น

$$x_1 = x_2 \text{ และ } y_1 = y_2$$

ฉะนั้น $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ นั่นคือ φ เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้น
ให้ $(a, b) \in G_1' \times G_2'$ เนื่องจาก φ_1, φ_2 เป็นฟังก์ชันทั่วถึง จะได้ว่ามี $x \in G_1$ และ $y \in G_2$ ซึ่ง $\varphi_1(x) = a$ และ $\varphi_2(y) = b$
ดังนั้น

$$\varphi(x, y) = (\varphi_1(x), \varphi_2(y)) = (a, b)$$

ฉะนั้น φ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
สรุปได้ว่า $G_1 \times G_2 \cong G_1' \times G_2'$ □

8. จงหากรุปการเรียงสับเปลี่ยนที่สมสัณฐาน (isomorphic) กับ $\mathbb{Z}_4$ และเป็นกรุปย่อย (subgroup) ของ S_4

แนวคำตอบ จะเห็นว่า $\mathbb{Z}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ สำหรับ $x \in \mathbb{Z}_4$ จะได้ว่า

$$T_{\bar{0}}(x) = \bar{0} + x, \qquad T_{\bar{1}}(x) = \bar{1} + x, \qquad T_{\bar{2}}(x) = \bar{2} + x \qquad \text{และ} \qquad T_{\bar{3}}(x) = \bar{3} + x$$

ดังนั้น $K = \{T_{\bar{0}}, T_{\bar{1}}, T_{\bar{2}}, T_{\bar{3}}\}$ เป็นกรุปวิธีเรียงสับเปลี่ยน จะเห็นได้ชัดว่า

$$\begin{aligned} K &= \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{3} \\ \bar{3} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \right\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

ฉะนั้น $K \cong \{(1), (1\ 2\ 3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4\ 3\ 2)\} = H$ ดังนั้น $\mathbb{Z}_4 \cong H$ ซึ่ง $H \leq S_4$

9. ให้ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย $\varphi(x) = (\bar{x})^3$ จงพิสูจน์ว่า φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน (homomorphism) และใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง แสดงว่า $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$

แนวคำตอบ ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ แล้ว

$$\begin{aligned} \varphi(x+y) &= (\overline{x+y})^3 = (\bar{x} + \bar{y})^3 \\ &= (\bar{x})^3 + 3(\bar{x})^2\bar{y} + 3\bar{x}(\bar{y})^2 + (\bar{y})^3 \\ &= (\bar{x})^3 + (\bar{y})^3 \\ &= \varphi(x) + \varphi(y) \end{aligned}$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = \bar{0}\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : (\bar{x})^3 = \bar{0}\} \\ &= 3\mathbb{Z} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0})^3 = \bar{0}$, $\varphi(1) = (\bar{1})^3 = \bar{1}$ และ $\varphi(2) = (\bar{2})^3 = \bar{2}$

$$\text{Ran}(\varphi) = \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสันฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\text{Ker}(\varphi) \cong \text{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$$

10. จงแสดงว่า $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ โดยใช้ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่งสำหรับกรุป

แนวคำตอบ $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ นิยามโดย

$$\varphi(x) = (\bar{x}, \bar{x}) \qquad \text{เมื่อ } x \in \mathbb{Z}$$

ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\varphi(x+y) = (\overline{x+y}, \overline{x+y}) = (\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = (\bar{x}, \bar{x}) + (\bar{y}, \bar{y}) = \varphi(x) + \varphi(y)$$

ดังนั้น φ เป็นฟังก์ชันสาทิสสัณฐาน

$$\begin{aligned} \text{Ker}(\varphi) &= \{x \in \mathbb{Z} : \varphi(x) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : (\bar{x}, \bar{x}) = (\bar{0}, \bar{0})\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 2 \mid x \text{ และ } 3 \mid x\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} : 6 \mid x\} \\ &= 6\mathbb{Z} \end{aligned}$$

เนื่องจาก $\varphi(0) = (\bar{0}, \bar{0})$, $\varphi(1) = (\bar{1}, \bar{1})$, $\varphi(2) = (\bar{0}, \bar{2})$, $\varphi(3) = (\bar{1}, \bar{0})$, $\varphi(4) = (\bar{0}, \bar{1})$ และ $\varphi(5) = (\bar{1}, \bar{2})$

$$\mathrm{Ran}(\varphi) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$

โดยทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐานบทที่หนึ่ง จะได้ว่า $\mathbb{Z}/\mathrm{Ker}(\varphi) \cong \mathrm{Ran}(\varphi)$ นั่นคือ

$$\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$$