แคลคูลัส 2

Calculus 2

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2564

MAC1303

แคลคูลัส 2

Calculus 2

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

สารบัญ

บทที่ 1

ลำดับและอนุกรม

1.1 ลำดับของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.1.1 ลำดับ (Sequence) **ของจำนวนจริง** คือฟังก์ชันที่โดเมนเป็น $\mathbb{N}$ และค่าเป็นจำนวนจริง

ให้ $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยมเขียน $a(n)$ แทนด้วย a_n ดังนั้น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}$$

เนื่องจาก a_n ต้องคู่กับ n เสมอ ในคู่อันดับ (n, a_n) ดังนั้นจะเขียนลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \quad \text{หรือ} \quad a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad \text{หรือ} \quad \{a_n\}$$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์

$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$	$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$	$\{a_n\}$
	$1, 2, 3, ..., n, ...$	
$\{1, 3, 5, 7, ...\}$		
		$\{(-1)^n\}$
$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, ...\right\}$		
	$2, 7, 12, 17, ...$	
$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, ...\right\}$		

บทนิยาม 1.1.3 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า L เป็นลิมิตของ $\{a_n\}$ ก็ต่อเมื่อ สำหรับจำนวนจริงบวก ε ใด ๆ จะมี $N \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$|a_n - L| < \varepsilon \qquad \text{ทุก ๆ จำนวนนับ } n > N$$

และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$

ทฤษฎีบท 1.1.4 ให้ $r, t \in \mathbb{R}$ เป็นเป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^t} = 0$ เมื่อ $t > 0$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

ตัวอย่าง 1.1.5 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n} \cdot 2^n$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-3}$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n}$

ทฤษฎีบท 1.1.6 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M, k \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
2. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว
3. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n + b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$
4. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L - M$
5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = LM$
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
7. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^m = L^m$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 1.1.7 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+3}{1-3n+2n^2}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^n+2^{n+1}}{3^{n-1}-3\cdot 2^n}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{9n^2+1}}{n+\sqrt[3]{n^3+1}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} (n-\sqrt{n})$

ทฤษฎีบท 1.1.8 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0$$

ตัวอย่าง 1.1.9 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\cos n\pi}{n^2+1}$

ทฤษฎีบท 1.1.10 The Squeeze Theorem
ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $n_0 \in \mathbb{N}$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq n_0$$

และ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 1.1.11 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{\sqrt{n}}$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin n \cos n}{n^2+1}$

บทนิยาม 1.1.12 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ นอกจากนั้น $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent)

ตัวอย่าง 1.1.13 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{(n+1)^3}{\sqrt{n^4+1}}\right\}$
2. $\left\{\sqrt{n^2+n+1} - n\right\}$

ในบางกรณีเราสามารถหาลิมิต $\lim_{n\to\infty} a_n$ ได้จากการหาลิมิต

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

เมื่อ f เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่กำหนดบนช่วง $[1,\infty)$ และ $f(n) = a_n$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ ดังนั้น

$$\text{ถ้า } \lim_{x\to\infty} f(x) = L,\ \infty \ \text{ หรือ } -\infty \ \text{ แล้ว } \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

ตัวอย่าง 1.1.14 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{2^n}{n}\right\}$

2. $\left\{\dfrac{\ell\text{n}\, n}{n}\right\}$

3. $\left\{n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)\right\}$

4. $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}$

บทนิยาม 1.1.15 ให้ $\{n_k\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ซึ่ง

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots$$

สำหรับลำดับ $\{a_n\}$ ใด ๆ ถ้าให้ $b_k = a_{n_k}$ จะได้ว่า $\{b_k\}$ เป็นลำดับที่มีพจน์ที่ k เป็นพจน์ที่ n_k ของลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกว่าลำดับ $\{b_k\}$ ว่า **ลำดับย่อย** (subsequence) ของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 1.1.16 จงยกตัวอย่างของลำดับย่อยของ $\{n\}$ มาอย่างน้อย 3 ลำดับ

ทฤษฎีบท 1.1.17 ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็นจำนวนจริง L แล้วจะได้ว่า ทุกลำดับย่อยของ $\{a_n\}$ มีลิมิตเป็น L

หมายเหตุ

1. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีลำดับย่อยที่ลู่ออก แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก
2. ถ้าลำดับ $\{a_n\}$ มีสองลำดับย่อยที่ลิมิตต่างกัน แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.1.18 จงแสดงว่า $\left\{\dfrac{(-1)^n n}{n+1}\right\}$ เป็นลำดับลู่ออก

บทนิยาม 1.1.19 จะกล่าวว่าลำดับของจำนวนจริง $\{a_n\}$ มี **ขอบเขต** (bounded) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริงบวก M ซึ่ง $|a_n| \leq M$ ทุก $n \in \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 1.1.20 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต

ตัวอย่าง 1.1.21 จงยกตัวอย่างลำดับที่มีขอบเขตแต่ไม่เป็นลำดับลู่เข้า

บทนิยาม 1.1.22 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น

1. **ลำดับเพิ่ม** (increasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n < a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$
2. **ลำดับลด** (decreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n > a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$
3. **ลำดับไม่เพิ่ม** (nonincreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \geq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$
4. **ลำดับไม่ลด** (nondecreasing sequence) ก็ต่อเมื่อ $a_n \leq a_{n+1}$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$

และ $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับทางเดียว** ก็ต่อเมื่อ $\{a_n\}$ เป็นลำดับไม่เพิ่มหรือเป็นลำดับไม่ลด

ตัวอย่าง 1.1.23 จงแสดงว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับทางเดียว

1. $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$
2. $\left\{\dfrac{n^2}{n+1}\right\}$

ทฤษฎีบท 1.1.24 ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขตและลำดับทางเดียว แล้ว $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.1.25 จงแสดงว่า $\left\{\dfrac{2^n}{n!}\right\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงหาลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$

1.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^5(1-n)^2}{n^4(2n-1)^3}$

1.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

1.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)$

1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

1.6 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n}{\sqrt{n+5}}$

1.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(e^n+n^2}{e^n+n}$

1.8 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

1.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)-2n^2}{n^2+1}$

1.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ell\text{n}(3n^2+1)}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.11 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+1}}}{2n+\sqrt[3]{n^3+5}}$

1.12 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\cos^2 n}$

2. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\left\{\dfrac{\ell\text{n}n}{n^2}\right\}$

2.2 $\left\{\dfrac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}\right\}$

2.3 $\left\{\dfrac{(3n+1)^2}{\sqrt{n^4+4}}\right\}$

2.4 $\left\{\dfrac{\sqrt{9^n+n}}{2^n+3^n}\right\}$

2.5 $\left\{\dfrac{n}{\ell\text{n}(e^n+1)}\right\}$

2.6 $\left\{\dfrac{3^n+2}{2^n+1}\right\}$

2.7 $\left\{\dfrac{e^n(2n^4+n^3+1)}{n^4(e^n+2^n)}\right\}$

2.8 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}\right\}$

2.9 $\left\{\dfrac{n}{n(-1)^n+2}\right\}$

2.10 $\left\{\dfrac{\ell\text{n}n}{\ell\text{n}(n+1)}\right\}$

2.11 $\left\{\dfrac{(2n-1)!}{(2n+1)!}\right\}$

2.12 $\left\{\dfrac{n!2^n}{(2n)!}\right\}$

3. จงพิจารณาว่าลำดับ $\{a_n\}$ ที่นิยามต่อไปนี้ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

3.1 $a_1=1,\ a_{n+1}=5a_n-3$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

3.2 $a_1=6,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{n}$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

3.3 $a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{1+a_n}$ เมื่อ $n=1,2,3,...$

4. จงทดสอบว่าลำดับ $a_n=\dfrac{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{n!}$ เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

5. จงหาลิมิตของลำดับ $\left\{\sqrt{2},\sqrt{2\sqrt{2}},\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},...\right\}$

1.2 อนุกรมของจำนวนจริง

บทนิยาม 1.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย** (partial sum) ของ n พจน์แรกของ $\{a_n\}$
และเรียก $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์** (infinite series) ของจำนวนจริง หรือ **อนุกรม** (series)
ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

ทฤษฎีบท 1.2.2 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ เมื่อ $1 < m < n$

ตัวอย่าง 1.2.3 ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{5}(k^2 + ck - c) = 265$ จงหาค่า c

ทฤษฎีบท 1.2.4 Telescoping Series
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n$$

ตัวอย่าง 1.2.5 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \sin k$

ทฤษฎีบท 1.2.6 **สูตรของเกาส์** (Gauss' Formula)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ทฤษฎีบท 1.2.7 จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ตัวอย่าง 1.2.8 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}(3k+1)$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}(2k+1)^2$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100}(k-1)^3$

บทนิยาม 1.2.9 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม** ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ทฤษฎีบท 1.2.10 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง และ $m \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมออก ก็ต่อเมื่อ $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n - \sum_{n=1}^{m-1} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 1.2.11 Telescoping Series Test
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $\lim_{n\to\infty} a_n$ มีค่า หรือ $\{a_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1}) = a_1 - \lim_{n\to\infty} a_n$$

ตัวอย่าง 1.2.12 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.13 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell\text{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

ทฤษฎีบท 1.2.14 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

การทดสอบอนุกรมลู่ออก (Divergent Test)
โดยใช้กฎแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทนี้จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ แล้ว } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 1.2.15 จงแสดงว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$

บทนิยาม 1.2.16 อนุกรมเรขาคณิต (Geometric series) คืออนุกรมที่อยู่ในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

ทฤษฎีบท 1.2.17 อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $|r| < 1$ โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น $\frac{a}{1-r}$ และเป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง 1.2.18 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (-2)^{-n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^{n-1}}$

ทฤษฎีบท 1.2.19 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยที่ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ทฤษฎีบท 1.2.20 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 1.2.21 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1} \right)$

ตัวอย่าง 1.2.22 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{n(n+1)}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.23 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2^n+3^n)^2}{5^n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.24 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 1.2.25 จงยกตัวอย่างอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ที่ทำให้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

แบบฝึกหัด 1.2

จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+n-1}}{3n^2+1}$
3. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell\text{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n}+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{3^n+5^n}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}-4^n}{10^n}$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}+1}{2^n}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+4n+3}+4^{-n}\right)$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$
17. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos n$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2+4+6+\cdots+(2n)}$

1.3 การทดสอบแบบอินทิกรัล

ทฤษฎีบท 1.3.1 การทดสอบแบบอินทิกรัล (Integral Test)

ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมจำนวนจริงซึ่ง $a_n \geq 0$ และ เป็นฟังก์ชันค่าจริง ซึ่งมีสมบัติดังนี้

1. $f(n) = a_n$ ทุก $n \in \mathbb{N}$
2. มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง f เป็นฟังก์ชันไม่เพิ่ม และมีความต่อเนื่องบนช่วง $[n_0, \infty)$
3. $t_n = \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx, \qquad n \geq n_0$

จะได้ว่า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า

และ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ถ้า $\{t_n\}$ เป็นลำดับลู่ออก

ตัวอย่าง 1.3.2 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}$

ตัวอย่าง 1.3.3 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell \text{n} n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n} e^{\sqrt{n}}} + \left(\frac{2}{\pi} \right)^n \right)$

บทนิยาม 1.3.4 อนุกรมพี (p-Series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 1.3.5 อนุกรมพีจะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่าง 1.3.6 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^3}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2^n}{n} + \frac{1}{n^3} \right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-2} + (-2)^n \right)$

แบบฝึกหัด 1.3

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก โดยใช้การทดสอบแบบอินทิกรัล

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n-1}}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{n+2}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+n}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan(n)}{n^2+1}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{n^4+4}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\frac{1}{n})}{n^2}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{2n^2+1}}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n^3}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{-\ln n}}{n(2^{-\ln n}+1)}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}}$

2.2 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

2.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

2.4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

2.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{3^{-n}} + \sqrt{\frac{n}{\sqrt{n^5}}}\right)$

2.6 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

1.4 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ

ทฤษฎีบท 1.4.1 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ (The Comparision Test)
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geq n_0$$

จะได้ว่า

1. ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+1}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{\sqrt{n}}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{\sin n}{n}\right)^2$

ทฤษฎีบท 1.4.3 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบด้วยลิมิต (The Limit Comparision Test)
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $a_n \geq 0$ และ $b_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L > 0$ แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L = 0$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
3. ถ้า $L = \infty$ และ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.4.4 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{3n^2+n+1}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{n^3+3n^2+1}$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt{n}}{2^n}$

ตัวอย่าง 1.4.5 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n - 3^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n2^n - 1}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ell\mathrm{n}(n+1)}$

4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n^2}$

แบบฝึกหัด 1.4

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(3n-1)^4}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+\cos n}{n}\right)^4$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n+1}\right)^2$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\ell n n}{n(n+1)^3}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,\ell n(n+1)}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n+5}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1}}{\sqrt{n^3+1}}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n n}{n\sqrt{n}}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n n}{e^n \ell n(n+2)}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n3^n-2}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+2)^{-2\ell n n}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^5}$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell n n}{2^n}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^3}$

2. จงหาเงื่อนไขของจำนวนจริง p ซึ่งทำให้อนุกรม

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^p}$$

เป็นอนุกรมลู่เข้าและเป็นอนุกรมลู่ออก

3. ถ้า $\{a_n\}$ เป็นลำดับมีขอบเขต และ $a_n \geq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)^p} \quad \text{เป็นอนุกรมลู่เข้า ทุก ๆ } p > 1$$

1.5 การลู่เข้าแบบสัมบูรณ์

บทนิยาม 1.5.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $a_n > 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ อนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

เรียกว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 1.5.2 อนุกรมสลับ $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าสอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$
2. มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 1.5.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n n}{n+1}$

ตัวอย่าง 1.5.4 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\mathrm{n}(n+1)}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + \ell\mathrm{n} n}$

ทฤษฎีบท 1.5.5 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 1.5.6 จงตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 1.5.5

ตัวอย่าง 1.5.7 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$

บทนิยาม 1.5.8 ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วเรียกอนุกรมนี้ว่าเป็นอนุกรม

1. **ลู่เข้าแบบสัมบูรณ์** (absolute convergece) ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. **ลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข** (conditional convergence) ถ้า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 1.5.9 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+5}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

ตัวอย่าง 1.5.10 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^2}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\text{arctan}n}{n^2+1}$

แบบฝึกหัด 1.5

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้ เป็นอนุกรมลู่เข้าแบบสัมบูรณ์หรือลู่เข้าแบบมีเงื่อนไข

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ell\text{n}(n+2)}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ell\text{n}n}}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4-n+1}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n+3^n}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{arctan}n}{4n^3-1}$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{sin}\left(\frac{\pi}{n}\right)$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \text{arctan}n$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sin}\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{1+\sqrt{n}}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\text{cos}n\pi}{2^n}$

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ell\text{n}(e^n+1)}$

1.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ell\text{n}n}{\ell\text{n}(n+2)}$

1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{\frac{1}{n}}$

2. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{p^n}$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+p}$

2.4 $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ell\text{n}n)^p}{n}$

1.6 การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน

ทฤษฎีบท 1.6.1 การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test)
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 1.6.2 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

ตัวอย่าง 1.6.3 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{3^{\ell \text{n} n}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

ทฤษฎีบท 1.6.4 การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ (The Root Test)
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 1.6.5 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$

ตัวอย่าง 1.6.6 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{n+1} + 2^n}{3e^n + 5} \right)^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ell\mathrm{n}(2^n + 1)} \right)^n$

แบบฝึกหัด 1.6

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell\text{n}(n+1)}{e^n}$

1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

1.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n+n+1}$

1.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^n}$

1.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$

1.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

1.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ell\text{n}(n+1)}\right)^n$

1.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ell\text{n}(n+1)}{3^n}$

1.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

1.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

1.13 $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

1.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n^n}$

1.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{n+1}\right)^{-5n}$

1.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{100}100^n}{n!}$

2. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^n}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

แบบฝึกหัดระคน

จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{(2n+3)^2}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sec^4 n}{\sqrt[3]{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}+n^{-n}\right)$
4. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^3 3^{-n}$
5. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$
6. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^7+3}}$
7. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right)$
8. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n-1}$
9. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{3^n n!}$
10. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$
11. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n4^{-n^2}$
12. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{5^n-n}$
13. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}\frac{2}{2n+1}\right)$
14. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(n+2)^{-\ln(e^n+n)}$
15. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+4)}$
16. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\pi-2\arctan n)$
17. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{\ln(n+1)}$
18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n^2}n^n$
19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{n\sqrt[4]{n}}$
20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(3^n+1)}$
21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(3+\cos n)^{-n}$
22. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$
23. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{n+10}{n+5}\right)$
24. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n^4+1}-n^2\right)$
25. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt{n^2+1}}$
26. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n!}$
27. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2+\ln n)^2}$
28. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}9^{-\ln n}$
29. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{3^n-n}$
30. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{\sqrt{n}2^n+1}$

31. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{3^n}{4^n-1}\right)$

32. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{4}\right)^{-n}$

33. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[n]{n+1}+1\right)^{-2n}$

34. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+\ell\text{n}n}$

35. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{3^n}+\frac{\cos^2 n}{4^n}\right)$

36. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^9}{n^3(n+2)^{10}}$

37. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

38. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(5)(7)(9)\cdots(2n+3)}$

39. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2)(4)(6)\cdots(2n)}{n!}$

40. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(1)(3)(5)\cdots(2n-1)}{(2n-1)!}$

41. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$

42. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

43. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+\ell\text{n}n}$

44. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{3^n}$

45. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\sin\left(\frac{1}{n^3}\right)$

46. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}3^{-\ell\text{n}(e^n+1)}$

47. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!)}{n!}$

48. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+n-3n^2}{\sqrt{n^6+2}}$

49. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\ell\text{n}(n+2)}{n}$

50. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin^2 n}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

51. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sin n}$

52. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)\cos n\right]^n$

53. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(\frac{n\pi}{3})}{n!}$

54. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+1}{2n^2+1}\right)^n$

55. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3-\cos n}{n^{\frac{2}{3}}-2}$

56. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

57. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+3+5+\cdots+(2n-1)}$

58. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3}$

59. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1}-n\right)$

60. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n!}$

บทที่ 2

อนุกรมกำลัง

อนุกรมกำลัง (power series) รอบจุด a เมื่อ $a \in \mathbb{R}$ คืออนุกรมอนันต์ในรูป

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

เรียก a ว่า **จุดศูนย์กลางของอนุกรมกำลัง** (center of power series)
และเรียก $c_n \in \mathbb{R}$ ว่า **สัมประสิทธิ์ของอนุกรมกำลัง** (coefficients of power series)
หมายเหตุ อนุกรมกำลังเป็นอนุกรมลู่เข้าเมื่อ $x = a$ เสมอ

2.1 รัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้า

ตัวอย่าง 2.1.1 จงหา x ที่ทำให้ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ทฤษฎีบท 2.1.2 สำหรับอนุกรมกำลัง

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

จะเป็นไปตามกรณีใดกรณีหนึ่งใน 3 กรณีนี้เท่านั้น

1. อนุกรมลู่เข้าเฉพาะเพียงจุดเดียวที่จุดศูนย์กลาง x_0
2. มีจำนวนจริงบวก R ที่ทำให้
   อนุกรมลู่เข้าทุกค่า x ซึ่ง $|x-x_0|<R$ และ อนุกรมลู่ออกทุกค่า x ซึ่ง $|x-x_0|>R$
3. อนุกรมลู่เข้าทุกค่า $x \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 2.1.3 จำนวน R ในทฤษฎีบท 2.1.2 ข้อ 2 เรียกว่า **รัศมีแห่งการลู่เข้า** (radius of convergence) ของอนุกรมกำลัง ในข้อ 1 ให้ $R=0$ และในข้อ 3 ให้ $R=\infty$

บทนิยาม 2.1.4 เรียกเซต

$$\left\{ x : \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า} \right\}$$

ว่า **ช่วงแห่งการลู่เข้า** (interval of convergent) ของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$

จะได้ว่าอนุกรมกำลังที่มีรัศมีแห่งการลู่เข้า R มีช่วงแห่งการลู่เข้าแบบใดแบบหนึ่งเท่านั้น

$$(a-R,a+R),\ (a-R,a+R],\ [a-R,a+R),\ [a-R,a+R] \text{ และ } (-\infty,\infty)$$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n!}$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

ทฤษฎีบท 2.1.7 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} c_n(x-a)^n$ เป็นอนุกรมกำลัง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $c_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \geq n_0$ จะได้ว่ารัศมีแห่งการลู่เข้าคือ

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right| \qquad \text{หรือ} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

ตัวอย่าง 2.1.8 จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหารัศมีและช่วงแห่งการลู่เข้าของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nx^n$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2x^n}{2^n}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x+1)^n}{n!}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x-1)^n}{3^n}$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n(x-3)}{\cos n}\right)^n$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(x-2)^n}{n^4+1}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^n}{n^2+1}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-e)^n}{ne^n}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^{n^2}x^n$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x-1)^n}{5^n}$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3x+1)^n}{n4^n}$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{n^2 4^n}$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{n\cdot 27^n}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{\sqrt{n+1}}$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+2)^n}{3^{n+1}}$

1.17 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n x^n}{n\sqrt{n}}$

1.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x+1)^n}{4^n \ell \ln n}$

1.19 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5x-3)^n}{n^3}$

1.20 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$

2. จงหาโดเมนของ **ฟังก์ชันเบสเซล** (Bessel function) อันดับ 0 และ 1 ที่กำหนดโดย

2.1 $\displaystyle J_0(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}$

2.2 $\displaystyle J_1(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n!(n+1)!2^{2n+1}}$

2.2 ฟังก์ชันในรูปอนุกรมกำลัง

บทนิยาม 2.2.1 ให้อนุกรมกำลัง $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ ลู่เข้าบนช่วง I ถ้าอนุกรมนี้มีผลบวกเป็น $f(x)$ ทุก ๆ $x \in I$ นั่นคือ

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{ทุก ๆ } x \in I$$

เรียก f ว่า **ฟังก์ชันผลบวก** (sum function) ของอนุกรม $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ บน I

ต่อไปเราจะใช้อนุกรมเรขาคณิต (เป็นอนุกรมกำลังรอบจุด 0)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \quad \text{เมื่อ} \quad |x| < 1$$

เป็นเครื่องมือสำคัญในการหาฟังก์ชันผลบวกดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 2.2.2 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{2n}$

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$

3. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-x)^n$

4. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (2x-1)^n$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงหาอนุกรมกำลังที่มีฟังก์ชันผลบวกต่อไปนี้

1. $\dfrac{1}{1+2x}$

2. $\dfrac{1}{1+x^2}$

3. $\dfrac{1}{x}$

4. $\dfrac{1}{x^2+4}$

5. $\dfrac{x}{x^2-1}$

6. $\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

บทนิยาม 2.2.4 กำหนดให้

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \quad \text{บนช่วง } (a-R, a+R)$$

เมื่อ R เป็นรัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรมนี้ จะได้ว่า f มีอนุพันธ์ทุกค่า $x \in (a-R, a+R)$ และ

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n(x-a)^{n-1} \quad \text{ทุกค่า } x \in (a-R, a+R)$$

เมื่อ C เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\int f(x)\,dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

ตัวอย่าง 2.2.5 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} nx^n$

2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n^2x^{n+2}$

3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n3^n(-x)^{n+1}$

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n+1}$

ตัวอย่าง 2.2.6 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$

ตัวอย่าง 2.2.7 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{1+x}{(1-x)^3}$

ตัวอย่าง 2.2.8 จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x) = \dfrac{x^2}{(1-4x^2)^2}$

ตัวอย่าง 2.2.9 ให้ $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\ell\text{n}2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$

ตัวอย่าง 2.2.10 ให้ $f(x) = \text{arctan} x$

1. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกเป็น $f(x)$
2. จงแสดงว่า $\dfrac{\pi}{4} = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$

แบบฝึกหัด 2.2

1. จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลังต่อไปนี้

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-3)^{n-1}nx^n$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)x^n}{2}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n-1}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}n(-x)^{n-1}$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(2x)^n$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}nx^{3n}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}4^{n-1}x^{n+1}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^nx^n}{n+1}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n(-3x)^{n+1}$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x+1)^n}{2^n}$

2. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

2.1 $f(x)=\dfrac{2}{3-2x}$

2.2 $f(x)=\dfrac{3}{1-x^4}$

2.3 $f(x)=\dfrac{1}{x+10}$

2.4 $f(x)=\dfrac{x}{9+x^2}$

2.5 $f(x)=\dfrac{1+x}{1+x}$

2.6 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+1}$

2.7 $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x-2}$

2.8 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2x+2}$

2.9 $f(x)=-\dfrac{x^3}{(1+x)^2}$

2.10 $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^4}$

2.11 $f(x)=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$

2.12 $f(x)=\dfrac{x^2}{(1-5x)^2}$

3. จงหาอนุกรมกำลังซึ่งมีฟังก์ชันผลบวกพร้อมทั้งช่วงแห่งการลู่เข้า

3.1 $f(x)=\ell\mathrm{n}(5-x)$

3.2 $f(x)=x\ell\mathrm{n}(x+1)$

3.3 $f(x)=x^2\mathrm{arctan}(x^3)$

3.4 $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$

3.5 $f(x)=\left(\dfrac{x}{2-x}\right)^3$

3.6 $f(x)=\dfrac{x^2+x}{(1-x)^3}$

3.7 $f(x)=\ell\mathrm{n}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

2.3 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์

บทนิยาม 2.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ที่จุด a ถึงอันดับที่ n จะกล่าวว่า $T_n(x)$ เป็น **พหุนามเทย์เลอร์** (Taylor polynomial) ดีกรี n ของ f ที่จุด $x = a$ ก็ต่อเมื่อ

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **พหุนามแมคลอริน** (Maclaurin polynomial) นั่นคือ

$$T_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.3.2 จงหาพหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = e^x$
2. $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 4 รอบจุด $x = 1$ ของ $f(x) = \ell n x$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ทฤษฎีบทของเทย์เลอร์ (Taylor's Theorem)
ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ถึงอันดับที่ $n+1$ บนช่วงเปิด I สำหรับ $x, a \in I$
จะได้ว่ามี c อยู่ระหว่าง a กับ x ที่ทำให้

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

เมื่อ $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-a)^{n+1}$ เรียกว่า **เศษเหลือ** (remainder)

หมายเหตุ ความผิดพลาด $R_n(x)$ โดยที่

$$|R_n(x)| < 0.\underbrace{000...0}_{r+1}5$$

จะบอกค่าประมาณความถูกต้องอย่างน้อยทศนิยม $r+1$ ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.5 ให้ $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt[3]{2}$ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ดีกรี 3 ของ f รอบจุด $x = 1$ พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$ จงหาประมาณค่าของ $\ell\text{n}(1.5)$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 7 ของ f พร้อมทั้งบอกค่าประมาณนี้ว่าถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมกี่ตำแหน่ง

ตัวอย่าง 2.3.7 ให้ $f(x) = x\text{sin}x$ จงหาประมาณค่าของ $\displaystyle\int_0^1 x\text{sin}x\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงหาพหุนามเทย์เลอร์ $T_n(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

1.1	$f(x) = \text{sin}x$	; $a = 0$; $n = 9$
1.2	$f(x) = \text{cos}x$	; $a = 0$; $n = 8$
1.3	$f(x) = \ell\text{n}(x+1)$	; $a = 0$; $n = 6$
1.4	$f(x) = \sqrt{x+1}$	; $a = 3$; $n = 5$
1.5	$f(x) = e^{x^2}$	; $a = 0$; $n = 6$
1.6	$f(x) = x^2\ell\text{n}x$	; $a = 1$; $n = 4$
1.7	$f(x) = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 1$	; $a = 1$; $n = 3$
1.8	$f(x) = \ell\text{n}(\text{cos}x)$	; $a = \frac{\pi}{4}$; $n = 3$
1.9	$f(x) = x\text{cos}x$	; $a = 0$; $n = 7$
1.10	$f(x) = x^2\text{sin}x$	; $a = 0$; $n = 7$

2. จงหาค่าประมาณของค่าต่อไปนี้ โดยใช้พหุนามเทย์เลอร์ที่ทำให้คำตอบถูกต้องอย่างน้อยทศนิยมตำแหน่งที่ 3

2.1 $\text{sin}12°$	2.4 $\sqrt{4.2}$
2.2 $\text{cos}12°$	2.5 $e^{0.5}$
2.3 $\ell\text{n}(1.02)$	2.6 $\sqrt[3]{7.9}$

3. ให้ $f(x) = \sqrt{x+1}$ จงหาประมาณค่าของ $\sqrt{1.2}$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 5 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

4. ให้ $f(x) = e^x$ จงหาประมาณค่าของ $\displaystyle\int_0^{0.6} e^{-x^2}\,dx$ โดยใช้พหุนามแมคลอรินดีกรี 4 ของ f พร้อมทั้งหาขอบเขตความผิดพลาด

2.4 อนุกรมเทย์เลอร์

สมมติว่า f เป็นฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมกำลัง $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ โดยที่ $|x-a| < R$ จะได้ว่า

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + c_4(x-a)^4 + \cdots \tag{2.1}$$
$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + 4c_4(x-a)^3 + \cdots \tag{2.2}$$
$$f''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{2.3}$$
$$f'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a)^2 + \cdots \tag{2.4}$$

เมื่อแทน $x = a$ ในสมการ (2.1)-(2.4) จะได้

$$c_0 = f(a), \quad c_1 = f'(a), \quad c_2 = \frac{f''(a)}{2!} \quad \text{และ} \quad c_3 = \frac{f''(a)}{3!}$$

โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ $c_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ เมื่อ $n = 0, 1, 2, 3, ...$

บทนิยาม 2.4.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีอนุพันธ์ทุกอันดับ และ f มีค่าที่จุด a อนุกรมกำลังที่เขียนในรูป

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

หรือ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

เรียกว่า **อนุกรมเทย์เลอร์** (Taylor series) ของ f รอบจุด a
ในกรณีที่ $a = 0$ จะเรียกว่า **อนุกรมแมคลอริน** (Maclaurin series) นั่นคือ

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

ตัวอย่าง 2.4.2 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของ $f(x) = \dfrac{1}{x}$ รอบจุด 1

ทฤษฎีบท 2.4.3 ให้ $T_n(x)$ เป็นพหุนามเทย์เลอร์ดีกรี n ของ f รอบจุด a

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

สำหรับ $|x-a| < R$ เมื่อ R คือรัศมีแห่งการลู่เข้าของอนุกรม $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$ จะได้ว่า

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{n\to\infty} |R_n(x)| = 0$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน

1. $f(x) = e^x$

2. $f(x) = \sin x$

ตัวอย่าง 2.4.5 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน

1. $f(x) = \ell\text{n}(x+1)$

2. $f(x) = \text{arctan}x$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x+1}$ รอบจุด 3

ตัวอย่าง 2.4.7 จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชัน $f(x) = (x+1)^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad R = 1$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad R = \infty$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad R = 1$$

$$\ell\mathrm{n}(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \qquad R = 1$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \cdots \qquad R = 1$$

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชัน $f(x) = x\ell\mathrm{n}x$ รอบจุด 1

ตัวอย่าง 2.4.9 จงหาฟังก์ชันผลบวกของอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n!}$

ตัวอย่าง 2.4.10 จงใช้อนุกรมแมคลอรินของ e^x หาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงหาอนุกรมเทย์เลอร์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ รอบจุด a

   1.1 $f(x) = \ell\text{n}(1-x)$; $a = 0$

   1.2 $f(x) = \cos x$; $a = \pi$

   1.3 $f(x) = \sqrt{x}$; $a = 1$

   1.4 $f(x) = \sqrt[3]{x}$; $a = 1$

   1.5 $f(x) = \sqrt[3]{x+2}$; $a = -1$

   1.6 $f(x) = \dfrac{1}{3-x}$; $a = 2$

   1.7 $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$; $a = 0$

2. จงหาอนุกรมแมคลอรินของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้ตารางอนุกรมเทย์เลอร์

   2.1 $f(x) = \sin(x^2)$

   2.2 $f(x) = x^2\cos x$

   2.3 $f(x) = x\ell\text{n}(x-1)$

   2.4 $f(x) = \sin^2 x$

   2.5 $f(x) = e^x + e^{2x}$

   2.6 $f(x) = x\cos(\frac{1}{2}x)$

   2.7 $f(x) = x^2\ell\text{n}(1+x^3)$

   2.8 $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

3. จงฟังก์ชันผลบวกของอนุกรมต่อไปนี้

   3.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{4n+3}}{(2n)!}$

   3.2 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{n!}$

4. จงใช้อนุกรมแมคลอรินหาค่าลิมิตของ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x - \ell\text{n}(1+x)}{x^2}$

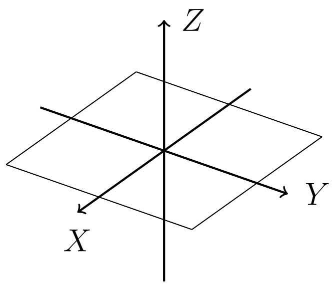
บทที่ 3

ปริภูมิสามมิติ

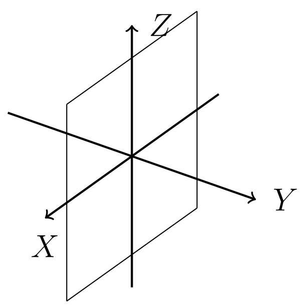
3.1 ระบบพิกัดฉากในปริภูมิสามมิติ

การบอกตำแหน่งของจุดใน **ปริภูมิสามมิติ** (three-dimensional space) ทำได้จากการอ้างอิงเส้นตรงสามเส้นคือ แกน X แกน Y และแกน Z ซึ่งตัดการที่จุด O เรียกว่า **จุดกำเนิด** (origin) และเรียก

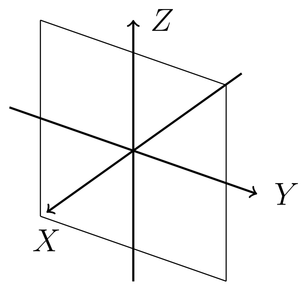
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY (XY-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ (XZ-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ (YZ-plane)



ระนาบ XY

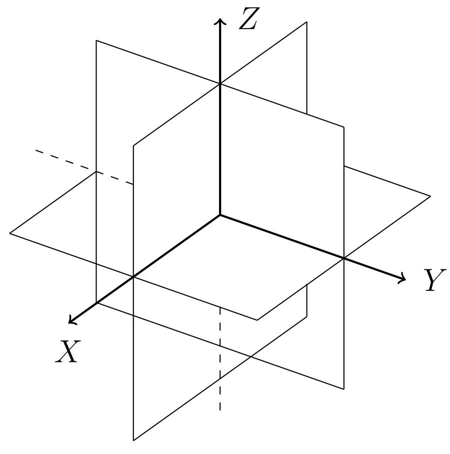


ระนาบ XZ

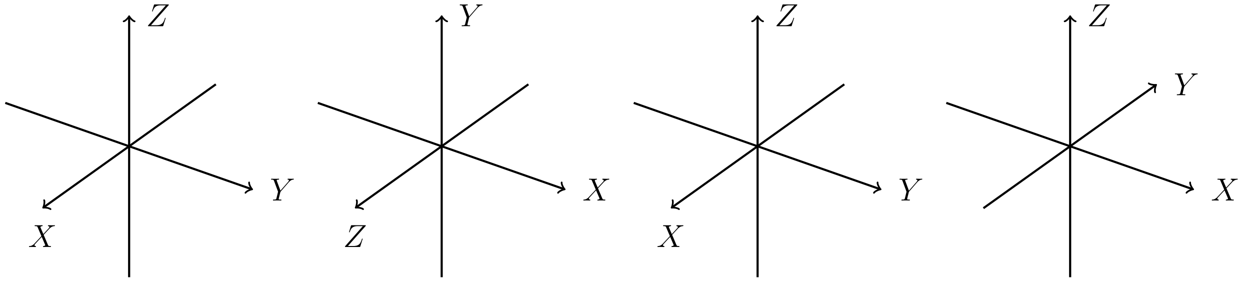


ระนาบ YZ

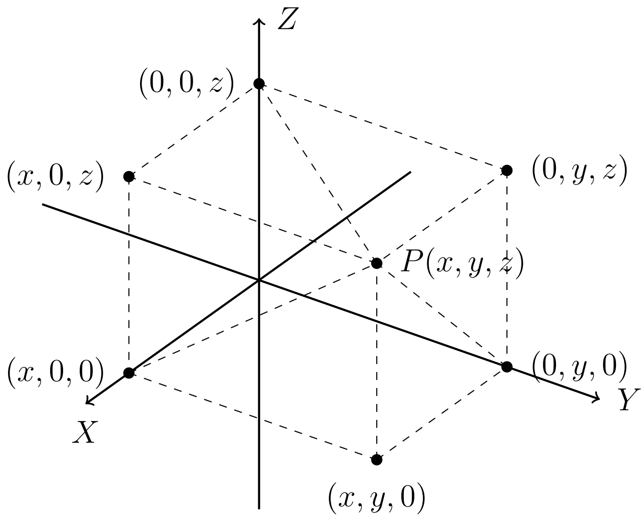
ระนาบพิกัดฉากทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วนเรียกว่า **อัฐภาค** (Octance)



การเลือกทิศทางที่เป็นบวกของพิกัดฉาก เรานิยมใช้กฎมือขวาโดยให้นิ้วหัวแม่มือไปทางแกน Z บวก นิ้วชี้ ไปทางแกน X บวก และนิ้วกลาง ชี้ไปทางแกน Y บวก ตั้งฉากกันเสมอ ตัวอย่างดังรูปต่อไปนี้ เราจะเลือกใช้แบบใดแบบหนึ่งตามความเหมาะสม



การบอกตำแหน่งของจุด P ในปริภูมิสามมิติ มีแกนพิกัดเป็นที่อ้างอิงบอกได้โดยใช้จำนวนจริง (x, y, z) เรียกว่าพิกัดฉากของจุด P และใช้ $\mathbb{R}^3$ แทนเซตของจุด (x, y, z) ในปริภูมิสามมิติ



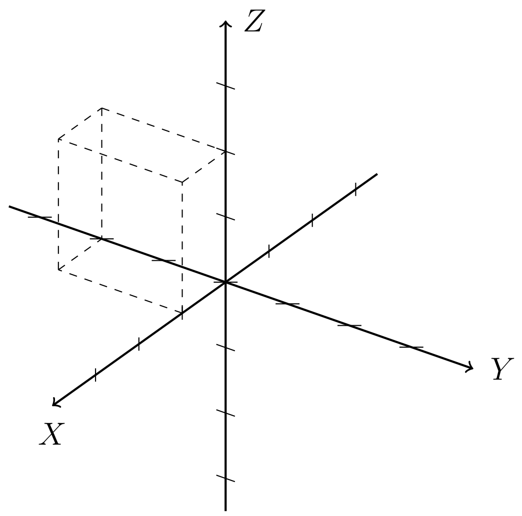
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XY ไปยังแกน Z จะได้จุด $(0, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า **ภาพฉาย** (projection) ของ P แกน Z
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ YZ ไปยังแกน X จะได้จุด $(x, 0, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน X
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานระนาบ XZ ไปยังแกน Y จะได้จุด $(0, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P แกน Y
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Z ไปที่ระนาบ XY จะได้จุด $(x, y, 0)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XY
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน X ไปที่ระนาบ YZ จะได้จุด $(0, y, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ YZ
จากจุด $P(x, y, x)$ ลากขนานแกน Y ไปที่ระนาบ XZ จะได้จุด $(x, 0, z)$
เรียกจุดนี้ว่า ภาพฉายของ P บนระนาบ XZ

ตัวอย่าง 3.1.1 จงหาภาพฉายทั้งหมดของจุด $P(1,2,3)$

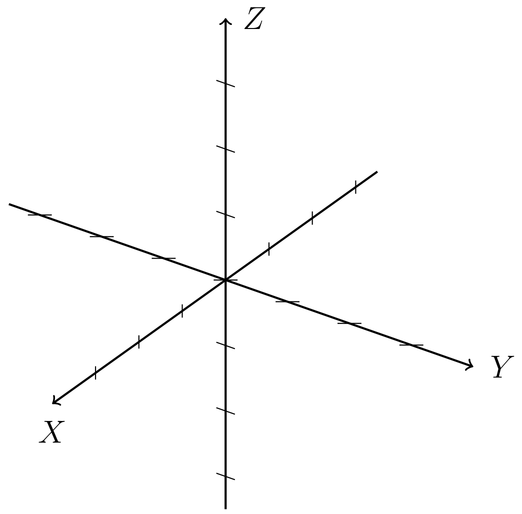
1. ภาพฉายบนระนาบ XY ของจุด P คือ
2. ภาพฉายบนระนาบ XZ ของจุด P คือ
3. ภาพฉายบนระนาบ YZ ของจุด P คือ
4. ภาพฉายบนแกน X ของจุด P คือ
5. ภาพฉายบนแกน Y ของจุด P คือ
6. ภาพฉายบนแกน Z ของจุด P คือ

ตัวอย่าง 3.1.2 จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

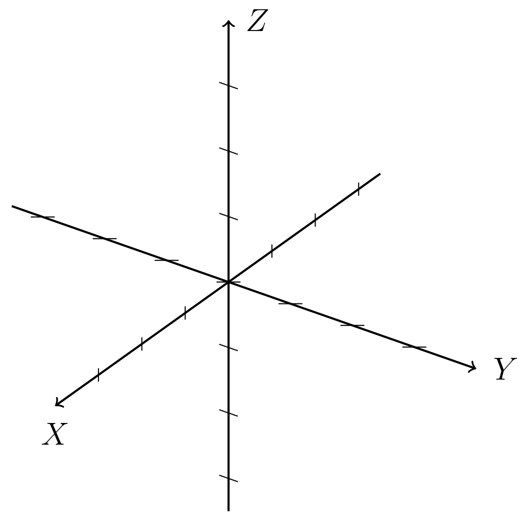
1. $P(1,-2,2)$



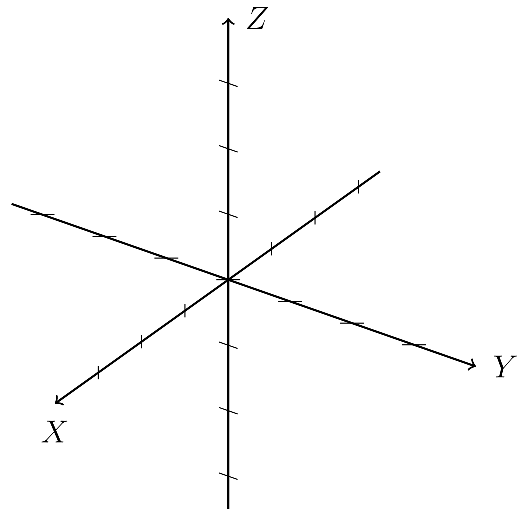
2. $Q(0,2,1)$



3. $R(1,2,2)$



4. $S(3,1,2)$



แบบฝึกหัด 3.1

1. จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

1.1 $A(5,0,0)$	1.5 $E(1,1,3)$
1.2 $B(0,2,1)$	1.6 $F(-4,2,-3)$
1.3 $C(3,1,0)$	1.7 $G(2,1,-2)$
1.4 $D(-3,0,2)$	1.8 $H(3,-2,6)$

2. จงหาภาพฉายของจุด P บนระนาบ XY, XZ และ YZ

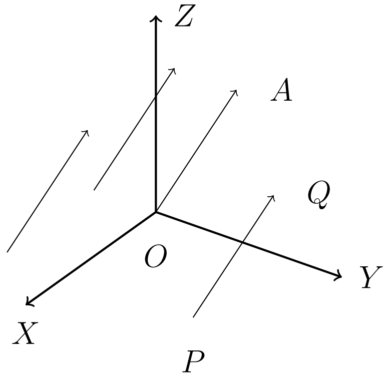
2.1 $P(3,1,2)$	2.3 $P(4,-1,0)$
2.2 $P(1,2,-2)$	2.4 $P(-8,9,7)$

3. จงหาภาพฉายของจุด P บนแกน X, Y และ Z

3.1 $A(5,0,0)$	3.3 $C(3,1,0)$
3.2 $B(0,2,1)$	3.4 $D(-3,0,2)$

3.2 เวกเตอร์ในปริภูมิสามมิติ

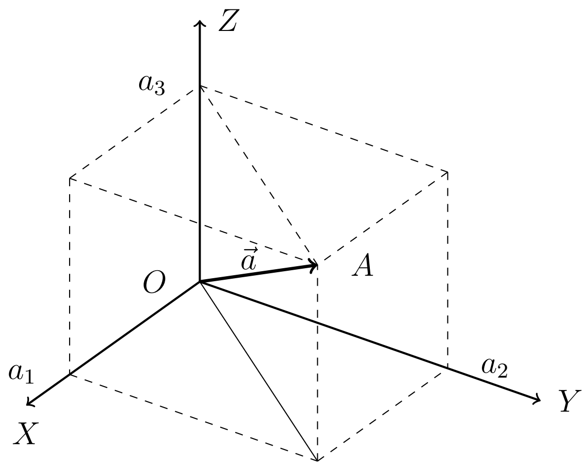
เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยทั่วไปใช้ส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงกันระหว่างจุดสองจุดและมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ และความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์ ใช้สัญญาลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด P สิ้นสุดที่จุด Q มีทิศทางจาก P ไป Q และใช้ $\|\overrightarrow{PQ}\|$ แทนความยาวหรือขนาด (length/magnitude/norm) ของ $\overrightarrow{PQ}$ และเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน



บทนิยาม 3.2.1 กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$
แล้ว $\vec{a}$ เป็น**เวกเตอร์ตำแหน่ง** (position vector) ของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

ถ้า $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1$ และ $a_3 = z_2 - z_1$ ดังนั้น $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ เรียก a_1, a_2 และ a_3 ว่า**ส่วนประกอบ** (component) ของ $\vec{a}$ ตามแกน X แกน Y และ แกน Z ตามลำดับ



จากรูปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

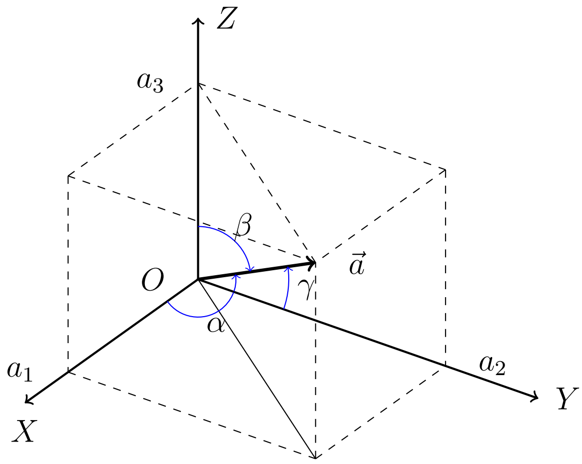
$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

บทนิยาม 3.2.2 เวกเตอร์ที่มีตัวประกอบทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

ข้อตกลง เมื่อ P เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ O เป็นจุดกำเนิด เราจะเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ แทนด้วย $\vec{P}$

มุมแสดงทิศทาง

บทนิยาม 3.2.3 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม α, β, γ กับแกน X แกน Y และแกน Z ด้านบวกตามลำดับโดยที่ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เรียก α, β, γ ว่า**มุมแสดงทิศทาง** (direction angles) ของ $\vec{a}$ และ cosα, cosβ, cosγ ว่า**โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\vec{a}$



จากรูปจะได้ว่า $\quad \cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|} \quad \cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|} \quad \cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของ $\overrightarrow{PQ}$ ขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์นั้น

1. $P(1, 2, -3)$ และ $Q(-1, 0 - 4)$
2. $P(4, -1, 2)$ และ $Q(5, -2, 3)$

ตัวอย่าง 3.2.5 จงหามุมแสดงทิศทางของเวกเตอร์ $\vec{a} = \langle -1, 1, \sqrt{2} \rangle$

บทนิยาม 3.2.6 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $k \in \mathbb{R}$

1. $\vec{a} = \vec{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$
3. $k\vec{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3 \rangle$
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

ตัวอย่าง 3.2.7 ให้ $\vec{a} = \langle 1, -2, 5\rangle$ และ $\vec{b} = \langle -1, -4, 7\rangle$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{a} + \vec{b}$

2. $2\vec{a} + 3\vec{b}$

3. $3\vec{a} - 2\vec{b}$

ทฤษฎีบท 3.2.8 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $c, k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
4. $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$
5. $(ck)\vec{a} = c(k\vec{a}) = k(c\vec{a})$
6. $c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$
7. $(c + k)\vec{a} = c\vec{a} + k\vec{a}$
8. $1\vec{a} = \vec{a}$
9. $0\vec{a} = \vec{0}$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วย

บทนิยาม 3.2.9 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^3$ และจะได้ว่า

$\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศเดีย**วกับ $\vec{a}$

$-\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศตรงข้าม**กับ $\vec{a}$

ตัวอย่าง 3.2.10 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\langle 1, -2, 2\rangle$

2. $\langle 1, 1, \sqrt{2}\rangle$

3. $\langle 3\sin\theta, 4\sin\theta, 5\cos\theta\rangle$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X แกน Y และ แกน Z คือ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ตามลำดับ

$$\vec{i} = \langle 1, 0, 0\rangle \qquad \vec{j} = \langle 0, 1, 0\rangle \qquad \vec{k} = \langle 0, 0, 1\rangle$$

ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ แล้วจะได้ว่า

$$\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1, 0, 0\rangle + a_2\langle 0, 1, 0\rangle + a_3\langle 0, 0, 1\rangle = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 3.2.11 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$
ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \cdot \vec{b}$ นิยามโดย

