เฉลย Quiz 2 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310 (รอบ 8:00)

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันศุกร์ที่ 9 สิงหาคม 2567 เวลา 08:00-08:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2567
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α และ $(2\ 5\ 6\ 7)$ เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม (disjoint cycle) ใน S_7 โดยที่ $\circ(\alpha) = 2$ จงหา **อันดับ (order)** ของ

$$[\alpha(2\ 5\ 6\ 7)]^{2002}$$

แนวคำตอบ เนื่องจาก $\circ(\alpha) = 2$ จะได้ว่า $\alpha^2 = (1)$ และ α และ $(2\ 5\ 6\ 7)$ เป็นวัฏจักรที่ไม่มีส่วนร่วม จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
[\alpha(2\ 5\ 6\ 7)]^{2002} &= \alpha^{2002}(2\ 5\ 6\ 7)^{2002} \\
&= [\alpha^2]^{1001}(2\ 5\ 6\ 7)^{4(500)+2} \\
&= [(1)]^{1001}[(2\ 5\ 6\ 7)^4]^{500}(2\ 5\ 6\ 7)^2 \\
&= (1)[(1)]^{500}(2\ 5\ 6\ 7)^2 \\
&= (1)(1)(2\ 5\ 6\ 7)(2\ 5\ 6\ 7) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (2\ 6)(5\ 7)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\circ\left([\alpha(2\ 5\ 6\ 7)]^{2002}\right) = \circ((2\ 6)(5\ 7)) = \ell\text{cm}(2,2) = 2 \quad \#$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{\begin{bmatrix} x^2 & 0 \\ 0 & x^{-2} \end{bmatrix} : x \neq 0\right\}$$

แนวคำตอบ สำหรับ $a = 1$ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$

ให้ $A = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^{-2} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^{-2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^{-2} & 0 \\ 0 & b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2b^{-2} & 0 \\ 0 & a^{-2}b^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (ab^{-1})^2 & 0 \\ 0 & (ab^{-1})^{-2} \end{bmatrix}$$

จาก $a \neq 0$ และ $b \neq 0$ จะเห็นว่า $ab^{-1} \neq 0$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$
ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$

เฉลย Quiz 2 : พีชคณิตนามธรรม MAC3310 (รอบ 13:00)

หัวข้อ กรุปการเรียงสับเปลี่ยนและกรุปย่อย **คะแนนเต็ม** 10 คะแนน
เวลา วันศุกร์ที่ 9 สิงหาคม 2567 เวลา 13:00-13:30 (สัปดาห์ที่ 5) ปีการศึกษา 1/2567
ผู้สอน ผศ.ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

---

1. **(5 คะแนน)** ให้ α เป็นวัฏจักร (cycle) ใน S_4 โดยที่

$$(1\ 2\ 3)\alpha(1\ 2\ 3)^{-1} = (1\ 3\ 4)$$

จงเขียน α^{2024} ในรูปวัฏจักร

แนวคำตอบ พิจารณา

$$\begin{aligned}
(1\ 2\ 3)\alpha(1\ 2\ 3)^{-1} &= (1\ 3\ 4) \\
(1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2\ 3)\alpha(1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 2\ 3) &= (1\ 2\ 3)^{-1}(1\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) \\
(1)\alpha(1) &= (3\ 2\ 1)(1\ 3\ 4)(1\ 2\ 3) \\
\alpha &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (2\ 4\ 3)
\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\alpha^{2024} &= (2\ 4\ 3)^{2024} = (2\ 4\ 3)^{3(674)+2} \\
&= [(2\ 4\ 3)^3]^{674}(2\ 4\ 3)^2 \\
&= [(1)]^{674}(2\ 4\ 3)^2 \\
&= (1)(2\ 4\ 3)(2\ 4\ 3) \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (2\ 3\ 4) \quad \#
\end{aligned}$$

2. **(5 คะแนน)** จงตรวจสอบว่า H เป็น**กรุปย่อย(subgroup)** ของ $GL_2(\mathbb{R})$ หรือไม่

$$H = \left\{ \begin{bmatrix} 2^x & 0 \\ 0 & 2^{-x} \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\}$$

แนวคำตอบ สำหรับ $x = 0$ เห็นได้ชัดว่า $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in H$ ดังนั้น $H \neq \varnothing$

ให้ $A = \begin{bmatrix} 2^a & 0 \\ 0 & 2^{-a} \end{bmatrix}$ และ $B = \begin{bmatrix} 2^b & 0 \\ 0 & 2^{-b} \end{bmatrix}$ เป็นสมาชิกใน H นั่นคือ $a, b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า

$$AB^{-1} = \begin{bmatrix} 2^a & 0 \\ 0 & 2^{-a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^b & 0 \\ 0 & 2^{-b} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 2^a & 0 \\ 0 & 2^{-a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2^{-b} & 0 \\ 0 & 2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^a 2^{-b} & 0 \\ 0 & 2^{-a}2^b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{a-b} & 0 \\ 0 & 2^{-(a-b)} \end{bmatrix}$$

เนื่องจาก $a - b \in \mathbb{R}$ จะได้ว่า $AB^{-1} \in H$
ดังนั้น H เป็นกรุปย่อยของ $GL_2(\mathbb{R})$