เฉลย Quiz 1 MAC3310 พีชคณิตนามธรรม (รอบ 8:00)

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการดำเนินการทวิภาค **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันศุกร์ที่ 26 กรกฎาคม 2567 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2567
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$$

กรณี $n=1$ จะได้ว่า $\dfrac{3}{1^2\cdot 2^2}=\dfrac{3}{4}=1-\dfrac{1}{4}=1-\dfrac{1}{(1+1)^2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2} &= 1-\frac{1}{(k+1)^2}+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[1-\frac{2k+3}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{(k+2)^2-(2k+3)}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{(k^2+4k+4)-(2k+3)}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{k^2+2k+1}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+1)^2}\left[\frac{(k+1)^2}{(k+2)^2}\right]\\
&= 1-\frac{1}{(k+2)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\cdots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

□

2. **(5 คะแนน)** การดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\{1,2,3,4\}$ ที่มีสมบัติการสลับที่ (commutative) และเปลี่ยนกลุ่ม (associative) แสดงค่าดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	a	1	4	2
2	1	b	3	c
3	4	3	2	d
4	2	4	1	3

จงหา a, b, c, d และ **เอกลักษณ์ (identity)** (ให้เหตุผล)

แนวคำตอบ โดยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$a = 1 * 1 = 1 * (4 * 3) = (1 * 4) * 3 = 2 * 3 = 3$$
$$b = 2 * 2 = 2 * (3 * 3) = (2 * 3) * 3 = 3 * 3 = 2$$

โดยสมบัติการสลับที่จะได้ว่า

$$c = 2 * 4 = 4 * 2 = 4$$
$$d = 3 * 4 = 4 * 3 = 1$$

จากตารางจะได้ว่า

$$a * 2 = a = 2 * a \qquad \text{ทุก ๆ } a \in \{1,2,3,4\}$$

ดังนั้น 2 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$

เฉลย Quiz 1 MAC3310 พีชคณิตนามธรรม (รอบ 13:00)

หัวข้อ อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์และการดำเนินการทวิภาค **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันศุกร์ที่ 27 กรกฎาคม 2567 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 3) ปีการศึกษา 1/2567
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้โดยใช้อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

$$\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

บทพิสูจน์. ให้ $n\in\mathbb{N}$ และ $P(n)$ แทนข้อความ

$$\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2}$$

กรณี $n=1$ จะได้ว่า $\frac{5}{2^2\cdot 3^2}=\frac{5}{36}=\frac{1}{4}-\frac{1}{9}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(1+2)^2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
ให้ $k\in\mathbb{N}$ สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{2k+3}{(k+1)^2(k+2)^2}+\frac{2k+5}{(k+2)^2(k+3)^2} &= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+2)^2}+\frac{2k+5}{(k+2)^2(k+3)^2}\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+2)^2}\left[1-\frac{2k+5}{(k+3)^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+2)^2}\left[\frac{(k+3)^2-(2k+5)}{(k+3)^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+2)^2}\left[\frac{(k^2+6k+9)-(2k+5)}{(k+3)^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+2)^2}\left[\frac{k^2+4k+4}{(k+2)^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+2)^2}\left[\frac{(k+2)^2}{(k+3)^2}\right]\\
&= \frac{1}{4}-\frac{1}{(k+3)^2}
\end{aligned}$$

ดังนั้น $P(k+1)$ เป็นจริง โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สรุปได้ว่า

$$\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\cdots+\frac{2n+3}{(n+1)^2(n+2)^2}=\frac{1}{4}-\frac{1}{(n+2)^2} \qquad \text{ทุก ๆ } n\in\mathbb{N}$$

□

2. **(5 คะแนน)** การดำเนินการทวิภาค $*$ บน $\{1,2,3,4\}$ ที่มีสมบัติการสลับที่ (commutative) และเปลี่ยนกลุ่ม (associative) แสดงค่าดังตารางเคย์เลย์

$*$	1	2	3	4
1	a	4	1	3
2	4	b	2	c
3	1	2	3	d
4	3	1	4	2

จงหา a, b, c, d และ **เอกลักษณ์ (identity)** (ให้เหตุผล)

แนวคำตอบ โดยสมบัติการสลับที่จะได้ว่า

$$c = 2 * 4 = 4 * 2 = 1$$
$$d = 3 * 4 = 4 * 3 = 4$$

โดยสมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม

$$a = 1 * 1 = 1 * (4 * 2) = (1 * 4) * 2 = 3 * 2 = 2$$
$$b = 2 * 2 = 2 * (4 * 4) = (2 * 4) * 4 = c * 4 = 1 * 4 = 3$$

จากตารางจะได้ว่า

$$a * 3 = a = 3 * a \qquad \text{ทุก ๆ } a \in \{1,2,3,4\}$$

ดังนั้น 3 เป็นเอกลักษณ์ของ $*$