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

ตัวอย่าง 3.2.12 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, 6, -3 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 2, 1, -7 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 4, 6, 2 \rangle$

3. $\vec{a} = \langle a, 1, -a \rangle$ และ $\vec{b} = \langle a, a, a+1 \rangle$

4. $\vec{a} = \langle 2\sin x, \cos x, 1 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle \sin x, 2\cos x, 1 \rangle$

ทฤษฎีบท 3.2.13 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

ตัวอย่าง 3.2.14 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} = \vec{0}$

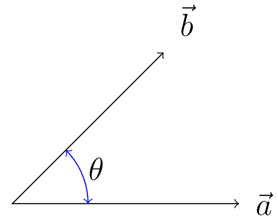
2. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

มุมระหว่างเวกเตอร์

ทฤษฎีบท 3.2.15 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ ดังรูป



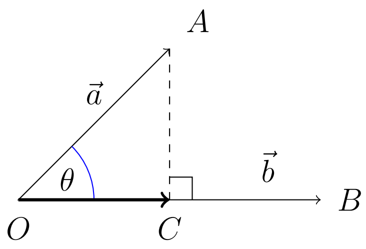
ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ตั้งฉากกัน** (orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ หรือ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

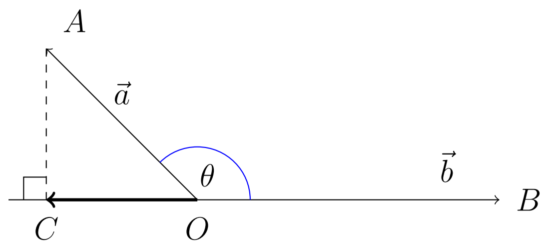
ตัวอย่าง 3.2.16 ให้ $A(1, 2, 0)$, $B(0, 4, 2)$ และ $C(3, 2, -2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหามุม $B\hat{A}C$

ตัวอย่าง 3.2.17 ให้ $\vec{a} = \langle 3, 2, -1\rangle$, $\vec{b} = \langle 1, -1, 1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 3, 4, -2\rangle$ จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดตั้งฉากกัน

ภาพฉายเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.18 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$, $\vec{b} \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ลากเส้นตรงจาก A ไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด C ดังรูป





เรียก $\overrightarrow{OC}$ ว่า **ภาพฉายเวกเตอร์** (vector projection) ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$
เขียนแทนด้วย $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$

เรียก $\|\vec{a}\|\cos\theta$ ว่า **ภาพฉายสเกลาร์** (scalar projection/component) ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$
เขียนแทนด้วย $\text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a}$

ทฤษฎีบท 3.2.19 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ แล้วจะได้ว่า

$$\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b} \qquad \text{และ} \qquad \text{Comp}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

ตัวอย่าง 3.2.20 จงหาภาพฉายเวกเตอร์และภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, -2 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, 4 \rangle$

ผลคูณเชิงเวกเตอร์

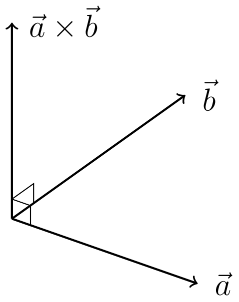
บทนิยาม 3.2.21 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product/cross product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \times \vec{b}$ คือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle$$

หรือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $|M|$ แทนดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ M



ตัวอย่าง 3.2.22 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, -1\rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 2, 1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -3, 1, -1\rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \times \vec{b}$

2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c})$

3. $\vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b})$

ทฤษฎีบท 3.2.23 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

ตัวอย่าง 3.2.24 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a} = \langle 1, -3, 4 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 2, 2, 1 \rangle$

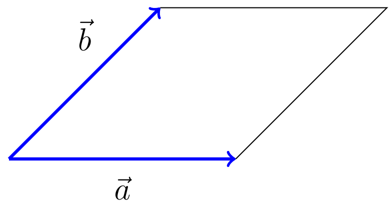
พื้นที่สี่เหลี่ยมด้านขนาน

ทฤษฎีบท 3.2.25 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ แล้ว

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\sin\theta$$

ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ขนานกัน** (paralell) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $\theta = 0$ หรือ π

ทฤษฎีบท 3.2.26 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้วพื้นที่**สี่เหลี่ยมด้านขนาน** (parallelogram) ที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$



ตัวอย่าง 3.2.27 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(2,1,1)$, $B(-1,3,1)$ และ $C(0,2,-3)$

ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์

บทนิยาม 3.2.28 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว**ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์** (scalar triple products) ของ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ คือ $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ หรือ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ นั้นคือ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

โดยสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์จะได้ว่า $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$

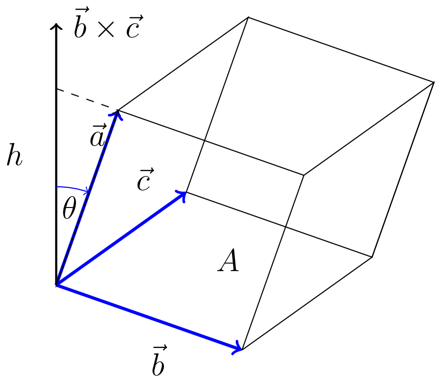
ตัวอย่าง 3.2.29 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 1\rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 1, 2\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 0, 1\rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$

2. $\vec{c} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c}$

ทฤษฎีบท 3.2.30 ปริมาตรของ**รูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน** (parallepiped) ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เท่ากับ $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$



จากรูป $V = Ah = \|\vec{b} \times \vec{c}\|\|\vec{a}\||\cos\theta| = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$

ตัวอย่าง 3.2.31 จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\langle 1, 1, -1\rangle$, $\langle 2, 1, 0\rangle$ และ $\langle 0, 1, 3\rangle$

ตัวอย่าง 3.2.32 จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 4, -7\rangle$, $\langle 2, -1, 4\rangle$ และ $\langle 0, -9, 18\rangle$ อยู่บน**ระนาบเดียวกัน** (coplanar)

แบบฝึกหัด 3.2

1. กำหนดให้ $\vec{a}=\langle 1,2,0\rangle$, $\vec{b}=\langle 1,-1,2\rangle$, $\vec{c}=\langle 1,0,3\rangle$ และ $\vec{d}=\langle -2,1,5\rangle$ จงหา

    1.1 $2\vec{a}-3\vec{b}$

    1.2 $\|\vec{c}+2\vec{d}\|+\|2\vec{a}+\vec{b}\|$

    1.3 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $2\vec{c}-\vec{d}$

    1.4 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{b}+\vec{c}$

    1.5 มุมระหว่าง $\vec{a}+\vec{c}$ กับ $\vec{a}-\vec{c}$

    1.6 $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})$

    1.7 ภาพฉายเวกเตอร์และภาพฉายสเกลาร์ของ $\vec{b}$ บน $\vec{c}$

    1.8 เวกเตอร์ 5 หน่วยที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{c}$

    1.9 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a}$ และ $\vec{d}$

2. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดต่อไปนี้ตั้งฉากกันบ้าง

$$\vec{a}=\langle 1,2,1\rangle,\ \vec{b}=\langle 1,-2,3\rangle,\ \vec{c}=\langle -3,3,1\rangle \text{ และ } \vec{d}=\langle -1,1,7\rangle$$

3. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-3,1,2)$, $(-5,1,0)$ และ $(4,-2,1)$

4. กำหนดให้ $A(1,1,2)$, $B(2,0,3)$, $C(3,0,0)$ และ $D(2,1,-1)$ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

5. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}=\langle 2,1,-3\rangle$, $\vec{b}=\langle 4,-1,0\rangle$ และ $\vec{c}=\langle -1,4,-1\rangle$

6. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$ ที่ทำให้ $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$

7. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1,5,-2\rangle$, $\langle 3,-1,0\rangle$ และ $\langle 5,9,-4\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

8. ให้ $\vec{a},\vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

    8.1 $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})$

    8.2 ถ้า $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ แล้ว $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$

    8.3 $(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+\vec{b})=2(\vec{a}\times\vec{b})$

    8.4 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$

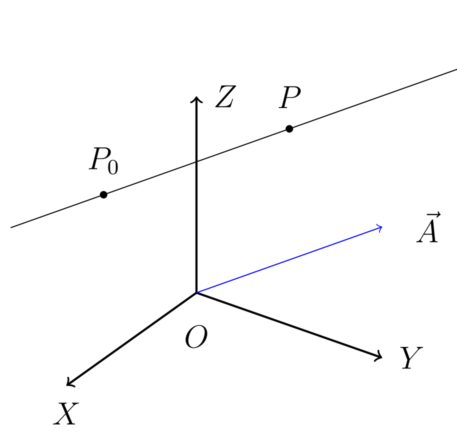
    8.5 $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})+\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{a})+\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{0}$

    8.6 $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c}\\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d}\end{vmatrix}$

3.3 เส้นตรงในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.3.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{A} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เราจะเรียก

เซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ว่า **เส้นตรง** (Line) ที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$ และเรียก $\vec{A}$ ว่า **เวกเตอร์แสดงทิศทาง** (direction vector) ของเส้นตรง



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ขนานกับ $\vec{A}$ ดังนั้นจะได้ว่ามี $t \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้

$$\overrightarrow{P_0P} = t\vec{A} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{P} = \vec{P_0} + t\vec{A} \tag{3.1}$$

ถ้ากำหนดจุด $P(x, y, z)$ และ $P_0(x_0, y_0, z_0)$ และ $\vec{A} = \langle a, b, c\rangle$ ดังนั้น

$$\langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t\langle a, b, c\rangle = \langle x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct\rangle \tag{3.2}$$

เรียกสมการ (3.1) หรือ (3.2) ว่า **สมการเวกเตอร์** (vector equation) ของเส้นตรง L
จากสมการ (3.2) เราจะแยกเขียนสมการสำหรับส่วนประกอบได้เป็น

$$x = x_0 + at, \qquad y = y_0 + bt, \qquad z = z_0 + ct \tag{3.3}$$

เรียกสมการ (3.3) ว่า **สมการอ้างอิงตัวแปรเสริม** (parametric equation) ของเส้นตรง L
ถ้า a, b, c ไม่มีจำนวนใดเป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \tag{3.4}$$

เรียกสมการ (3.4) ว่า **สมการสมมาตร** (symmetric equation) ของเส้นตรง L

ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และขนานกับ $\vec{A} = \langle 1, 2, -1\rangle$

ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด $P_1(1,3,4)$ และ $P_2(1,-2,3)$

การตรวจสอบว่าจุด $P(x,y,z)$ อยู่บนเส้นตรง L หรือไม่ทำได้โดยการแทนค่า x,y,z ลงในสมการเส้นตรง L ว่าสอดคล้องกับสมการของเส้นตรง L หรือไม่

ตัวอย่าง 3.3.4 จงตรวจสอบว่าจุด $P(1,-2,3)$ อยู่บนเส้นตรงต่อไปนี้หรือไม่

1. $x = 3-t, \quad y = 2-4t, \quad z = 3+t$
2. $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y+5}{3} = z-2$

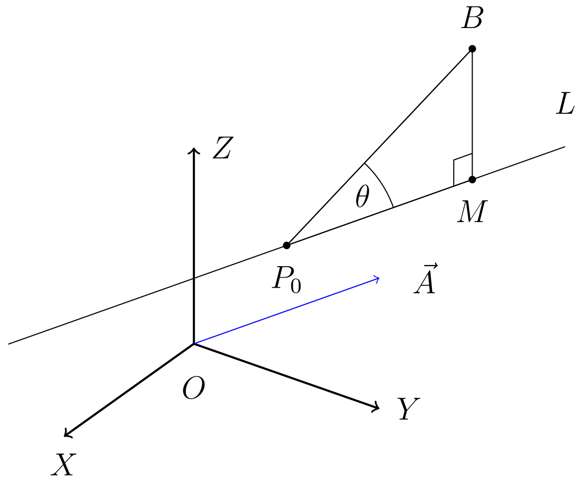
ตัวอย่าง 3.3.5 จุด $A(1,2,0)$, $B(-1,3,4)$ และ $C(-2,1,5)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาจุดที่เส้นตรงต่อไปนี้ตัดระนาบ XY ระนาบ XZ และ ระนาบ YZ

1. $x = 1+t, \quad y = 2-2t, \quad z = t-3$
2. $\dfrac{1-x}{3} = \dfrac{y-10}{5}, z = 4$

ระยะทางระหว่างจุดกับเส้นตรง

การวัดระยะทางระหว่างจุด B กับเส้นตรง L คือความยาวที่สั้นที่สุดจากจุด B ไปยังเส้นตรง L หมายถึงความยาวของเส้นตั้งฉากที่ลากจากจุด B ไปยังเส้นตรง L ที่จุด M เรียกจุด M ว่า **จุดเชิงเส้นตั้งฉาก** (Orthogonal point)



จากรูปจะได้ว่า $\|\overrightarrow{BM}\| = \|\overrightarrow{P_0B}\|\text{sin}\theta$ เนื่องจาก $\vec{A}$ ขนานกับ $\overrightarrow{P_0M}$ ดังนั้น θ เป็นมุมระหว่าง $\overrightarrow{PB}$ กับ $\vec{A}$ ดังนั้น

$$\|\overrightarrow{BM}\| = \frac{\|\overrightarrow{P_0B}\|\|\vec{A}\|\text{sin}\theta}{\|\vec{A}\|} = \frac{\|\overrightarrow{P_0B} \times \vec{A}\|}{\|\vec{A}\|}$$

ต่อไปเราจะหาจุด M เนื่องจาก M อยู่บนเส้นตรง L ดังนั้นมี $t \in \mathbb{R}$ ที่ทำให้ $\vec{M} = \vec{P_0} + t\vec{A}$ เนื่องจาก $\overrightarrow{BM}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}$ ดังนั้น

$$0 = \overrightarrow{BM} \cdot \vec{A} = (\vec{M} - \vec{B}) \cdot \vec{A} = (\vec{P_0} + t\vec{A} - \vec{B}) \cdot \vec{A} = (\vec{P_0} - \vec{B}) \cdot \vec{A} + t\|\vec{A}\|^2$$

แล้วจะได้ว่า

$$t = \frac{(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP_0}) \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}$$

ดังนั้น

$$\vec{M} = \vec{P_0} + \frac{(\vec{B} - \vec{P_0}) \cdot \vec{A}}{\|\vec{A}\|^2}\vec{A}$$

ตัวอย่าง 3.3.7 จงหาจุดเชิงเส้นตั้งฉากของจุด $B(2, 1, -1)$ บนเส้นตรง

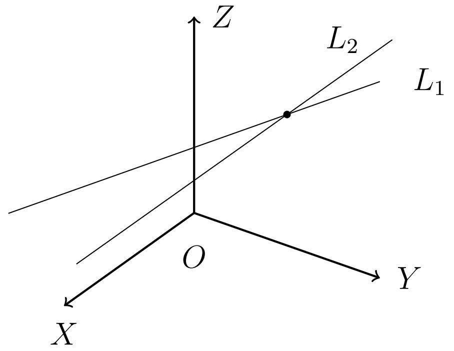
$$x = 5 + 4t,\ y = 2 - t,\ z = 4 + 3t$$

พร้อมทั้งหาระยะทางจากจุด B ไปยังเส้นตรงนี้

การตัดกันของเส้นตรง

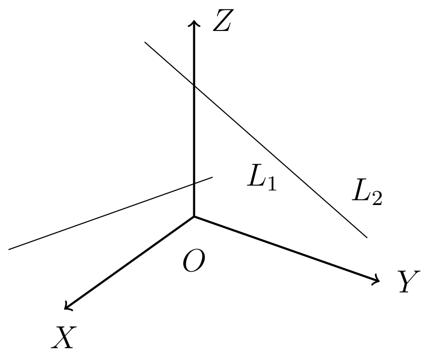
ความสัมพันธ์ของเส้นตรง L_1 และ L_2 ในปริภูมิสามมิติมีลักษณะดังนี้

1. ตัดกัน

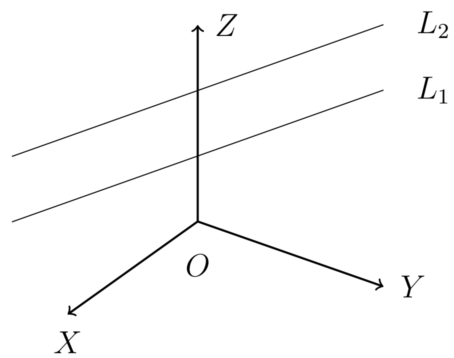


2. ไม่ตัดกัน

2.1 ไม่ตัดกัน และไม่ขนานกัน



2.2 ไม่ตัดกัน และขนานกัน



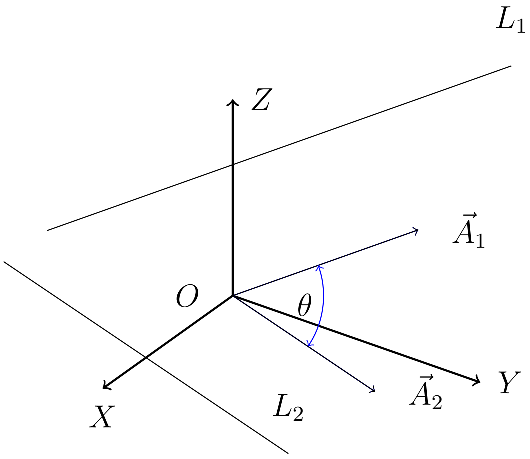
ตัวอย่าง 3.3.8 จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด

1. $L_1 : x = 2 + t, \quad y = 4 - t, \quad z = 3 + 2t$
   $L_2 : x = 1 - s, \quad y = 9 + 3s, \quad z = 2 + s$

2. $L_1 : 2 - x = 3 - y = \dfrac{z-1}{2}$
   $L_2 : \dfrac{7-x}{3} = y = z - 1$

มุมระหว่างเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.9 มุมระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือมุมระหว่างเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นนั้น



$$\cos\theta = \frac{\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2}{\|\vec{A}_1\|\|\vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.10 จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2

1. $L_1 : x = 2+t, \quad y = 1+2t, \quad 2z = 1+4t$
   $L_2 : x = -3s, \quad y = 2+4s, \quad z = 5s-1$

2. $L_1 : 2x-1 = y = \dfrac{1-z}{3}$
   $L_2 : \dfrac{x}{4} = y-1 = z$

ตัวอย่าง 3.3.11 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $B(1,-1,2)$ ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง

$$x-1 = \frac{3-y}{2} = -z$$

การขนานกันของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.12 เส้นตรงสองเส้นขนานกัน (parallel line) ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรงทั้งสองเส้นขนานกัน

ตัวอย่าง 3.3.13 จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และขนานกับเส้นตรง

$$x + 2 = \frac{4 - y}{2} = 1 - z$$

การไขว้ต่างระนาบของเส้นตรง

บทนิยาม 3.3.14 เราจะเรียกเส้นตรงสองเส้นว่า **เส้นไขว้ต่างระนาบ** (skew line) ก็ต่อเมื่อเราไม่สามารถหาระนาบที่เส้นตรงทั้งสองอยู่บนระนาบเดียวกันได้ หรือกล่าวได้อีกอย่างว่าเส้นตรงทั้งสองไม่ตัดกันไม่ไม่ขนานกัน

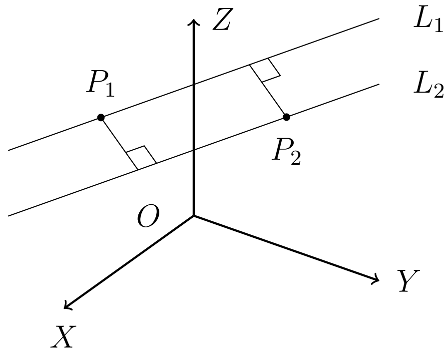
ตัวอย่าง 3.3.15 จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

1. $L_1 : 2x = 1 + t, \quad y = 2 - t, \quad 3z = t$
   $L_2 : x = 2 - 3s, \quad y = 6s, \quad z = 1 - 2s$
2. $L_1 : x = \dfrac{y}{2} = z - 1$
   $L_2 : \dfrac{x+1}{2} = y - 1 = \dfrac{z+2}{3}$

ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น

บทนิยาม 3.3.16 ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้น คือระยะที่สั้นที่สุดระหว่างเส้นตรงทั้งสอง

1. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน



ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน

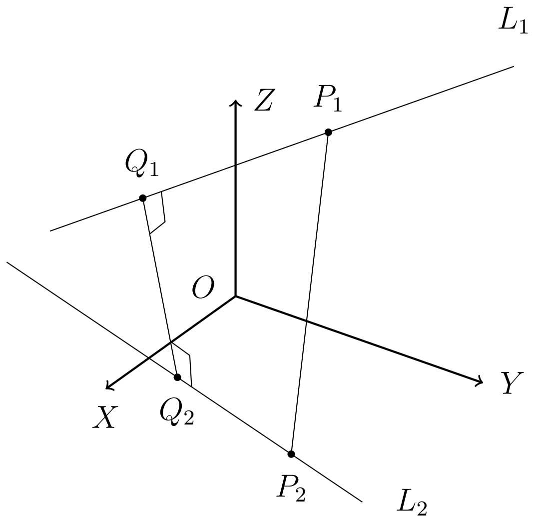
ให้ L_1 และ L_2 เป็นเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน ซึ่งผ่านจุด P_1 และ P_2 ตามลำดับ ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 คือ ระยะทางระหว่างจุด P_1 ไปยัง L_2 หรือ P_2 ไปยัง L_1 นั่นคือ

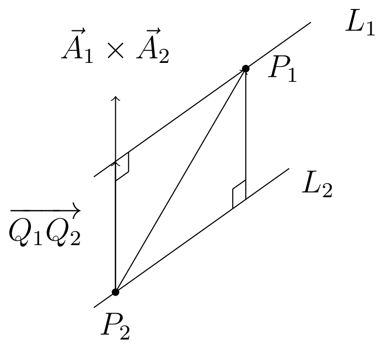
$$\text{ระยะทางระหว่าง } L_1 \text{ และ } L_2 \quad \text{เท่ากับ} \quad \frac{\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \vec{A}_1\|}{\|\vec{A}_1\|} \quad \text{หรือ} \quad \frac{\|\overrightarrow{P_2P_1} \times \vec{A}_2\|}{\|\vec{A}_2\|}$$

ตัวอย่าง 3.3.17 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : x = 1 + t, y = 2 - 2t, z = -1 + 2t \qquad \text{และ} \qquad L_2 : x = 2 - s, y = 1 + 2s, z = -2s$$

2. ระยะทางระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ไม่ขนานกัน





จากรูป Q_1 และ Q_2 เป็นจุดปลายของส่วนเส้นตรงที่ตั้งฉากกับ L_1 และ L_2 ดังนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ $\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\|$

เนื่องจาก $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ตั้งฉากกับ $\vec{A}_1$ และ $\vec{A}_2$ จะได้ว่า $\overrightarrow{Q_1Q_2}$ ขนานกับ $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$ จากรูปจะได้ว่า

$\|\overrightarrow{Q_1Q_2}\| =$ ขนาดของภาพฉายสเกลาร์ของ $\overrightarrow{P_2P_1}$ บน $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2$

ดังนั้น

ระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 เท่ากับ $\dfrac{|\overrightarrow{P_2P_1} \cdot (\vec{A}_1 \times \vec{A}_2)|}{\|\vec{A}_1 \times \vec{A}_2\|}$

ตัวอย่าง 3.3.18 จงหาระยะทางระหว่างเส้นตรง

$$L_1 : \frac{x-1}{2} = -y = -\frac{z}{2} \qquad \text{และ} \qquad L_2 : x = -3t, y = 1 + 2t, z = t$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_0 และขนานกับ $\vec{A}$

   1.1 $P_0(2,1,1)$ และ $\vec{A} = \langle 1,-1,3\rangle$

   1.2 $P_0(-1,3,5)$ และ $\vec{A} = \langle 0,2,-1\rangle$

2. จงหาสมการเวกเตอร์ สมการอิงตัวแปรเสริม และสมการสมมาตร ของเส้นตรงที่ผ่านจุด P_1 และ P_2

   2.1 $P_1(1,-1,0)$ และ $P_2(2,-3,5)$

   2.2 $P_1(-1,-3,-2)$ และ $P_2(-5,0,1)$

3. จงตรวจสอบว่าจุด $(1,2,-3)$ อยู่บนเส้นตรงใดต่อไปนี้หรือไม่

   3.1 $x = 3-2t, \quad y = 3+t, \quad z = 1-4t$

   3.2 $2x = 3+2t, \quad y = 1-2t, \quad 3z = 4t-7$

   3.3 $2x-1 = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z}{3}$

   3.4 $\dfrac{x+7}{4} = 4-y = \dfrac{z+9}{3}$

4. จงพิจารณาว่าจุด $A(3,3,1)$, $B(-1,5,-7)$ และ $C(5,2,5)$ อยู่บนเส้นตรงเดียวกันหรือไม่

