



Assignment 9
MAC3310 พีชคณิตนามธรรม

หัวข้อ ทฤษฎีบทฟังก์ชันสมสัณฐาน และริง สัปดาห์ที่ 10 คะแนนเต็ม 10 คะแนน
ผู้สอน ผศ.ดร.ธัญยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

1. ให้ R เป็นริงซึ่งมียูนิติ จงแสดงว่า $(U(R), \cdot)$ เป็นกรุป

2. ให้ R และ S เป็นริง จงพิสูจน์ว่า $R \times S$ เป็นริง นิยามโดย

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (a \cdot c, b \cdot d)$$

3. ให้ R และ S เป็นริงซึ่งมียูนิติ จงพิสูจน์ว่า

ถ้า R และ S มีหน่วย (unit) แล้ว $R \times S$ มีหน่วย

4. ให้ R และ S เป็นริงซึ่งมียูนิติ จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

ถ้า $R \times S$ มีหน่วย (unit) แล้ว R และ S มีหน่วย

ถ้าจริงจงพิสูจน์ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

5. ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$a \oplus b = a + b - 1 \quad \text{และ} \quad a \odot b = ab - (a + b) + 2$$

จงตรวจสอบว่า $(\mathbb{R}, \oplus, \odot)$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมียูนิติหรือไม่

6. ให้ $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}] = \{a + b\sqrt{-2} : a, b \in \mathbb{Z}\}$ เป็นริงสลับที่ซึ่งมียูนิติ

จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนเต็ม a และ b จะได้ว่า

$$a + b\sqrt{-2} \text{ เป็นหน่วย (unit) ก็ต่อเมื่อ } a^2 + 2b^2 = 1$$

7. จงตรวจสอบว่า I ต่อไปนี้เป็น ริงย่อย (subring) หรือ ไอเดิล (ideal) ของ R หรือไม่

(a) $I = \{(0, x) : x \in \mathbb{Z}\}$ และ $R = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

(b) $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} : x, y \in \mathbb{R} \right\}$ และ $R = M_{22}(\mathbb{R})$

(c) $I = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \\ z & 0 & w \end{bmatrix} : x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\}$ และ $R = M_{33}(\mathbb{R})$

8. ให้ R และ S เป็นริง โดยที่ φ เป็นฟังก์ชันสัทิสันฐานของริง จาก R ไป S จงแสดงว่า

(a) $\text{Ker}(\varphi)$ เป็นริงย่อยของ R

(b) $\text{Ran}(\varphi)$ เป็นริงย่อยของ S

9. ให้ I, J, K เป็นไอเดิลของริง R โดยที่ I เป็นเซตย่อยของ J และ K จงพิสูจน์ว่า

$$K/I = J/I \text{ ก็ต่อเมื่อ } K = J$$