5. จงหาระยะทางจากจุด $B(1,-2,1)$ ไปยังเส้นตรงต่อไปนี้

   5.1 $x = 6+4t, \quad y = 3-2t, \quad z = 1+t$

   5.2 $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{1-y}{3} = \dfrac{z+1}{4}$

6. จงหาพิกัดของจุดบนเส้นตรงต่อไปนี้ ที่อยู่ใกล้จุดกำเนิดมากที่สุด

   6.1 $x = 9+4t, \quad y = t, \quad z = 3+2t$

   6.2 $\dfrac{8-x}{6} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+7}{8}$

7. จงตรวจสอบว่า L_1 และ L_2 ตัดกันหรือไม่ ถ้าตัดจงหาจุดตัด

   7.1 $L_1 : x = 2+t, \quad y = -1+3t, \quad z = 2-3t$
   $L_2 : x = 4+s, \quad y = 5+3s, \quad z = s$

   7.2 $L_1 : \dfrac{x-1}{2} = 2-y = z$
   $L_2 : \dfrac{2x+1}{3} = y = z-2$

8. จงหามุมระหว่างเส้นตรง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

   8.1 $L_1 : x = 2+t, \quad y = 1-t, \quad z = 5+t$
   $L_2 : x = 2+s, \quad y = 5-2s, \quad z = 1-3s$

   8.2 $L_1 : 1-x = y = \dfrac{z+3}{\sqrt{2}}$
   $L_2 : \dfrac{x}{\sqrt{2}} = \dfrac{y-3}{\sqrt{2}} = \dfrac{z+1}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุดกำเนิด ซึ่งตัดและตั้งฉากกับเส้นตรง $x = \dfrac{3-y}{2} = z - 2$

10. จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านจุด $(-1, 2, 1)$ และขนานกับเส้นตรง $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{1-y}{5} = 2 - z$

11. จงพิจารณา L_1 และ L_2 ว่าเป็นเส้นไขว้ต่างระนาบกันหรือไม่

    11.1 $L_1 : 2x = 1 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad z = t$
    $L_2 : x = -4s, \quad y = 1 + 2s, \quad 3z = 1 - 6s$

    11.2 $L_1 : x - 1 = \dfrac{3-y}{2} = 2z + 1$
    $L_2 : 2 - x = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{1-4z}{2}$

12. จงระยะทางระหว่าง L_1 และ L_2 ในแต่ละข้อต่อไปนี้

    12.1 $L_1 : x = 7t, \quad y = 2 + t, \quad z = 4 - 3t$
    $L_2 : x = 3 - s, \quad y = 5, \quad z = 6 + 2s$

    12.2 $L_1 : x + 5 = \dfrac{y+3}{4} = \dfrac{6-z}{9}$
    $L_2 : 2 - x = \dfrac{4-y}{4} = \dfrac{z+1}{-9}$

    12.3 $L_1 : x = 5 + 4t, \quad y = 2 - t, \quad z = 4 + 3t$
    $L_2 : x = 2 - 8s, \quad y = 1 + 2s, \quad z = -1 - 6s$

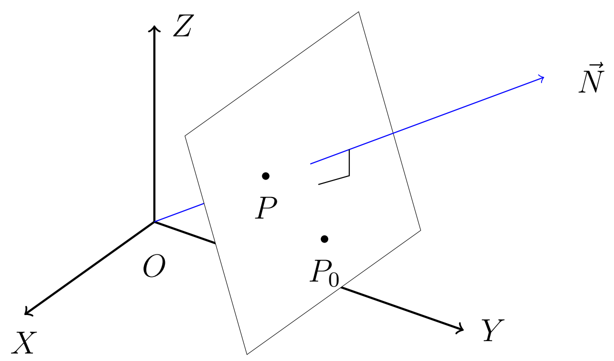
    12.4 $L_1 : x + 1 = \dfrac{z+1}{2}, y = 2$
    $L_2 : x = 2 - t, \quad y = 3 + 4t, \quad z = 2t$

3.4 ระนาบในปริภูมิสามมิติ

บทนิยาม 3.4.1 ให้ P_0 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ $\vec{N} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ เราจะเรียก

เซตของจุด P ใด ๆ ซึ่งทำให้ $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ว่า **ระนาบ** (plane)
ที่ผ่านจุด P_0 และตั้งฉากกับเวกเตอร์ $\vec{N}$

และเรียก $\vec{N}$ ว่า **เวกเตอร์แนวฉาก** (normal vector)



เนื่องจาก $\overrightarrow{P_0P}$ ตั้งฉากกับ $\vec{N}$ ดังนั้น $\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{N} = 0$ หรือ

$$(\vec{P} - \vec{P}_0) \cdot \vec{N} = 0 \tag{3.5}$$

เราจะเรียกสมการ (3.5) ว่า **สมการเวกเตอร์ของระนาบ** (vector equation of the plane)

ถ้ากำหนดให้ $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$, $P = (x, y, z)$ และ $\vec{N} = \langle a, b, c \rangle$ จะได้ว่า

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \tag{3.6}$$

เรียกสมการ (3.6) ว่า **สมการสเกลาร์** (scalar equation) ของระนาบที่ผ่านจุด (x_0, y_0, z_0) และมี $\langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ถ้าเราจัดรูปสมการ (3.6) โดยกำหนดให้ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ จะได้ว่า

$$ax + by + cz = d \tag{3.7}$$

เรียกสมการ (3.7) ว่า **สมการคาร์ทีเซียน** (cartesian equation) ของระนาบ ที่มี $\langle a, b, c \rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาสมการเวกเตอร์ สมการสเกลาร์ และสมการคาร์ทีเซียนของระนาบที่ผ่านจุด $P_0(1, 2, 3)$ และตั้งฉากกับ $\vec{N} = \langle 1, -1, 4 \rangle$

ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $P(1,2,3)$, $Q(3,-1,6)$ และ $R(5,1,0)$

ตัวอย่าง 3.4.4 จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

1. $x = 2$
2. $y = 1$
3. $z = 3$
4. $x + y = 1$

ตัวอย่าง 3.4.5 จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

1. $x + y - z = 2$
2. $2x + 3y + 4z = 12$

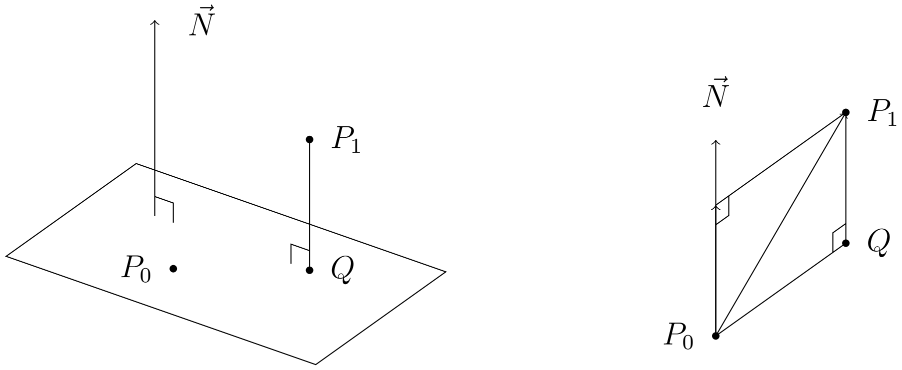
ตัวอย่าง 3.4.6 จงตรวจสอบว่า $P(1, 2, -1)$ และ $Q(2, 3, 1)$ อยู่บนระนาบ $x - 2y - 4z = 1$ หรือไม่

ตัวอย่าง 3.4.7 จงตรวจสอบว่า $P(1, 2, -1)$, $Q(2, 0, 3)$, $R(3, 4, 1)$ และ $S(-2, 1, 2)$ อยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.8 ระยะทางระหว่างจุดกับระนาบ คือระยะทางตั้งฉากจากจุดนั้นไปยังระนาบ

ให้ระนาบ M มีสมการเวกเตอร์เป็น $(\vec{P} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N} = 0$ และ P_1 เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ ลากไปตั้งฉากกับระนาบ M ที่จุด Q ดังรูป



จากรูปจะได้ว่า $\|\overrightarrow{QP_1}\| =$ ขนาดของภาพฉายของ $\overrightarrow{P_0P_1}$ บน $\vec{N}$ จะได้ว่า

$$\|\overrightarrow{QP_1}\| = \frac{|\overrightarrow{P_0P_1} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|(\vec{P_1} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

กำหนดให้ระนาบ M ผ่านจุด $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ และมี $\vec{N} = \langle a, b, c\rangle$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก M จะมีสมการคาร์ทีเซียนเป็น $ax + by + cz = d$ เมื่อ $d = ax_0 + by_0 + cz_0$ แล้ว

$$\begin{aligned}\|\overrightarrow{QP_1}\| &= \frac{|(\vec{P_1} - \vec{P_0}) \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|} = \frac{|\langle x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0\rangle \cdot \langle a, b, c\rangle|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - (ax_0 + by_0 + cz_0)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}\end{aligned}$$

ดังนั้นระยะทางระหว่างจุด $P_1(x_1, y_1, z_1)$ กับระนาบ $ax + by + cz = d$ คือ

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

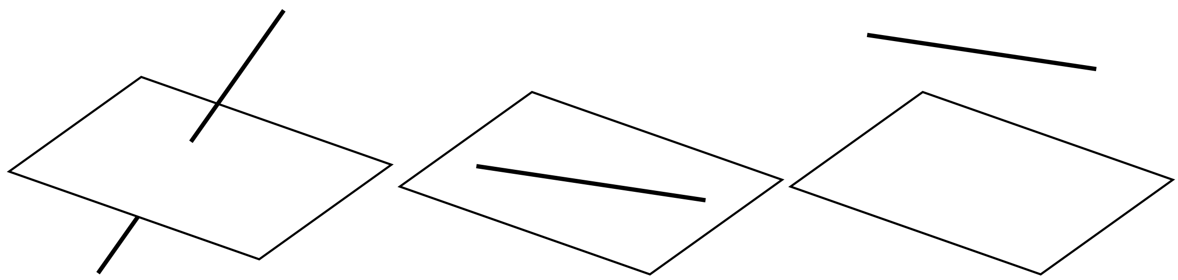
ตัวอย่าง 3.4.9 จงหาระยะทางระหว่างจุด $P_1(4, 3, -1)$ กับระนาบ $x - 2y + 2z = 5$

ตัวอย่าง 3.4.10 จงหาจุดบนระราบ $2x + y - 3z + 10 = 0$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $P_1(4, 2, 2)$

เส้นตรงกับระนาบ

เส้นตรงกับระนาบมีความสัมพันธ์กัน 3 ลักษณะคือ

1. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันจุดเดียว เรียกว่าเส้นตรงตัดกับระนาบ
2. เส้นตรงกับระนาบมีจุดร่วมกันมากกว่าหนึ่งจุด นั้นคือเส้นต้องอยู่บนระนาบ
3. เส้นตรงกับระนาบมีไม่มีจุดร่วม นั้นคือเส้นตรงขนานกับระรนาบ



ตัวอย่าง 3.4.11 จงพิจารณาว่าเส้นตรงกับระนาบต่อไปนี้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัด ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่

1. $x = 1 + 2t, y = 2 + t, z = 3 - 3t$ และ $x + 4y + 2z = 5$

2. $x-1=\dfrac{y+3}{2}=z$ และ $2x-y+z=7$

ตัวอย่าง 3.4.12 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านเส้นตรง $L:\ x=y-1=\dfrac{z}{2}$ และผ่านจุด $Q(1,3,-1)$

ตัวอย่าง 3.4.13 จงหาสมการของระนาบที่ขนานกับเส้นตรง

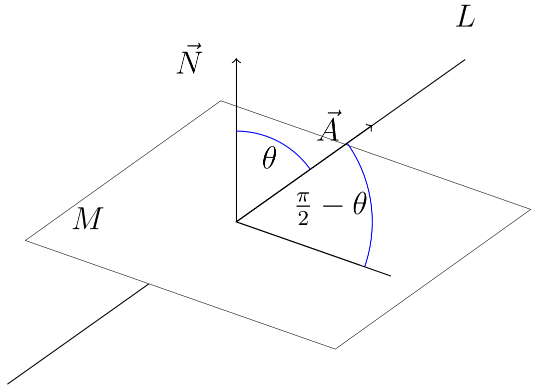
$$L_1:\ x-1=\frac{y}{2}=z \text{ และ } L_2:\ \frac{x}{2}=y=\frac{z}{3}$$

และผ่านจุด $Q(2,-3,1)$

มุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

บทนิยาม 3.4.14 ถ้าเวกเตอร์แสดงทิศทางของ L ทำมุม θ กับเวกเตอร์แนวฉากของระนาบ M เราจะกล่าวว่า

$$\text{มุมระหว่างเส้นตรง } L \text{ กับระนาบ } M \text{ คือ } \left|\frac{\pi}{2}-\theta\right|$$



ตัวอย่าง 3.4.15 จงหามุมระว่างเส้นตรง $L: \dfrac{x}{5}=\dfrac{1-y}{2}=\dfrac{z}{5}$ กับระนาบ $2x+y-7z=1$

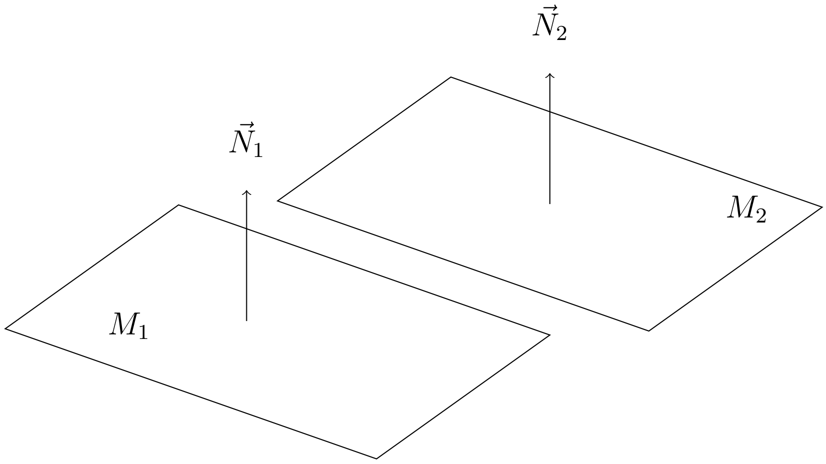
ตัวอย่าง 3.4.16 จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด $Q(3,-6,3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง

$$\vec{P}=\langle 2,0,1\rangle+t\langle 3,-1,1\rangle$$

ตัวอย่าง 3.4.17 จงระยะทางระหว่างเส้นตรง $\dfrac{x-1}{2}=y=\dfrac{z+2}{3}$ กับระนาบ $x+y-z=9$

การขนานกันของระนาบ

ระนาบขนานกัน ก็ต่อเมื่อเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกัน



ตัวอย่าง 3.4.18 จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, -3)$ และขนานกับระนาบ $x + 2y - z = 5$

บทนิยาม 3.4.19 ระยะทางระหว่างระนาบทั้งสอง คือระยะฉากระหว่างระนาบทั้งสอง

ให้ M_1 และ M_2 เป็นระนาบที่ขนานกันมีสมการดังนี้ $ax + by + cz = d_1$ และ $ax + by + cz = d_2$ ตามลำดับ ให้ $P_1(x_1, y_1, z_1)$ เป็นจุดบนระนาบ M_1 ดังนั้น

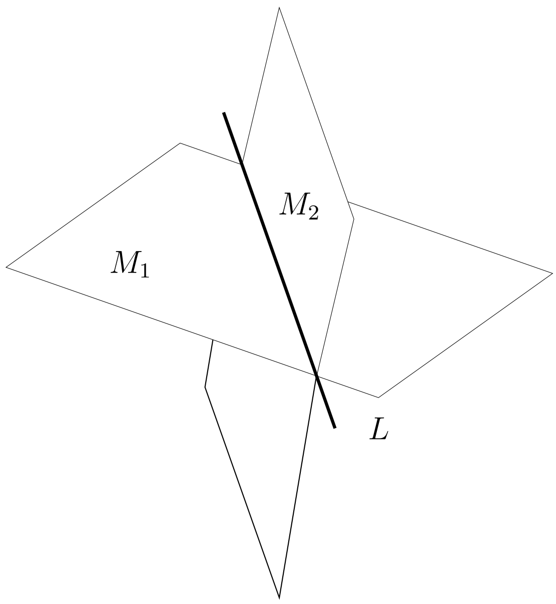
$$\begin{aligned} \text{ระยะทางระหว่างระนาบ } M_1 \text{ และ } M_2 &= \text{ ระยะทางระหว่างจุด } P_1 \text{ กับระนาบ } M_2 \\ &= \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.4.20 จงหาระยะทางระหว่างระนาบ $x + 2y - 2z = 10$ และ $x + 2y - 2z = 1$

ตัวอย่าง 3.4.21 จงหาสมการระนาบที่ขนานกับระนาบ $x + y - \sqrt{2}z = 1$ และระยะทางระหว่างระนาบทั้งสองเท่ากับ 5 หน่วย

การตัดกันของระนาบ

ระนาบที่ตัดกันคือระนาบที่ไม่ขนานกัน (พิจารณาจากเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสองขนานกันหรือไม่) รอยตัดที่เกิดย่อมเป็นเส้นตรง



จากรูปเนื่องจากเส้นตรง L อยู่บนระนาบ M_1 และ M_2 ดังนั้นเวกเตอร์แสดงทิศทางของเส้นตรง L ต้องตั้งฉากกับ $\vec{N}_1$ และ $\vec{N}_2$ ดังนั้น $\vec{A} = \vec{N}_1 \times \vec{N}_2$

ตัวอย่าง 3.4.22 จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ

$$2x - y + z = 1 \quad \text{และ} \quad x + y - 2z = 5$$

มุมระหว่างระนาบ

บทนิยาม 3.4.23 มุมระหว่างระนาบสองระนาบ คือมุมระหว่างเวกเตอร์แนวฉากของระนาบทั้งสอง

ตัวอย่าง 3.4.24 จงหามุมระหว่างระนาบ $2x + y + 2z = 1$ กับ $5x - 3y + 4z = 5$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุด P_0 และมี $\vec{N}$ เป็นเวกเตอร์แนวฉาก

   1.1 $P_0(2,1,1)$ และ $\vec{N} = \langle 2,-1,5\rangle$

   1.2 $P_0(-1,0,5)$ และ $\vec{N} = \langle 3,2,1\rangle$

   1.3 $P_0(1,3,-3)$ และ $\vec{N} = \langle 0,3,-2\rangle$

   1.4 $P_0(2,6,-4)$ และ $\vec{N} = \langle -1,-3,1\rangle$

2. จงหาสมการของระนาบที่ผ่านจุดทั้ง 3 จุด

   2.1 $(1,-1,0)$, $(0,-1,2)$ และ $(-1,-3,5)$

   2.2 $(-1,-3,-2)$, $(2,5,0)$ และ $(1,-2,1)$

3. จงเขียนกราฟของระนาบต่อไปนี้

   3.1 $x = z$

   3.2 $3x + y = 2$

   3.3 $x - y + z = 2$

   3.4 $2x - y + z = 5$

   3.5 $5x + 2y - 3z = 15$

   3.6 $3x + 3y + 2z = 6$

4. จงพิจารณาว่าจุดทั้ง 4 จุดอยู่บนระนาบเดียวกันหรือไม่

   4.1 $(1,1,1)$, $(-2,4,1)$, $(3,1,2)$ และ $(5,1,3)$

   4.2 $(1,2,7)$, $(-1,1,2)$, $(2,0,7)$ และ $(1,1,2)$

5. จงหาระยะทางระหว่างจุดกับระนาบที่กำหนดให้ต่อไปนี้

   5.1 $(1,-2,3)$ กับ $3x + 2y - z = 12$

   5.2 $(-1,1,-2)$ กับ $3x + 4y - 5z = 15$

6. จงหาจุดบนระราบ $x - 2y + 3z = 4$ ซึ่งอยู่ใกล้ที่สุดกับจุด $(2,3,-2)$

7. พิจารณาเส้นตรง L กับระนาบ M ที่กำหนดให้ตัดกันหรือขนานกัน ถ้าตัดกันจงหาจุดตัดและมุมระหว่างเส้นตรงกับระนาบ ถ้าขนานกันจงพิจารณาว่าเส้นตรงอยู่บนระนาบหรือไม่ และจงหาระยะทางระหว่างเส้นตรงกับระนาบ

   7.1 $L: \dfrac{x}{6} = y = \dfrac{1-z}{2}$
   $M: x - 2y + 2z = 4$

   7.2 $L: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{2} = z$
   $M: 5x + 4y - 3z = 15$

   7.3 $L: x = 3 + t, y = -1 + 3t, z = 1 + 2t$
   $M: 2x - y + 3z = 5$

   7.4 $L: 1 - x = \dfrac{y}{2} = z - 2$
   $M: 3x + y + z = 3$

8. จงหาสมการระนาบที่นสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   8.1 ผ่านจุด $(1,0,2)$ และเส้นตรง $\dfrac{x}{3} = y + 1 = \dfrac{2-z}{2}$

   8.2 ผ่านเส้นตรง $\dfrac{x-2}{2} = y + 1 = -z$ และ $\dfrac{1-x}{2} = -y = z + 1$

   8.3 ผ่านจุด $(2,1,-3)$ และขนานกับเส้นตรง $\dfrac{x}{2} = y = \dfrac{z}{3}$ และ $x - 1 = y + 1 = \dfrac{z}{2}$

8.4 ผ่านเส้นตรง $x = 3 + 2t, y = -t, z = 2t$ และ $x - 2 = \dfrac{-1-y}{2} = -3 - z$

8.5 ผ่านจุด $(2, -1, 0)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{3} = z$

8.6 ผ่านจุด $(1, 2, 3)$ และ $(2, 0, 2)$ และขนานกับเส้นตรง $x = y - 1 = \dfrac{z}{2}$

9. จงหาสมการเส้นตรงที่เกิดจากการตัดกันของระนาบ M_1 และ M_2

9.1 $M_1 : x + y + z = 2$
$M_2 : 2x - y + z = 3$

9.2 $M_1 : x + y + 3z = 5$
$M_2 : x - 5y + z = 1$

10. จงหามุมระหว่างระนาบ M_1 และ M_2

10.1 $M_1 : 2x - 5y + 5z = 2$
$M_2 : 1x - 2y + 7z = 1$

10.2 $M_1 : x + y + z = 3$
$M_2 : x - y - z = 4$

11. จงหาสมการระนาบที่ผ่านจุด $(1, 2, 3)$, $(2, 0, 1)$ และตั้งฉากกับระนาบ $x + y - z = 1$

3.5 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.1 กำหนดให้ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง I แล้ว
$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ เป็น**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** (vector value function) จาก I ไป $\mathbb{R}^2$
$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็น**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** จาก I ไป $\mathbb{R}^3$

ในหัวข้อนี้ถ้ากล่าวถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ให้หมายถึงฟังก์ชันค่าเวกเตอร์จาก I ไป $\mathbb{R}^2$ หรือจาก I ไป $\mathbb{R}^3$

ตัวอย่าง 3.5.2 ให้ $\vec{F}(t) = \langle t, t^2 \rangle$, $0 \le t \le 2$ และ $\vec{G}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, t \rangle$, $0 \le t \le \pi$ จงหา

1. $\vec{F}(1)$
2. $\vec{G}\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$

บทนิยาม 3.5.3 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ u เป็นฟังก์ชันจาก I ไป $\mathbb{R}$ และ $t \in I$ แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$
2. $(u\vec{G})(t) = u(t)\vec{F}(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

ลิมิตของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.4 ให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ ลิมิตของ $\vec{F}(t)$ เมื่อ t เข้าใกล้ t_0 เขียนแทนด้วย $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t)$ แล้ว

$$\lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \text{ มีค่า} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{t \to t_0} x(t),\ \lim_{t \to t_0} y(t) \text{ และ } \lim_{t \to t_0} z(t) \text{ มีค่า}$$

และจะได้ว่า $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \left\langle \lim\limits_{t \to t_0} x(t), \lim\limits_{t \to t_0} y(t), \lim\limits_{t \to t_0} z(t) \right\rangle$

ตัวอย่าง 3.5.5 จงหาค่าของ $\lim\limits_{t \to 1} \left\langle t^2 + 1, \text{cos}\pi t, \dfrac{t^2 - 1}{t - 1} \right\rangle$

บทนิยาม 3.5.6 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

$$\vec{F} \text{ มีความต่อเนื่อง } t = t_0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \vec{F}(t_0) \text{ และ } \lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) \text{ มีค่า และ } \lim_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{F}(t_0)$$

ถ้า $\vec{F}$ ต่อเนื่องทุกจุดบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า $\vec{F}$ มีความต่อเนื่องบนช่วง I

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.7 กำหนดให้ $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์และต่อเนื่องบนช่วง I และ $t_0 \in I$ ถ้า

$$\lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t_0+h)-\vec{F}(t_0)}{h} \quad \text{มีค่า}$$

จะเขียนแทนด้วย

$$\frac{d}{dt}\vec{F}(t)|_{t=t_0} = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t_0+h)-\vec{F}(t_0)}{h} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{F}'(t_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\vec{F}(t_0+h)-\vec{F}(t_0)}{h}$$

เรียกว่า **อนุพันธ์** (derivative) ของ $\vec{F}$ ที่จุด $t_0 \in I$

ทฤษฎีบท 3.5.8 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เมื่อ $t \in I$ และ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีอนุพันธ์บนช่วง I จะได้ว่า $\vec{F}$ มีอนุพันธ์ที่ t และ

$$\vec{F}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t)\rangle$$

ตัวอย่าง 3.5.9 จงหาอนุพันธ์ของ $\vec{F}(t) = \left\langle t^2+t-3, \text{cos}2t, e^t\text{sin}t\right\rangle$

ทฤษฎีบท 3.5.10 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง ถ้า $\vec{F}$, $\vec{G}$ และ u มีอนุพันธ์ที่ t แล้ว

1. $(\vec{F}+\vec{G})'(t) = \vec{F}'(t)+\vec{G}'(t)$
2. $(u\vec{G})'(t) = (u'\vec{F})(t)+(u\vec{F}')(t)$
3. $(\vec{F}\cdot\vec{G})'(t) = \vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)$
4. $(\vec{F}\times\vec{G})'(t) = \vec{F}'(t)\times\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\times\vec{G}'(t)$

ตัวอย่าง 3.5.11 กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, t, \text{sin}t\rangle$ และ $\vec{G} = \langle t^2, t, 1\rangle$ จงหา

1. $(\vec{F}\cdot\vec{G})'(t)$
2. $\vec{F}'(t)\cdot\vec{G}(t)+\vec{F}(t)\cdot\vec{G}'(t)$

อินทิกรัลของฟังก์ชันเวกเตอร์

บทนิยาม 3.5.12 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t)\rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนโดเมน $D \subset \mathbb{R}$ ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่ **อินทิเกรตได้** (integrable) บนช่วง $[a, b] \subset D$ และ

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = \left\langle \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right\rangle$$

ทฤษฎีบท 3.5.13 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ c_1, c_2 เป็นคค่าคงตัว และ u เป็นฟังก์ชันค่าจริง และ $\vec{C}$ เป็นเวกเตอร์คงตัว แล้ว

1. $\displaystyle\int_a^b (c_1\vec{F}(t) + c_2\vec{G})dt = c_1\int_a^b \vec{F}(t)dt + c_2\int_a^b \vec{G}(t)dt$

2. $\displaystyle\int_a^b \vec{F}(t)dt = \int_a^c \vec{F}(t)dt + \int_c^b \vec{F}(t)dt$ เมื่อ $a < c < b$

3. $\displaystyle\int_a^b (u\vec{C}(t)dt = \int_a^b u(t)dt\vec{C}$

4. $\displaystyle\int_a^b (\vec{C}\cdot\vec{F})(t)dt = \vec{C}\cdot\int_a^b \vec{F}(t)dt$ เมื่อ $\vec{C}\cdot\vec{F}$ อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 3.5.14 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t\rangle$ และ $\vec{C} = \langle 1, 2, 1\rangle$ จงหา $\displaystyle\int_1^2 \vec{C}\cdot\vec{F}(t)dt$

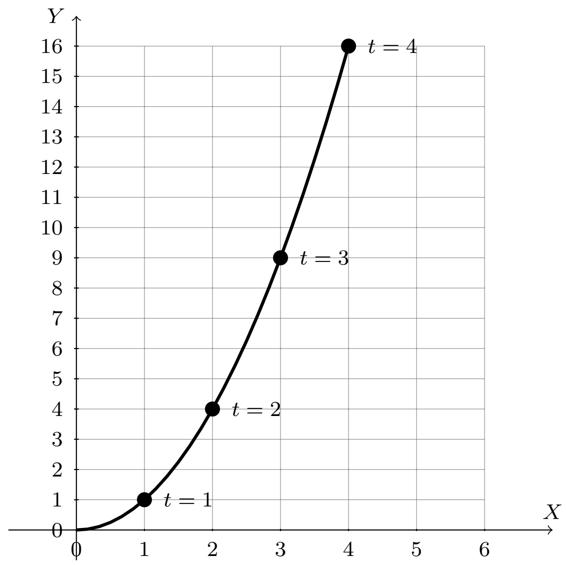
ตัวอย่าง 3.5.15 จงหา $\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\langle \text{cos}t, \text{sin}t, 1\rangle\| dt$

กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

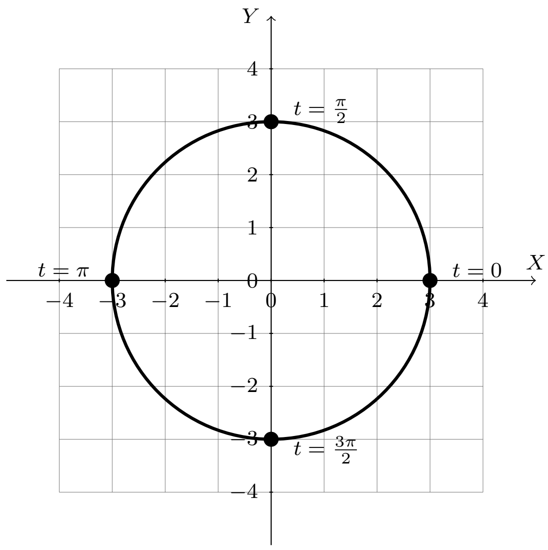
กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle$ เมื่อ $a \le x \le b$ คือ

$$\text{กราฟความสัมพันธ์ } \{(x(t), y(t)) : \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t)\rangle \text{ เมื่อ } a \le x \le b\}$$

$\vec{r}(t) = \langle t, t^2\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 4$

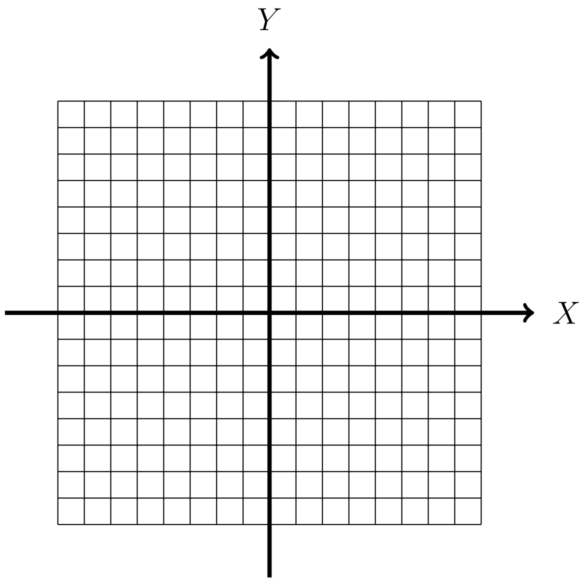


$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 3\cos t\rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$

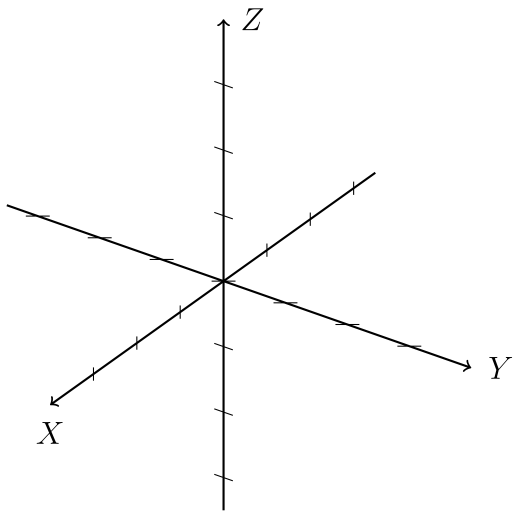


ตัวอย่าง 3.5.16 จงเขียนกราฟแสดงการเคลื่อนที่ต่อไปนี้ เมื่อ $0 \le t \le 4$

1. $\vec{r}(t) = \langle t, t+1\rangle$

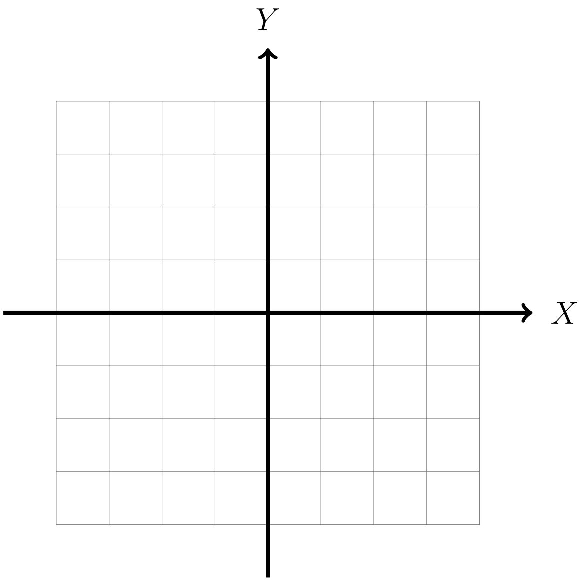


2. $\vec{r}(t) = \langle t, t+1, 3+2t\rangle$

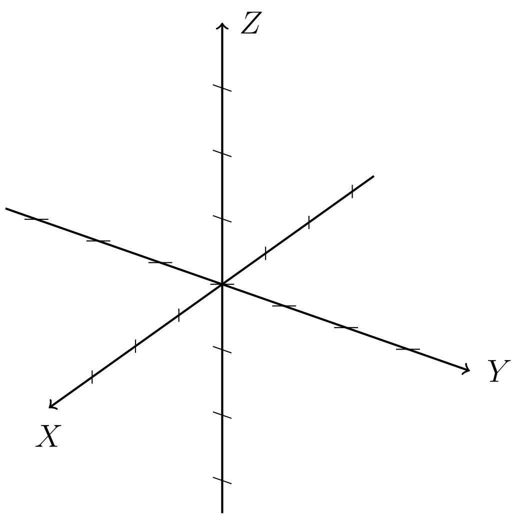


ตัวอย่าง 3.5.17 จงเขียนกราฟแสดงการเคลื่อนที่ต่อไปนี้ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

1. $\vec{r}(t) = \langle 3\text{cos}t, 2\text{sin}t \rangle$



2. $\vec{r}(t) = \left\langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, \dfrac{t}{2} \right\rangle$



เวกเตอร์ความเร็วและความเร่ง

กำหนดให้ $\vec{r}(t)$ เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่ แล้ว

เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{V}(t) = \vec{r}'(t)$ **อัตราเร็ว** $v(t) = \|\vec{V}(t)\| = \|\vec{r}'(t)\|$

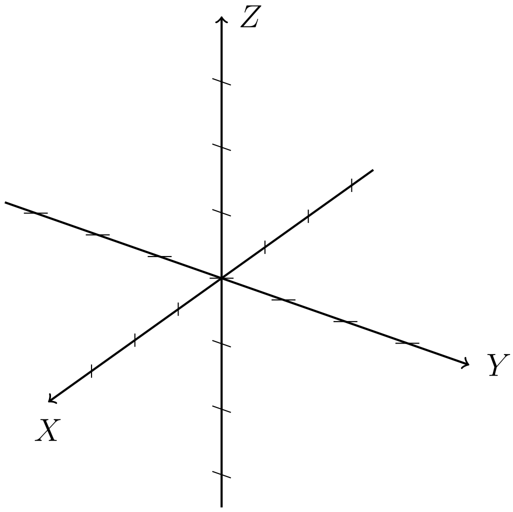
เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{A}(t) = \vec{V}'(t) = \vec{r}''(t)$ **อัตราเร่ง** $a(t) = \|\vec{A}(t)\| = \|\vec{V}'(t)\|$

ตัวอย่าง 3.5.18 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ จงหาตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อเวลา $t = 1$

ตัวอย่าง 3.5.19 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, t \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ จงหาตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อเวลา $t = \frac{\pi}{4}$

เวกเตอร์สัมผัส

ให้เส้นโค้งหนึ่งเป็นกราฟฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$



$\vec{r}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ในแนวสัมผัสของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{r}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์สัมผัสหน่วย** (unit tangent vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{T}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{T}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \|\vec{r}'(t)\| \neq 0$$

เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ และขนานกับ $\vec{T}(t)$ เรียก **เส้นสัมผัส** (tangent) ของเส้นโค้ง ณ จุด $\vec{r}(t)$
เนื่องจาก $\vec{T}'(t)$ เป็นเวกเตอร์ซึ่งตั้งฉากกับ $\vec{T}(t)$ ณ จุด $\vec{r}(t)$ เวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยและทิศเดียวกันกับ $\vec{T}'(t)$ เรียกว่า **เวกเตอร์แนวฉากหน่วย** (unit normal vector) เขียนแทนด้วย $\vec{N}(t)$ นั่นคือ

$$\vec{N}(t) = \frac{\vec{T}'(t)}{\|\vec{T}'(t)\|} \qquad \text{เมื่อ} \qquad \|\vec{T}'(t)\| \neq 0$$

ให้ $\vec{V}(t) = \vec{r}'(t)$ และ $v(t) = \|\vec{r}'(t)\|$ จาก $\vec{T}(t) = \dfrac{\vec{r}'(t)}{\|\vec{r}'(t)\|}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= v(t)\vec{T}(t) \\ \vec{V}'(t) &= v(t)\vec{T}'(t) + v'(t)\vec{T}(t) \\ \vec{A}(t) &= v(t)\vec{T}'(t) + v'(t)\vec{T}(t) \end{aligned}$$

จาก $\vec{T}'(t) = \|\vec{T}'(t)\|\vec{N}(t)$ ดังนั้น

$$\vec{A}(t) = v'(t)\vec{T}(t) + v(t)\|\vec{T}'(t)\|\vec{N}(t)$$

เรียก $v(t)$ ว่า **ส่วนประกอบแนวสัมผัส** ของ $\vec{A}(t)$
และ $\vec{v}(t)\|\vec{T}'(t)\|$ ว่า **ส่วนประกอบแนวฉาก** ของ $\vec{A}(t)$

ตัวอย่าง 3.5.20 ให้ $\vec{r}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ จงหา

1. เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{V}(t)$
2. เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{A}(t)$
3. มุมระหว่าง $\vec{V}(t)$ กับ $\vec{A}(t)$ เมื่อ เมื่อ $t = \pi$
4. เวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วย $\vec{T}(t)$ และเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วย $\vec{N}(t)$ เมื่อ $t = \pi$
5. ส่วนประกอบแนวสัมผัสและส่วนประกอบแนวฉากของ $\vec{A}(t)$ เมื่อ $t = \pi$

เวกเตอร์แนวฉากคู่

ให้เส้นโค้งหนึ่งเป็นกราฟฟังก์ชันเวกเตอร์ $\vec{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ เมื่อ $a \leq t \leq b$ และ $\vec{r}'(t)$ มีค่าทุกค่า $a \leq t \leq b$ ที่จุด $\vec{r}(t)$ ซึ่งมีเวกเตอร์สัมผัสหนึ่งหน่วยคือ $\vec{T}(t)$ และเวกเตอร์แนวฉากหนึ่งหน่วยคือ $\vec{N}(t)$ แล้ว **เวกเตอร์แนวฉากคู่** (binormal vector) ณ จุด $\vec{r}(t)$ เขียนแทนด้วย $\vec{B}(t)$ นิยามโดย

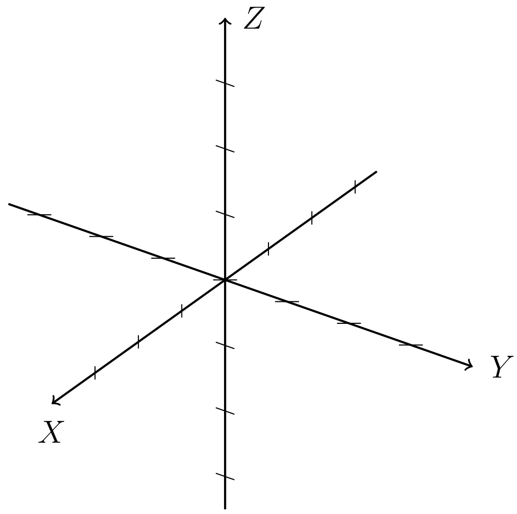
$$\vec{B}(t) = \vec{T}(t) \times \vec{N}(t)$$

เส้นตรงที่ผ่านจุด $\vec{r}(t)$ คือเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ ซึ่งขนานกับ $\vec{T}$, $\vec{N}$, $\vec{B}$ ตามลำดับ มี 3 ระนาบที่สำคัญคือ

1. ระนาบซึ่งผ่านเส้นสัมผัสและเส้นแนวฉาก ตั้งฉากกับ $\vec{B}$
   เรียกว่า**ระนาบสัมผัสประชิด**

2. ระนาบซึ่งผ่านเส้นแนวฉากและเส้นแนวฉากคู่ ตั้งฉากกับ $\vec{T}$
   เรียกว่า**ระนาบแนวฉาก**

3. ระนาบซึ่งผ่านเส้นแนวฉากคู่และเส้นสัมผัส ตั้งฉากกับ $\vec{N}$
   เรียกว่า**ระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับแนวฉากคู่**



ตัวอย่าง 3.5.21 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 2\text{cos}t, 2\text{sin}t, t\rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการของเส้นโค้ง จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งที่จุด $(-2, 0, \pi)$

ตัวอย่าง 3.5.22 ให้ $\vec{r}(t) = \langle 1 + \sin t, 1 - \cos t, 2\rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$ เป็นสมการสมการการเคลื่อนที่ จงหาสมการของ จงหาสมการของระนาบสัมผัสประชิด ระนาบแนวฉาก และระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับแนวฉากคู่ เมื่อเวลา $t = \pi$

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim_{t\to 1}\left\langle 2t+1, \dfrac{t-1}{1-\sqrt{t}}, t\text{sin}\pi t\right\rangle$

1.2 $\lim_{t\to 0}\left\langle 2-t^2, \text{tan}t, \dfrac{\text{sin}t}{t}\right\rangle$

1.3 $\lim_{t\to 0}\left\langle t^2+1, \dfrac{t^3-1}{t^2-1}, 1-2t\right\rangle$

1.4 $\lim_{t\to 0}\left\langle t\text{tan}t, 2t^3, \dfrac{1}{t-1}\right\rangle$

2. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle 1+t, 1+2t, 1+3t\rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t\rangle$ จงหา

2.1 $\vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

2.2 $(\vec{F}\cdot\vec{G})'(t)$

2.3 $(\vec{F}'\times\vec{G}')(t)$

2.4 $(\vec{F}\cdot\vec{G}')(t)$

3. จงหาค่าต่อไปนี้

3.1 $\int_1^3 \langle t, 2t+1, t^2\rangle\, dt$

3.2 $\int_0^\pi \langle t\text{sin}t, \text{cos}^2 t, t+1\rangle\, dt$

3.3 $\int_0^1 \langle 2\text{cos}t, 3\text{sin}t+1, \text{sec}^2 2t\rangle\, dt$

3.4 $\int_0^1 \left\langle e^t, \dfrac{1}{1-t}, \sqrt{2-t}\right\rangle dt$

4. จงเขียนกราฟแสดงการการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อไปนี้

4.1 $\vec{r}(t) = \langle t, \sqrt{t^2-1}\rangle$ เมื่อ $1\le t\le 3$

4.2 $\vec{r}(t) = \left\langle t+\dfrac{1}{t}, t-\dfrac{1}{t}\right\rangle$ เมื่อ $1\le t\le 4$

4.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+t, 2+t\rangle$ เมื่อ $0\le t\le 5$

4.4 $\vec{r}(t) = \langle \text{tan}^2 t, \text{sec}t\rangle$ เมื่อ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

4.5 $\vec{r}(t) = \langle 1, t, t^2\rangle$ เมื่อ $0\le t\le 2$

4.6 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, 4\rangle$ เมื่อ $0\le t\le \frac{\pi}{2}$

5. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ดังนี้ ขณะเวลาที่กำหนดให้

5.1 $\vec{r}(t) = \langle t, t^2+1\rangle$ เมื่อ $t=2$

5.2 $\vec{r}(t) = \left\langle t+\dfrac{1}{t}, t-\dfrac{1}{t}\right\rangle$ เมื่อ $t=1$

5.3 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}3t, \text{cos}2t\rangle$ เมื่อ $t=\frac{\pi}{4}$

5.4 $\vec{r}(t) = \langle \text{sin}^2 t, e^t\text{cos}t, t\rangle$ เมื่อ $t=0$

5.5 $\vec{r}(t) = \langle \ell\text{n}2t, e^{2t}, t\text{cos}t\rangle$ เมื่อ $t=1$

5.6 $\vec{r}(t) = \langle \text{tan}^2 t, \text{cos}t\text{sin}t, 2t\rangle$ เมื่อ $t=\frac{\pi}{3}$

6. จงหา เวกเตอร์สัมผัสหน่วย เวกเตอร์แนวฉากหน่วย เวกเตอร์แนวฉากคู่ ส่วนประกอบแนวสัมผัส และส่วนประกอบแนวฉาก ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

6.1 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 0 \rangle$ เมื่อ $t = \pi$

6.2 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$

6.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+t, 1-t, 1+t^2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$

6.4 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, \sin t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

6.5 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, \cos^2 t, t \rangle$ เมื่อ $t = \pi$

6.6 $\vec{r}(t) = \langle \sin t + \cos t, \sin t - \cos t, e^t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

7. จงหาสมการของเส้นสัมผัส เส้นแนวฉาก และเส้นแนวฉากคู่ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

7.1 $\vec{r}(t) = \langle \sin t \cos t, \sin t + \cos t, t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

7.2 $\vec{r}(t) = \langle \sin^2 t, \cos^2 t, t \rangle$ เมื่อ $t = \pi$

7.3 $\vec{r}(t) = \langle t, t, t^2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$

7.4 $\vec{r}(t) = \langle 1+t^2, 1-t^2, t-2 \rangle$ เมื่อ $t = 1$

7.5 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, 2\cos t, \sin t \rangle$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{2}$

8. จงหาสมการของระนาบสัมผัสประชิด ระนาบแนวฉาก และระนาบผ่านเส้นสัมผัสกับแนวฉากคู่ ของเส้นโค้งต่อไปนี้ที่จุดที่กำหนด

8.1 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, 2t \rangle$ เมื่อ $t = \pi$

8.2 $\vec{r}(t) = \langle e^t, e^t, e^{2t} \rangle$ เมื่อ $t = 0$

8.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+\sin^2 t, 1+\cos^2 t, \sin 2t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

8.4 $\vec{r}(t) = \langle 1, t, e^t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

8.5 $\vec{r}(t) = \langle \sin t, \cos t, e^t \rangle$ เมื่อ $t = 0$

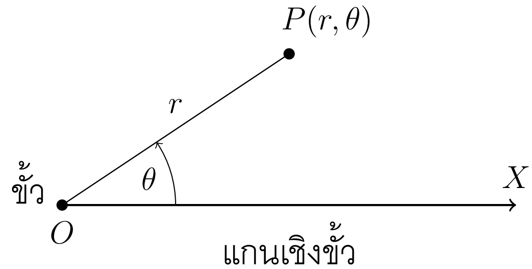
บทที่ 4

ระบบพิกัดเชิงขั้ว

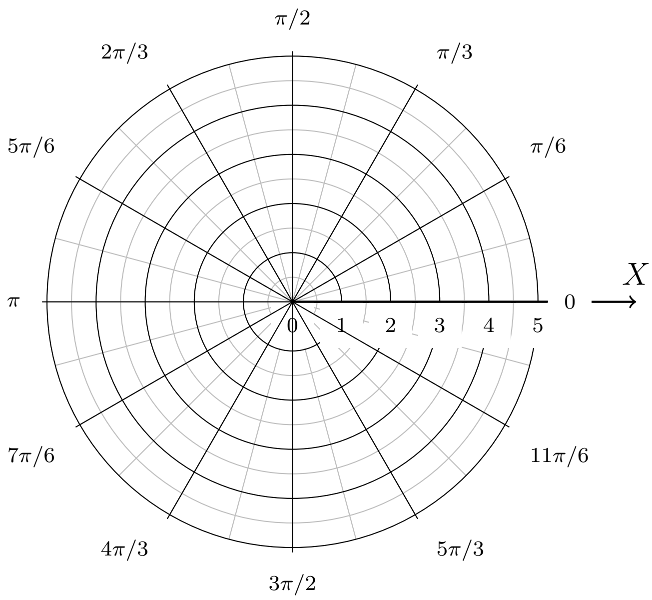
4.1 พิกัดเชิงขั้ว

บทนิยาม 4.1.1 ให้ P เป็นจุดใด ๆ ในระนาบ XY
ถ้า r เป็นระยะทางจาก O (จุดกำเนิด) ไปยังจุด P และส่วนของเส้นตรง OP ทำมุม θ กับแกน OX (วัดแบบทวนเข็มนาฬิกา)

เราจะเรียกจุด (r, θ) ว่า**พิกัดเชิงขั้ว** (polar coordinate) ของจุด P

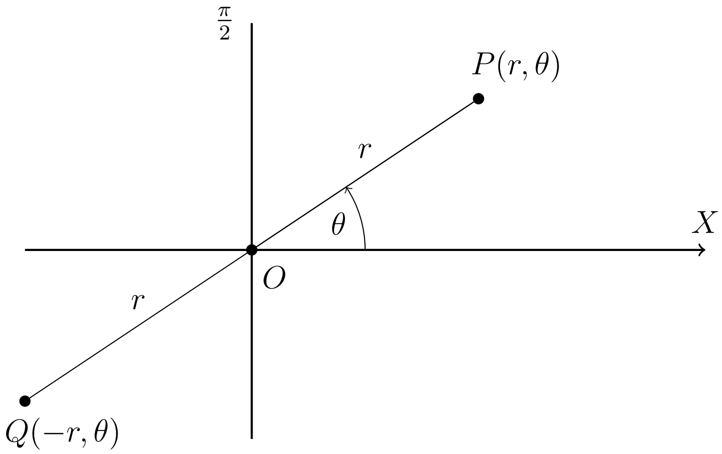


ตัวอย่าง 4.1.2 จงเขียนจุดต่อไปนี้ลงในระบบพิกัดเชิงขั้ว $A(1, \frac{\pi}{4})$, $B(2, \frac{\pi}{2})$, $C(3, \frac{3\pi}{4})$, $D(4, \frac{11\pi}{6})$, $E(5, \frac{4\pi}{3})$, $F(0, \frac{\pi}{3})$, $G(4.5, -\pi)$, และ $H(2.5, -\frac{2\pi}{3})$,

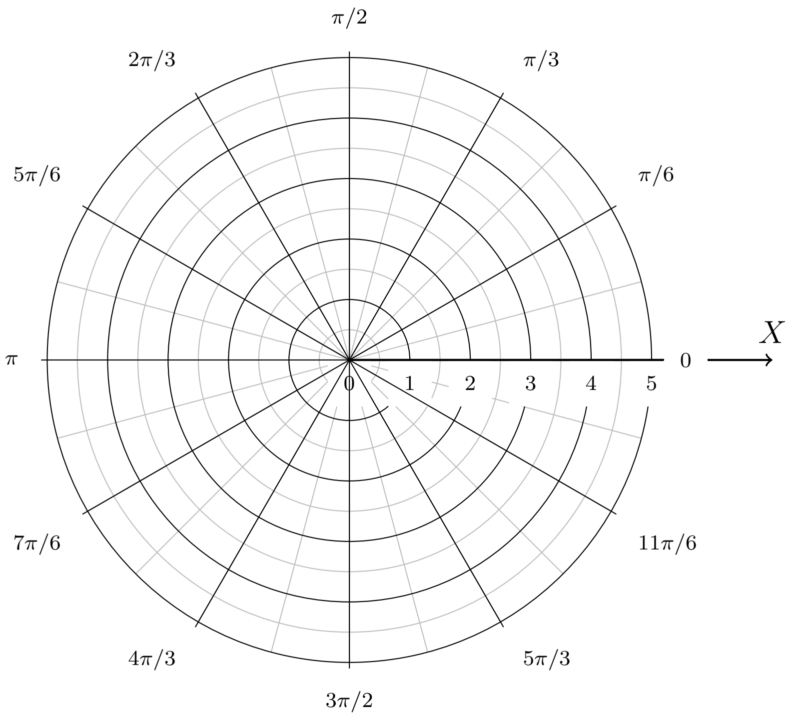


บทนิยาม 4.1.3 ถ้า P มีพิกัดเชิงขั้วเป็น (r,θ) เมื่อ $r > 0$ แล้ว

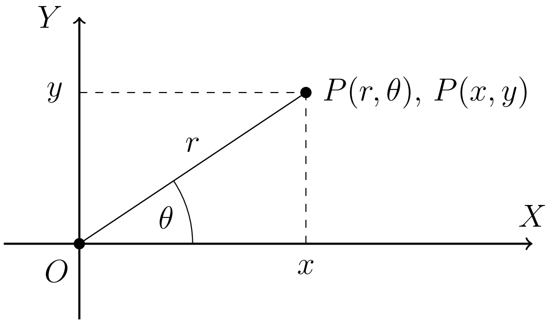
$(-r,\theta)$ หมายถึงพิกัดของจุดปลายที่ได้จากการลากเส้นตรงจากขั้วไปในทิศตรงกันข้ามกับ $\overrightarrow{OP}$ เป็นระยะ r



ตัวอย่าง 4.1.4 จงเขียนจุดต่อไปนี้ลงในระบบพิกัดเชิงขั้ว $A(-1,\frac{\pi}{4})$, $B(-2,\frac{3\pi}{2})$, $C(-3.5,\frac{5\pi}{6})$, $D(-4,\frac{7\pi}{6})$, $E(-5,-\frac{4\pi}{3})$, $F(0,-\pi)$, และ $G(-3,-\frac{2\pi}{3})$



ความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดเชิงขั้ว (r, θ) และพิกัดฉาก (x, y) ของจุด P ใดๆที่ไม่ใช่จุดกำเนิด



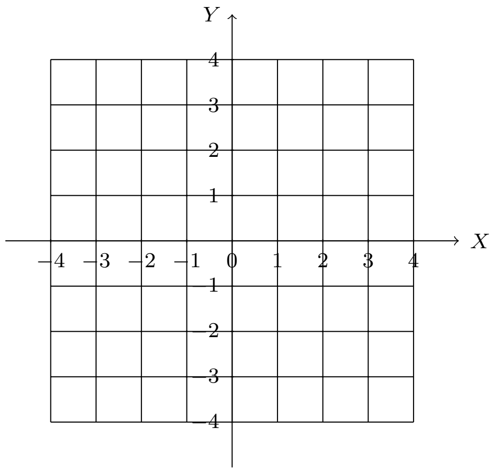
จะได้ $\quad x^2 + y^2 = r^2$

$$x = r\cos\theta \qquad \text{และ} \qquad y = r\sin\theta$$

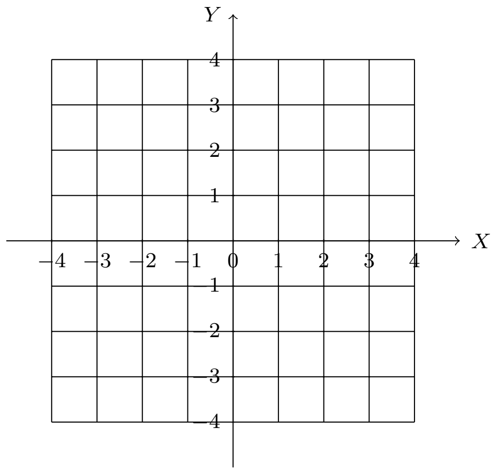
ดังนั้น $\quad \tan\theta = \dfrac{y}{x}$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

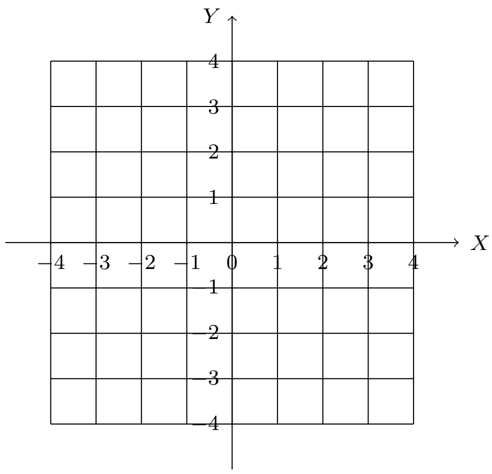
1. $(2, 0)$



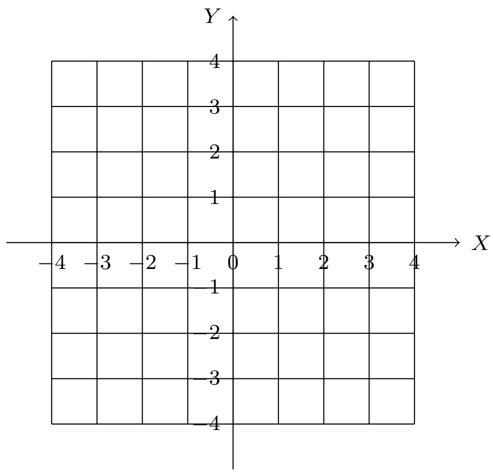
3. $(-2, 2\sqrt{3})$



2. $(2, 2)$



4. $(-\sqrt{3}, -1)$

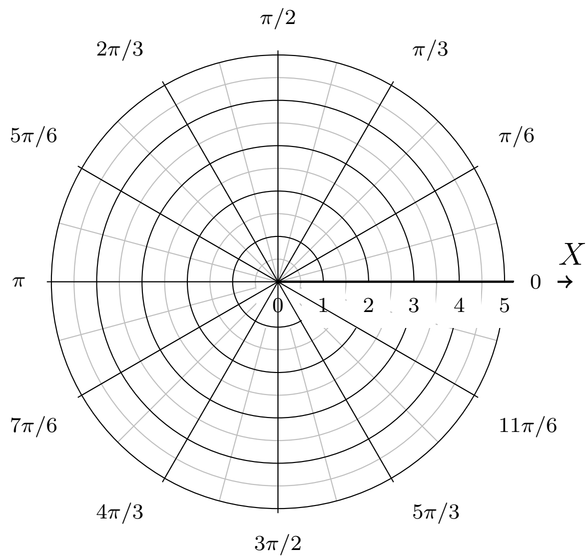


ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้มาอย่างน้อย 5 จุด

1. $(1,1)$

2. $(-1,\sqrt{3})$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาพิกัดฉากของจุดซึ่งมีพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้



1. $(6,\frac{\pi}{3})$

3. $(-3,\frac{\pi}{6})$

2. $(4,\frac{5\pi}{3})$

4. $(-5,-\frac{3\pi}{4})$

ตัวอย่าง 4.1.8 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $x = 3$
2. $y = 5$
3. $y = x$
4. $y = x + 1$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงแปลงสมการในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

1. $y = x^2$
2. $y^2 = 4x$
3. $x^2 + y^2 = 4$
4. $x^2 + y^2 - 2x = 0$
5. $4x^2 + 9y^2 = 36$
6. $x^2 - y^2 = 1$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r = 4\sin\theta$
2. $r = \cos 2\theta$
3. $r = \tan\theta$
4. $r = \csc 2\theta$

ตัวอย่าง 4.1.11 จงแปลงสมการในระบบพิกัดเชิงขั้วต่อไปนี้ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

1. $r = \dfrac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta}$
2. $r = \dfrac{5}{2 - \cos\theta}$

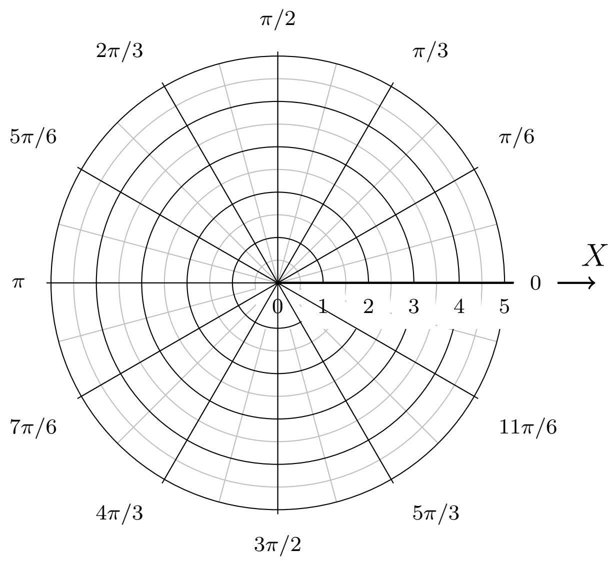
แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดในระบบพิกัดฉากต่อไปนี้ เมื่อ $r > 0$ และ $0 \leq \theta < 2\pi$

   1.1 $(-1, 1)$
   1.2 $(-3, -3)$
   1.3 $(-1, \sqrt{3})$
   1.4 $(4\sqrt{3}, -1)$
   1.5 $(3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$
   1.6 $(8, 4\sqrt{3})$

2. จงเขียนจุดในระบบพิกัดฉาก และหาพิกัดฉากของจุดต่อไปนี้

   2.1 $A(2, \frac{\pi}{4})$
   2.2 $B(-1, \frac{3\pi}{3})$
   2.3 $C(-3, \frac{5\pi}{6})$
   2.4 $D(4, -\frac{\pi}{4})$
   2.5 $E(-5, \frac{11\pi}{6})$
   2.6 $E(2.5, \frac{4\pi}{3})$



3. จงหาพิกัดเชิงขั้วของจุดพิกัดฉากต่อไปนี้มาอย่างน้อย 5 จุด

   3.1 $(-1, 1)$
   3.2 $(-3, -\sqrt{3})$
   3.3 $(\sqrt{2}, \sqrt{6})$

4. จงเขียนสมการในระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว

   4.1 $x + y = 2$
   4.2 $y = x^2$
   4.3 $x^2 + y^2 = 4$
   4.4 $x^2 + y^2 = 2x$
   4.5 $x^2 - y^2 = xy$
   4.6 $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$

5. จงเขียนสมการในระบบเชิงขั้วให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก

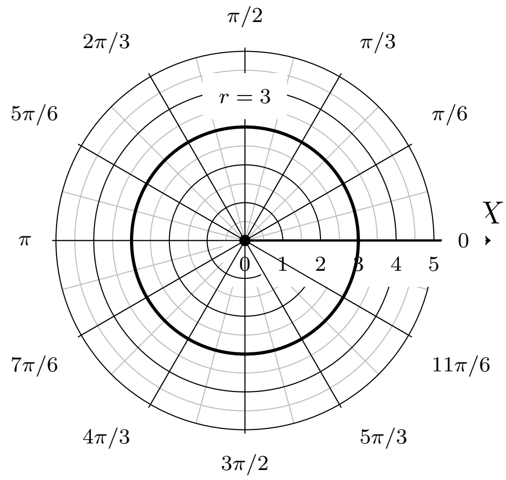
   5.1 $r = 3$
   5.2 $r = 5\sin\theta$
   5.3 $r = 2\cos 2\theta$
   5.4 $r = 1 - \sin\theta$
   5.5 $r = \frac{1}{1 - \sin\theta}$
   5.6 $r = \tan\theta$

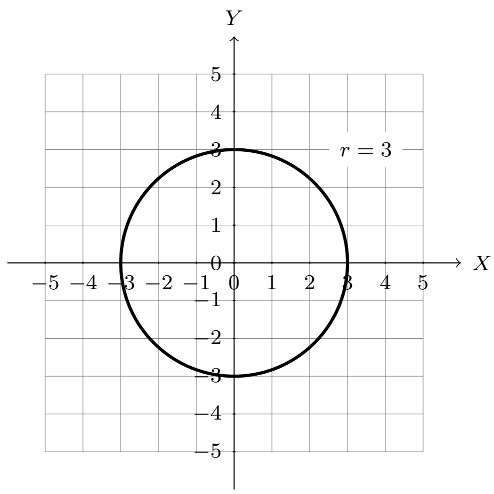
4.2 กราฟของสมการในระบบพิกัดเชิงขั้ว

การเขียนกราฟของสมการ $r = f(\theta)$ ในระบบพิกัดเชิงขั้ว มีแนวคิดเหมือนกับการเขียนกราฟของสมการในระบบพิกัดฉาก โดยการนำจุด (r, θ) ที่สอดคล้องสมการไปเขียนลงบนพิกัด ต่อไปตัวอย่างกราฟของระบบพิกัดฉากที่สำคัญ

1. สมการ $f(\theta) = k$

สมการ $r = f(\theta) = k$ เมื่อ $k \neq 0$ เป็นกราฟวงกลมที่มีรัศมี $|k|$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$
ตัวอย่างเช่น $r = 3$

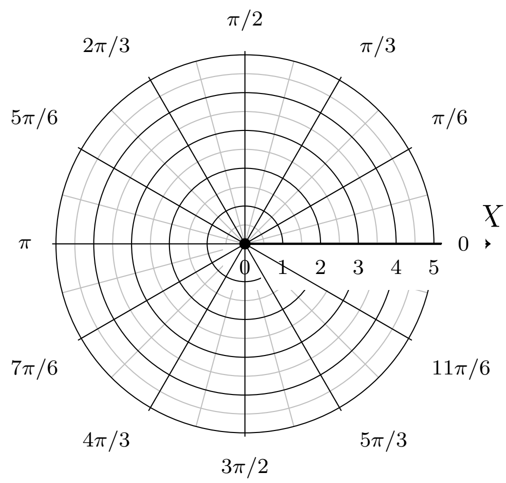


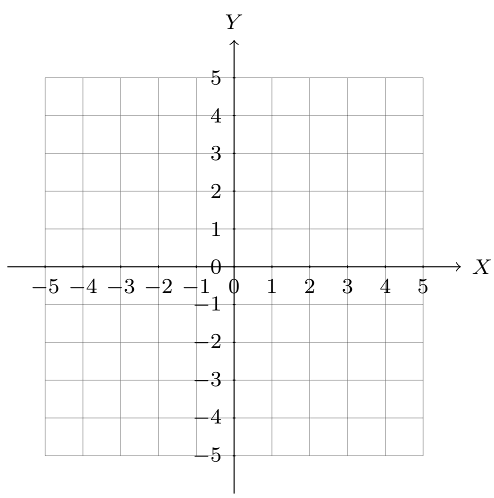


ตัวอย่าง 4.2.1 จงวาดกราฟของสมการ $r = 2$ และ $r = -4$ บนกราฟเดียวกัน

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	2						

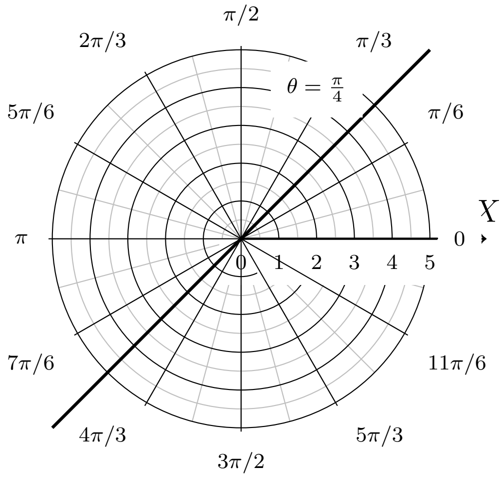
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	-4						

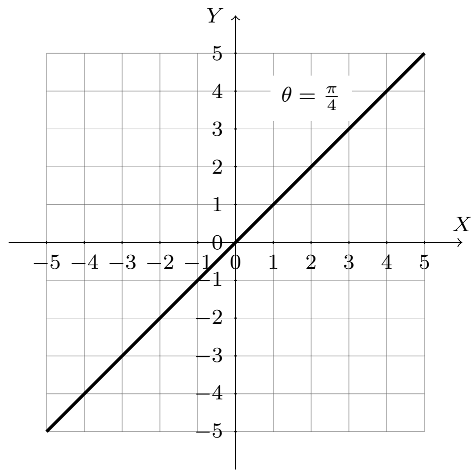




2. สมการ $\theta = \theta_0$

สมการ $\theta = \theta_0$ เป็นกราฟเส้นตรงที่ทำมุม θ_0 กับแกนเชิงขั้ว ตัวอย่างเช่น $\theta = \frac{\pi}{4}$

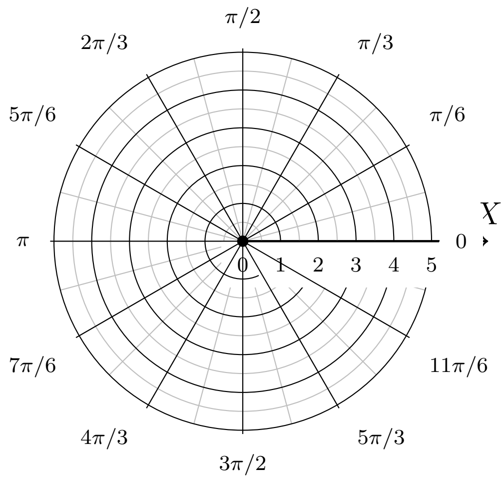
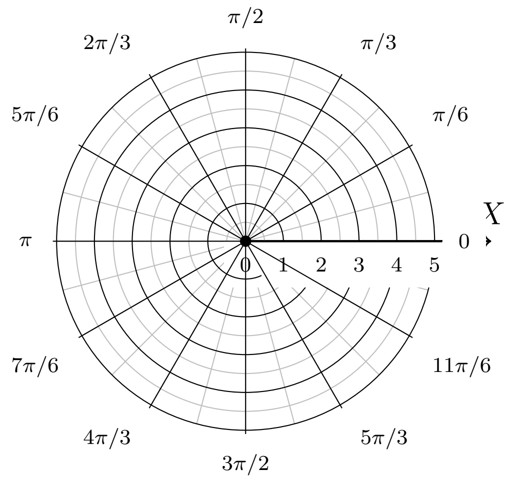
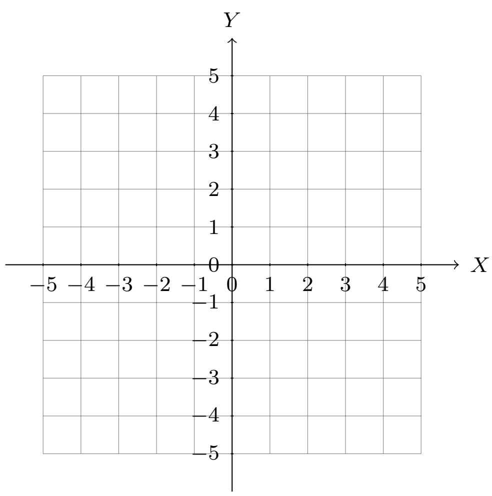
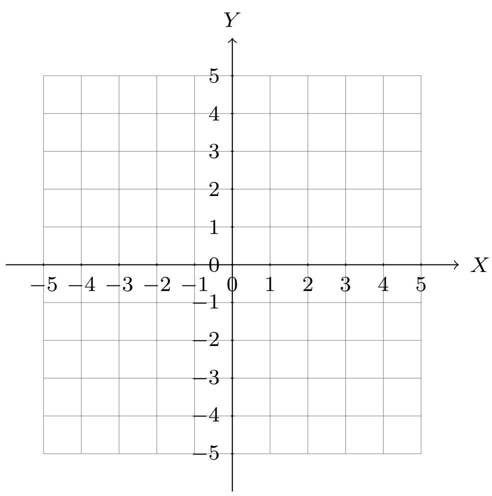




ตัวอย่าง 4.2.2 จงวาดกราฟของสมการ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ และ $\theta = -\frac{\pi}{6}$

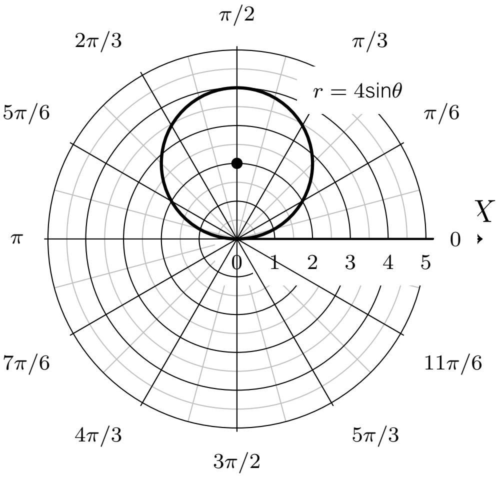
θ	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$
r							

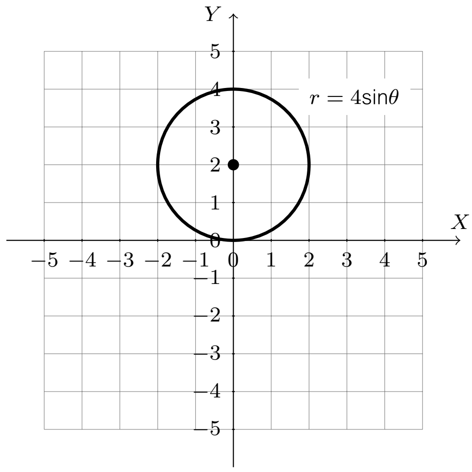
θ	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$
r							

3. สมการ $f(\theta) = 2k\sin\theta$ และ $f(\theta) = 2k\cos\theta$

สมการ $r = f(\theta) = 2k\sin\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, \frac{\pi}{2})$ รัศมี $|k|$ ตัวอย่างเช่น $r = 4\sin\theta$

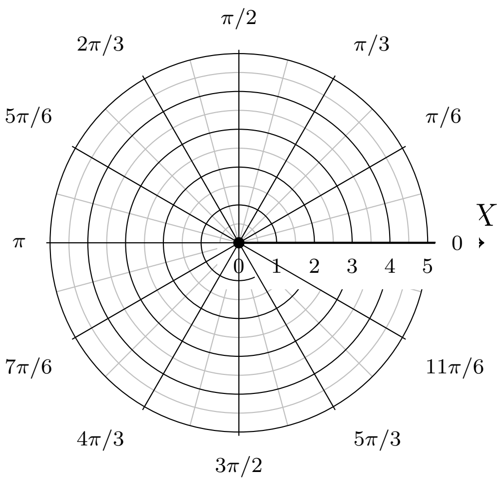


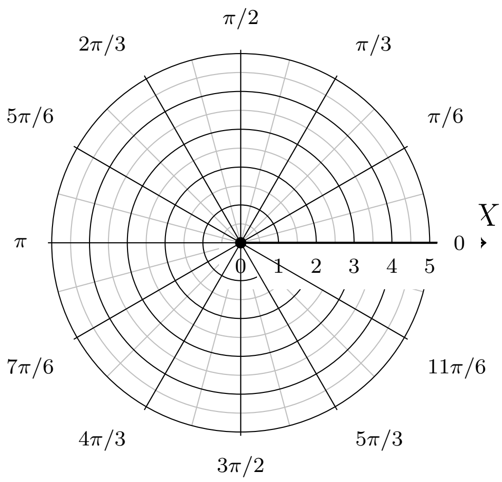


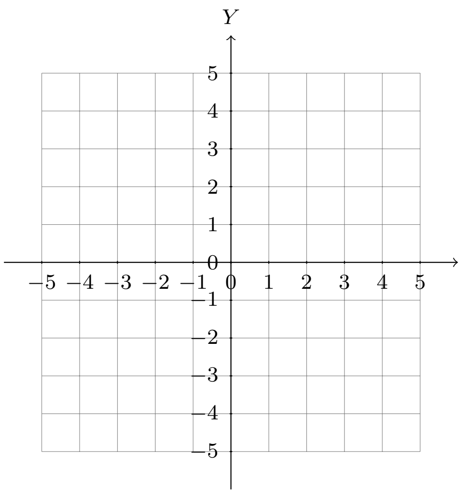
ตัวอย่าง 4.2.3 จงวาดกราฟของสมการ $r = 2\sin\theta$ และ $r = -4\sin\theta$

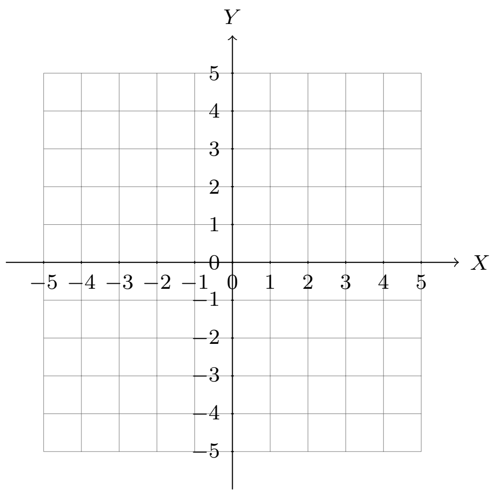
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	0						

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	0						

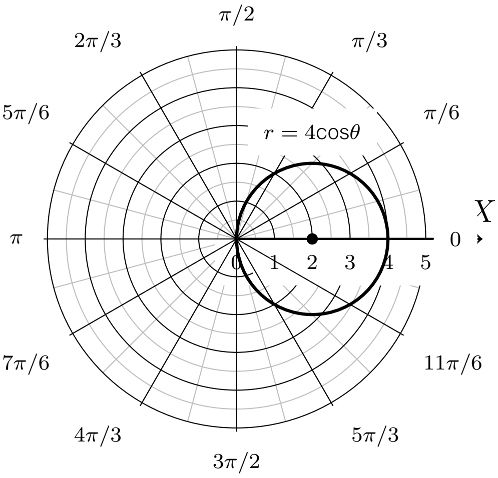


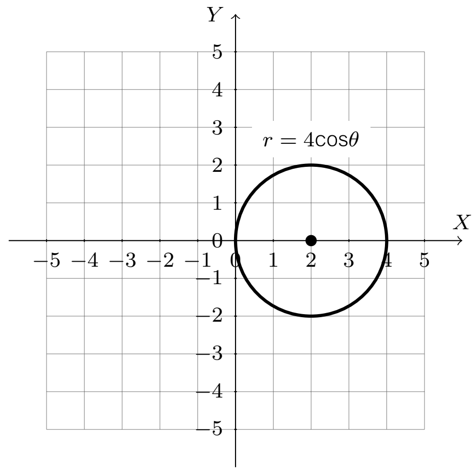






สมการ $r = f(\theta) = 2k\cos\theta$ เมื่อ $k \neq 0$ และ $0 \leq \theta \leq \pi$ เป็นกราฟวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(k, 0)$ รัศมี $|k|$ ตัวอย่างเช่น $r = 4\cos\theta$

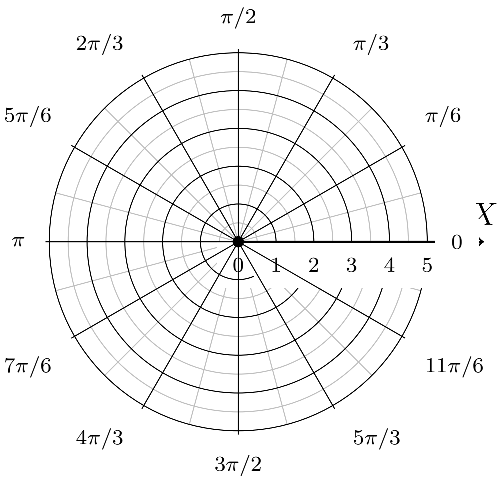


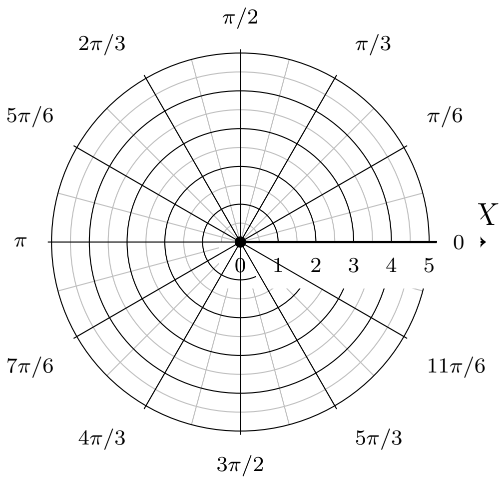


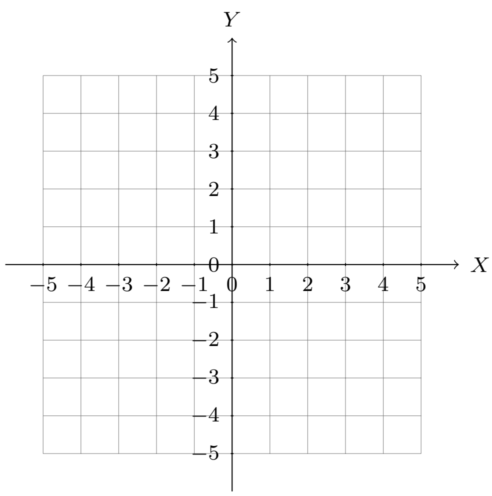
ตัวอย่าง 4.2.4 จงวาดกราฟของสมการ $r = 2\cos\theta$ และ $r = -4\cos\theta$

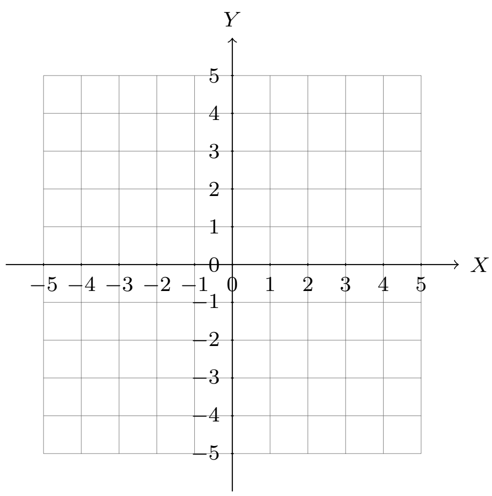
θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	0						

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
r	0						



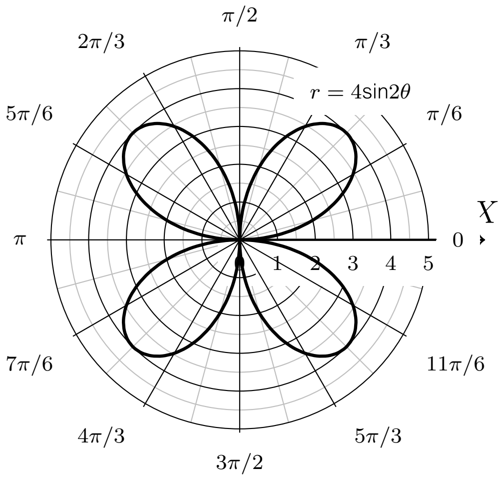


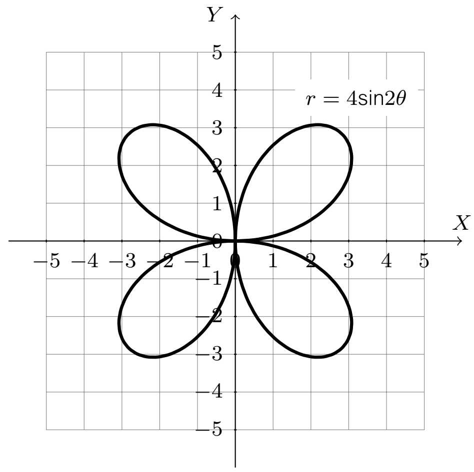




4. สมการ $f(\theta) = k\sin 2n\theta$ และ $f(\theta) = k\cos 2n\theta$

สมการ $r = f(\theta) = k\sin 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\sin 2\theta$

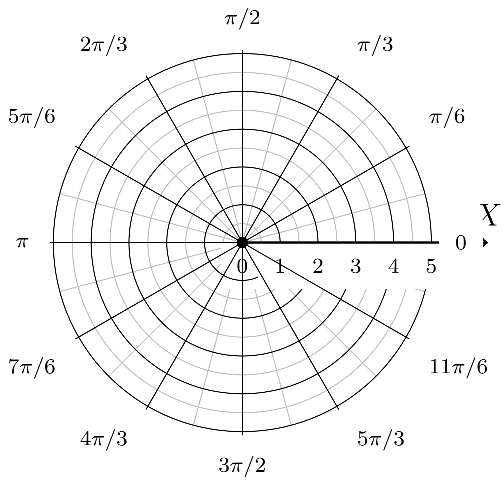


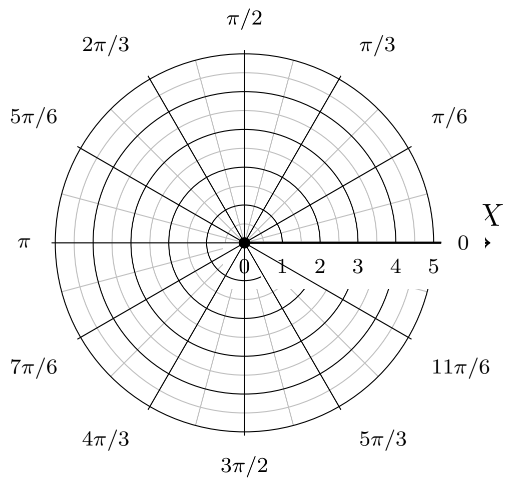


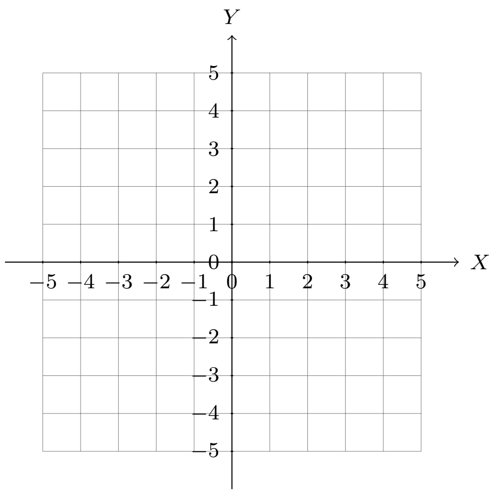
ตัวอย่าง 4.2.5 จงวาดกราฟของสมการ $r = -4\sin 2\theta$ และ $r = 5\sin 4\theta$

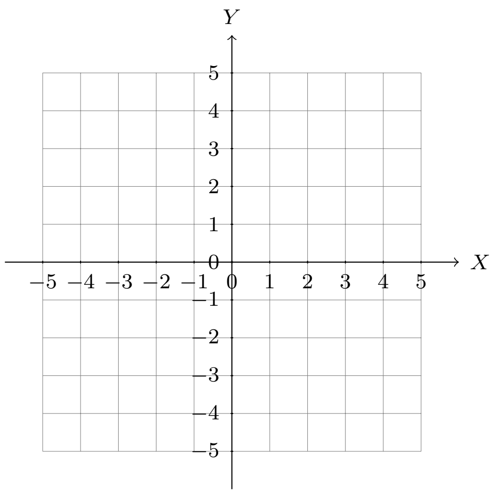
θ							
r							

θ							
r							

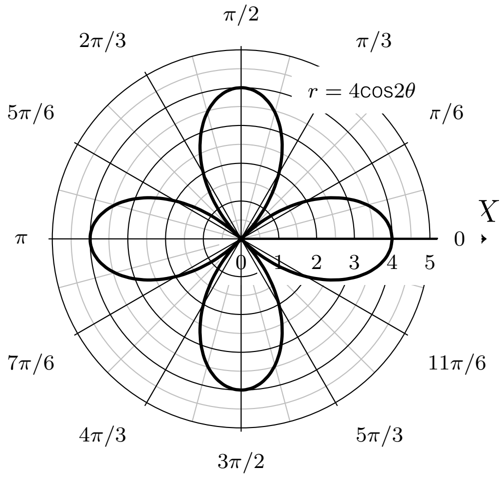


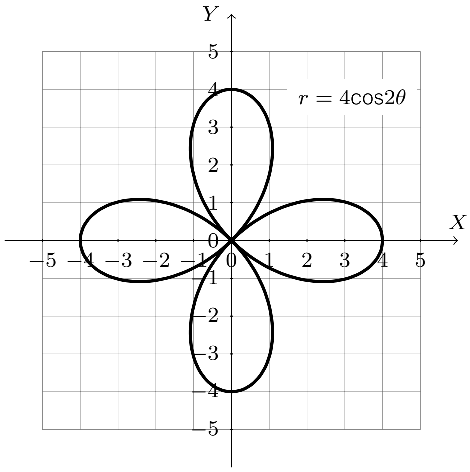






สมการ $r = f(\theta) = k\cos 2n\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{Z}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $4n$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\cos 2\theta$

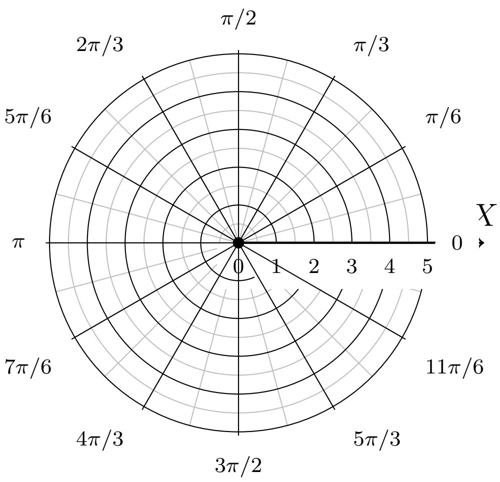


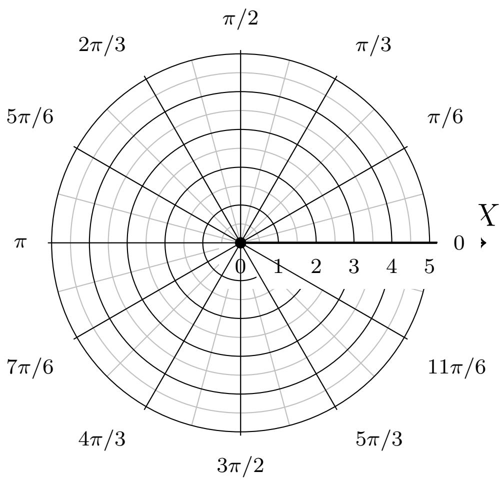


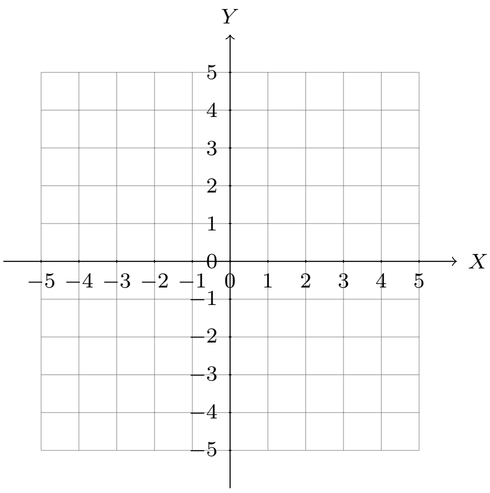
ตัวอย่าง 4.2.6 จงวาดกราฟของสมการ $r = -3\cos 2\theta$ และ $r = 4\cos 4\theta$

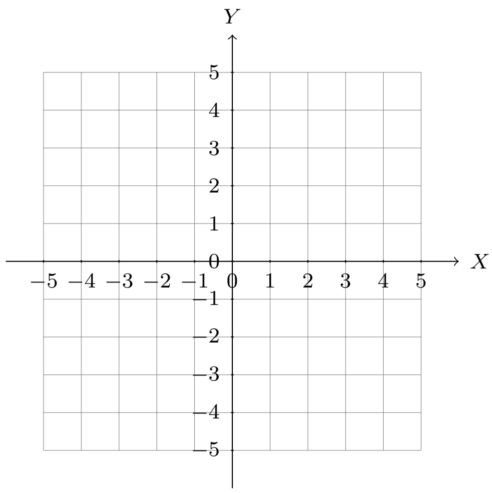
θ							
r							

θ							
r							



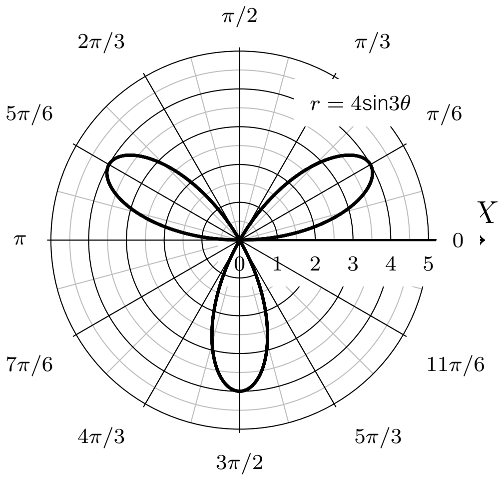


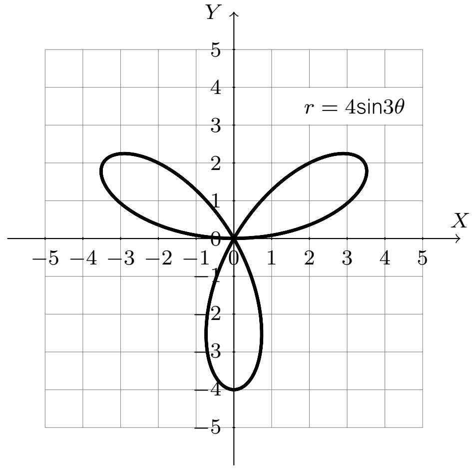




5. สมการ $f(\theta) = k\sin(2n-1)\theta$ และ $f(\theta) = k\cos(2n-1)\theta$

สมการ $r = f(\theta) = k\sin(2n-1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n-1$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\sin 3\theta$

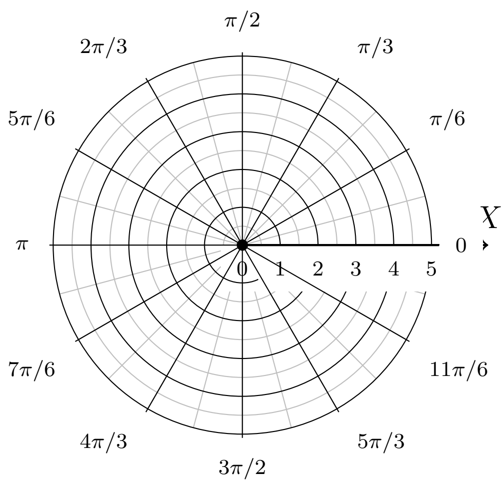


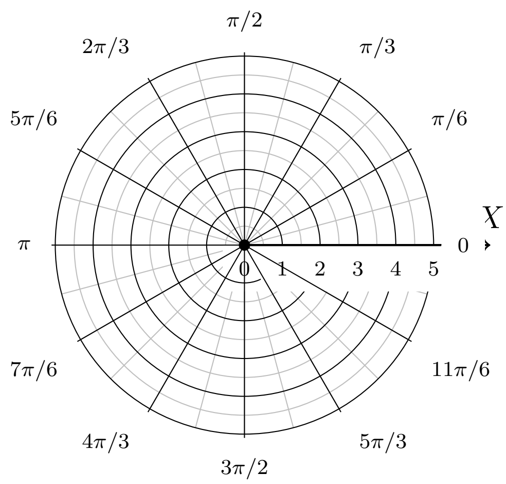


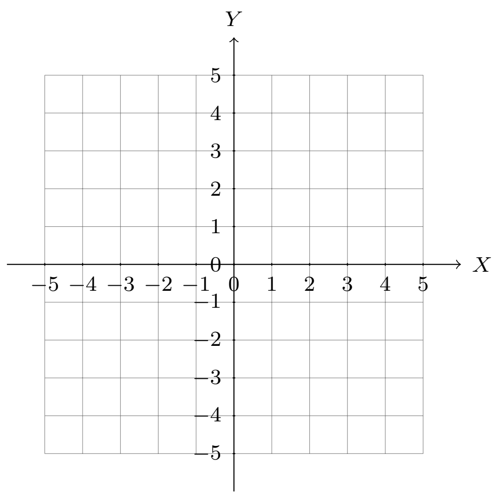
ตัวอย่าง 4.2.7 จงวาดกราฟของสมการ $r = -3\sin 3\theta$ และ $r = 4\sin 5\theta$

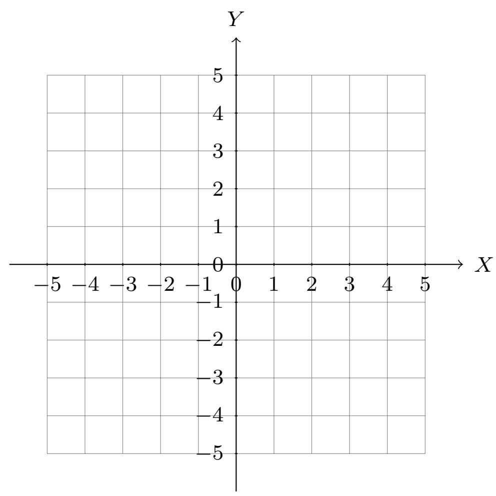
θ							
r							

θ							
r							

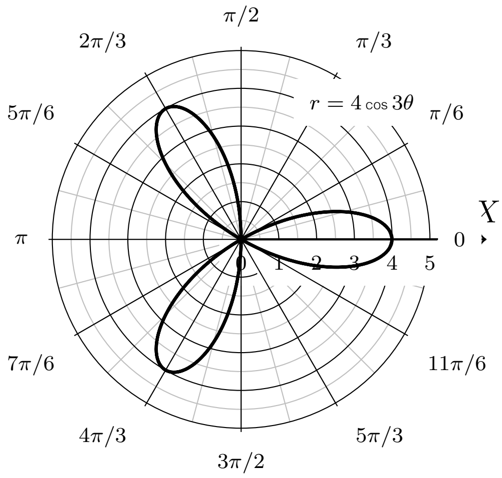


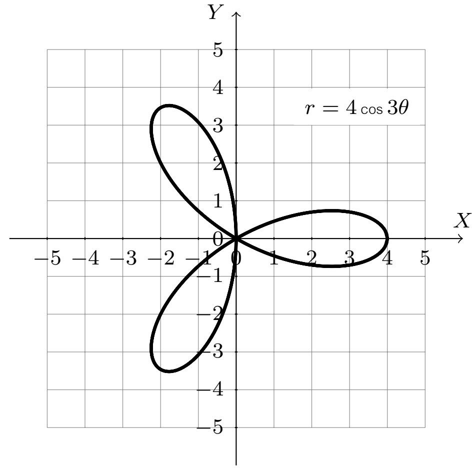






สมการ $r = f(\theta) = k\cos(2n-1)\theta$ เมื่อ $k \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ และ $0 \leq \theta \leq 2\pi$ เป็นกราฟกลีบกุหลาบ $2n-1$ กลีบ ตัวอย่างเช่น $r = 4\cos 3\theta$

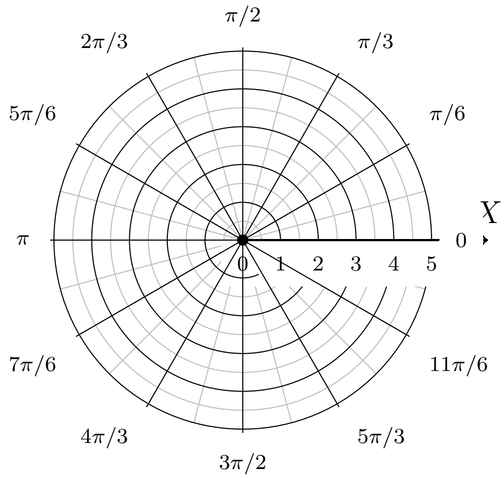


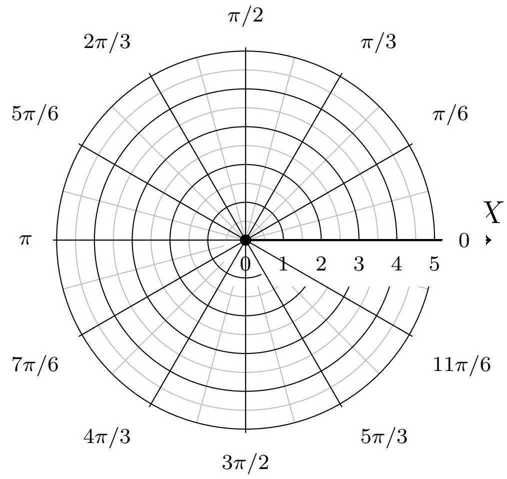


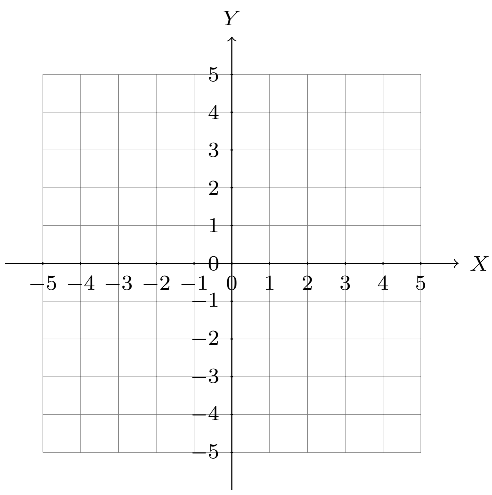
ตัวอย่าง 4.2.8 จงวาดกราฟของสมการ $r = -3\cos 3\theta$ และ $r = 4\cos 5\theta$

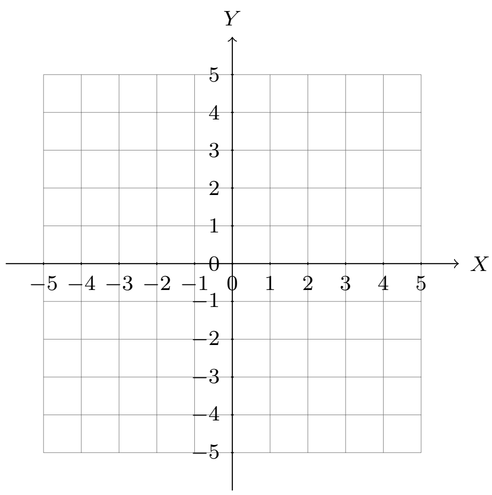
θ							
r							

θ							
r							









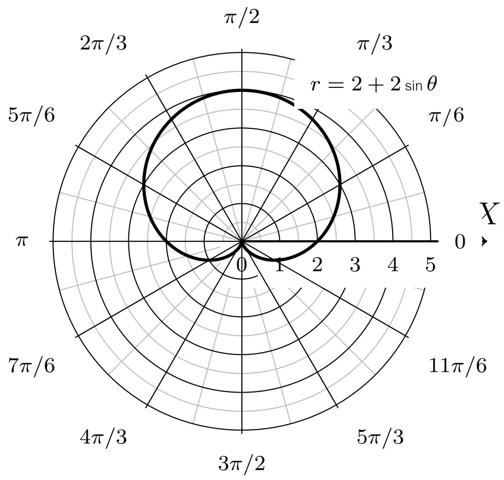
6. สมการ $f(\theta) = r = a + b\sin\theta$ และ $f(\theta) = r = a + b\cos\theta$

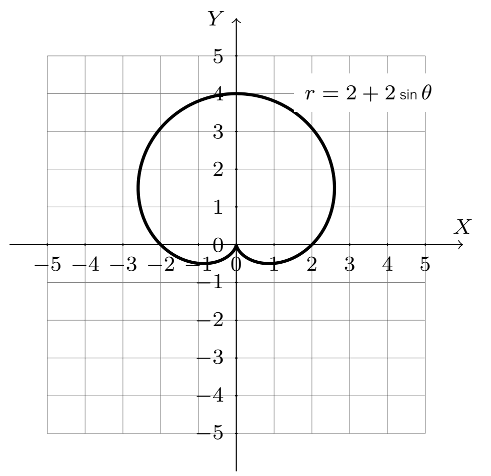
ถ้า $|a| = |b|$ แล้วกราฟนี้จะผ่านขั้ว และเรียกกราฟนี้ว่า **คาร์ดิออยด์** (cardioid)

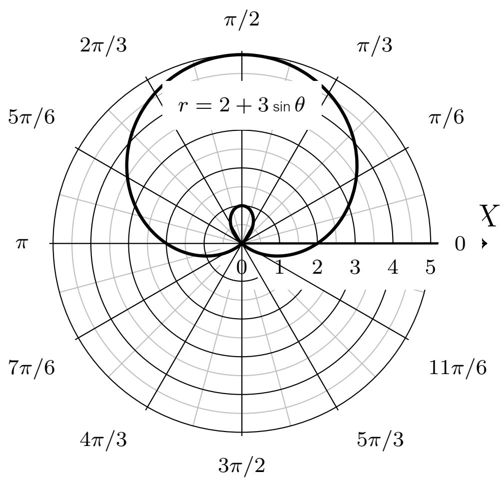
ถ้า $|a| \neq |b|$ จะเรียกกราฟนี้ว่า **ลีมาซอง** (limacon)

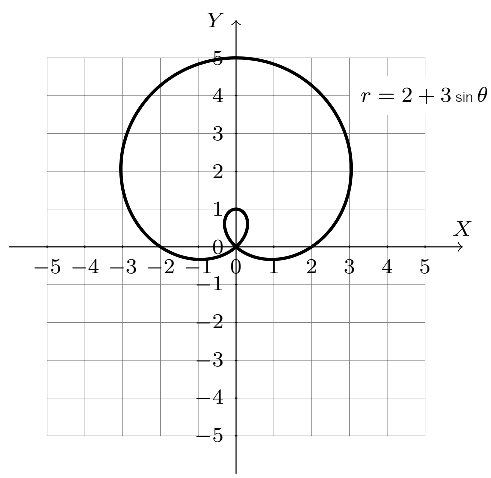
ถ้า $|a| > |b|$ กราฟนี้จะไม่ผ่านขั้ว

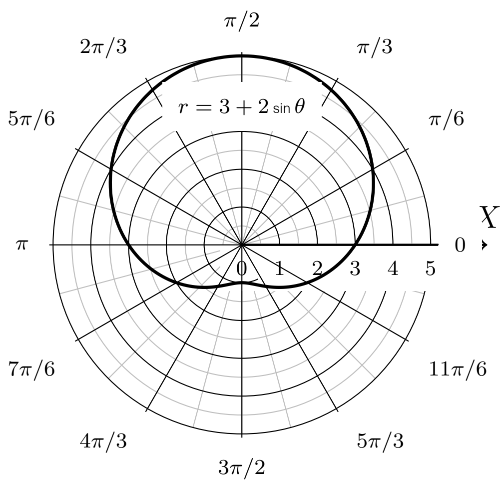
ถ้า $|a| < |b|$ กราฟนี้จะผ่านขั้ว และมีวงวน (loop) อยู่ภายใน

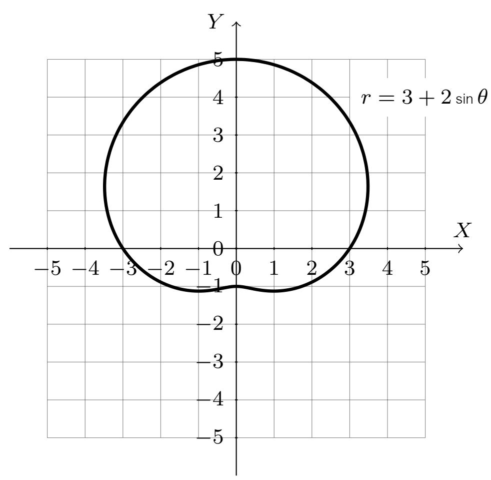






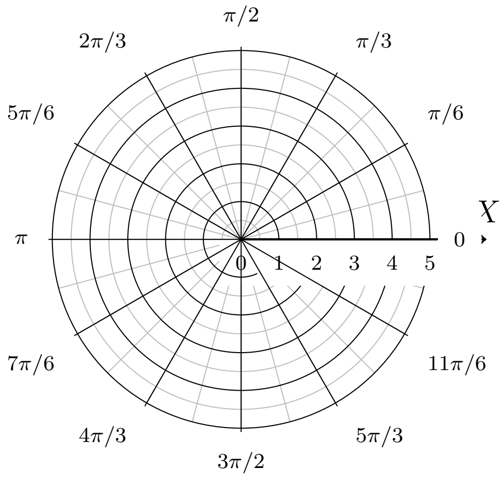


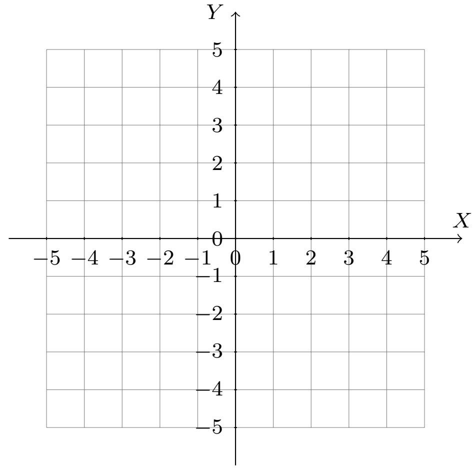




ตัวอย่าง 4.2.9 จงวาดกราฟ $r = 2 + 2\cos\theta$

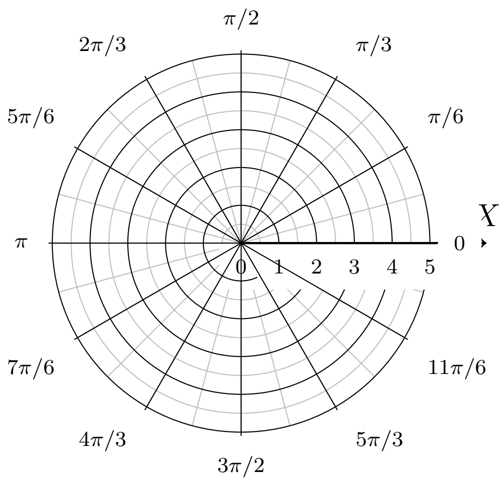
θ													
r													

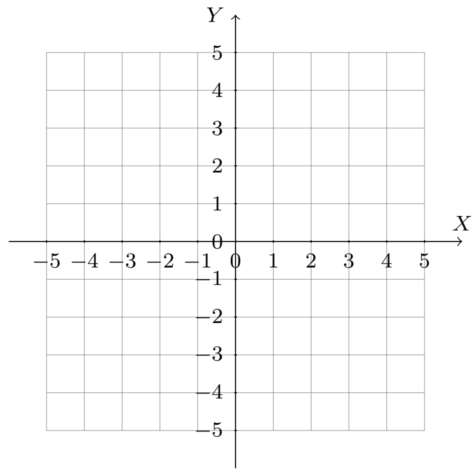




ตัวอย่าง 4.2.10 จงวาดกราฟ $r = 1 + 3\cos\theta$

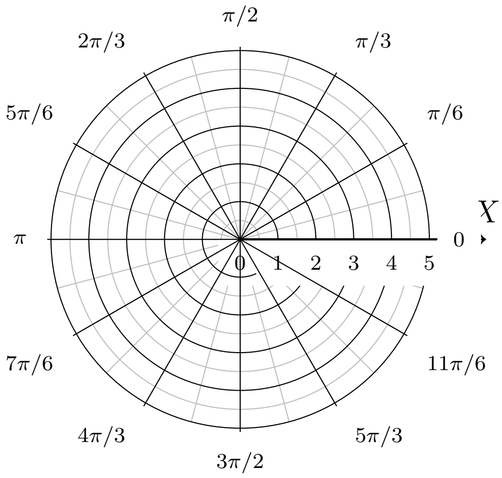
θ													
r													

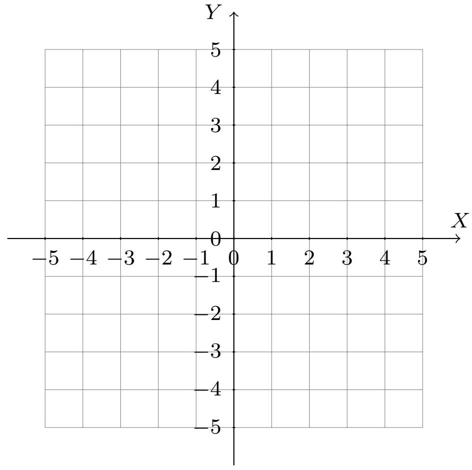




ตัวอย่าง 4.2.11 จงวาดกราฟ $r = 3 + 2\cos\theta$

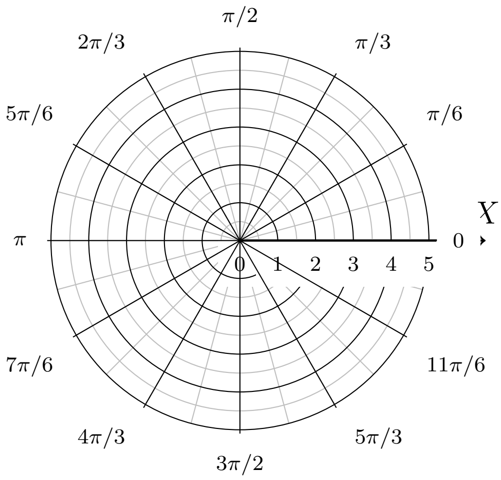
θ													
r													

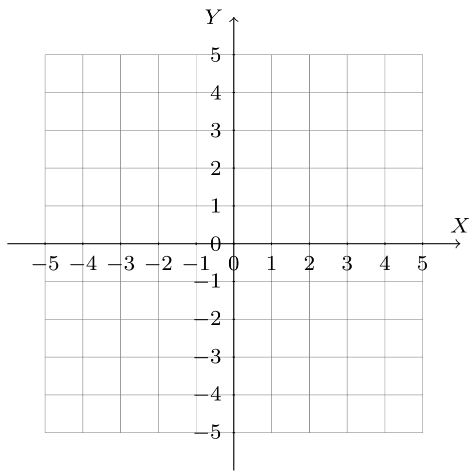




ตัวอย่าง 4.2.12 จงวาดกราฟ $r = 1 - 3\sin\theta$

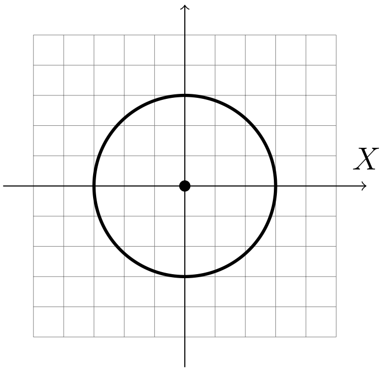
θ													
r													



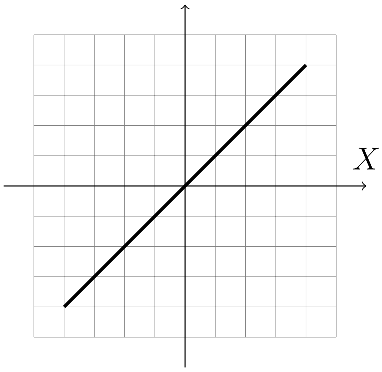


ตัวอย่างกราฟเชิงขั้ว

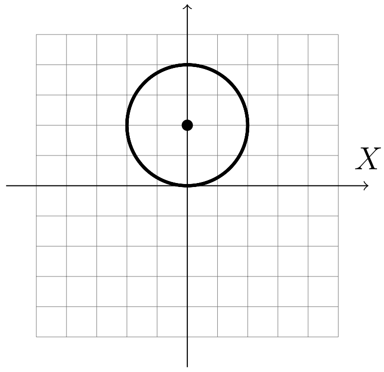
$r = 3$



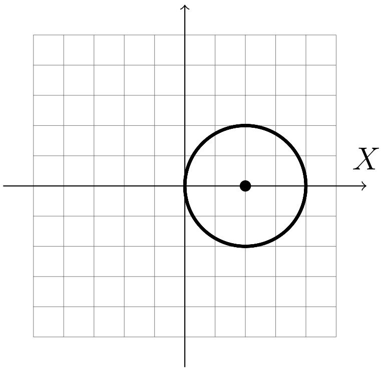
$\theta = \frac{\pi}{4}$



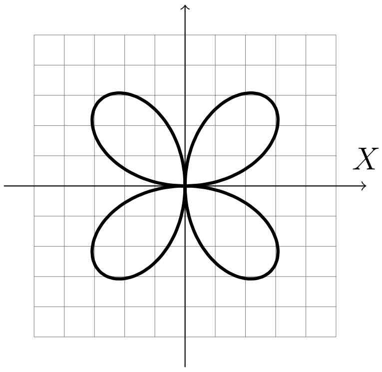
$r = 4\sin\theta$



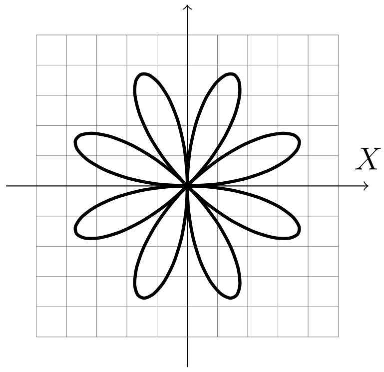
$r = 4\cos\theta$



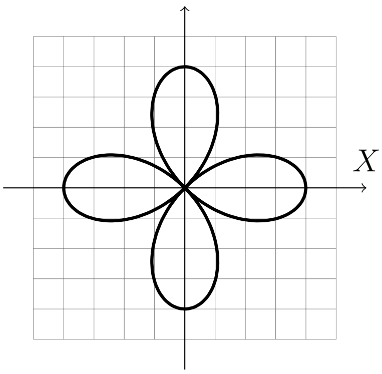
$r = 4\sin 2\theta$



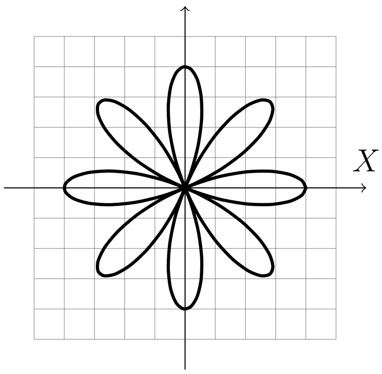
$r = 4\sin 4\theta$



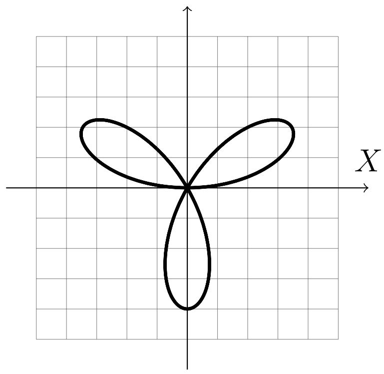
$r = 4\cos 2\theta$



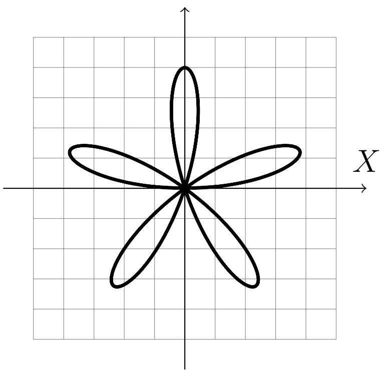
$r = 4\cos 4\theta$



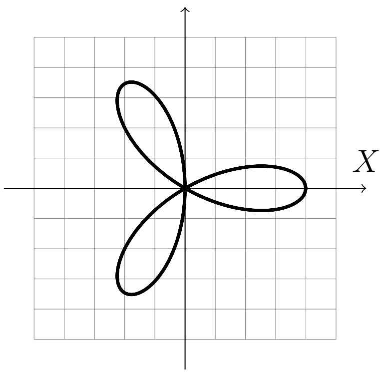
$r = 4\sin 3\theta$



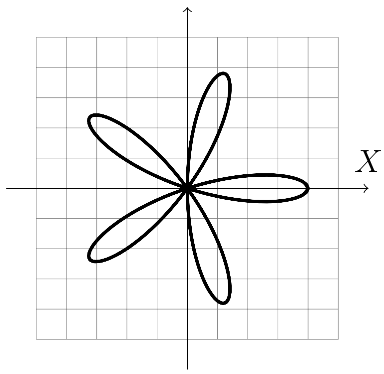
$r = 4\sin 5\theta$



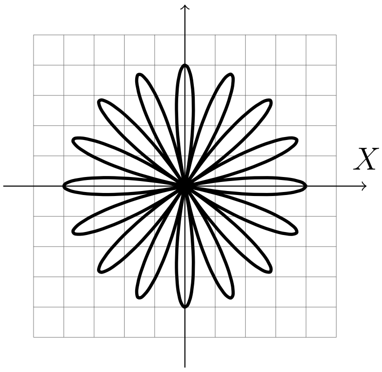
$r = 4\cos 3\theta$



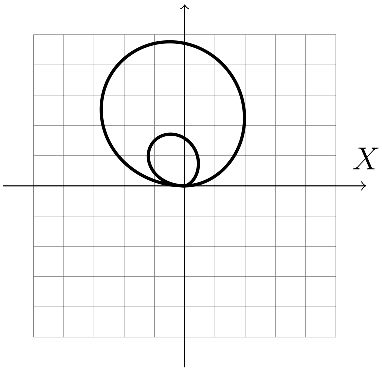
$r = 4\cos 5\theta$



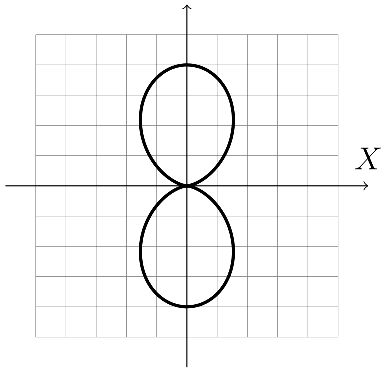
$r = 4\cos 8\theta$



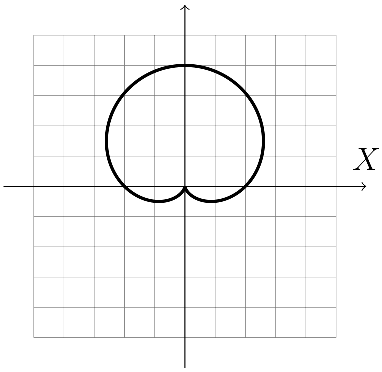
$r = \theta \sin\theta$



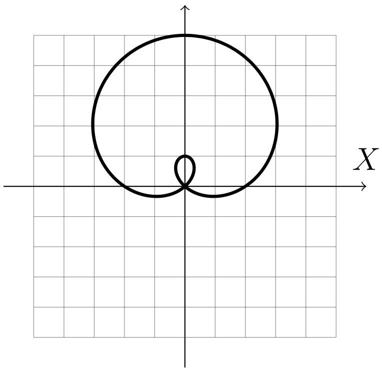
$r = 4\sin^2\theta$



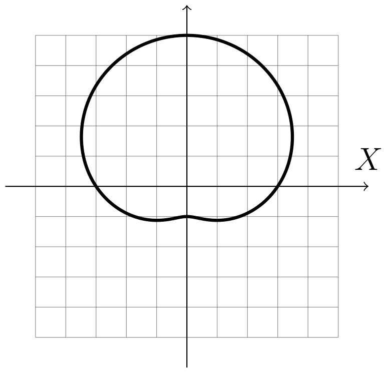
$r = 2 + 2\sin\theta$



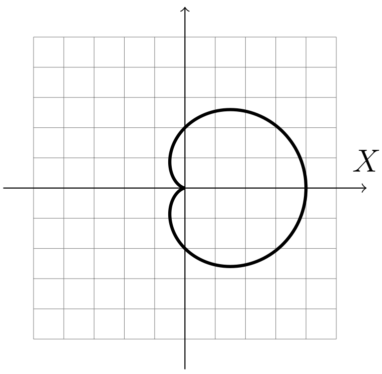
$r = 2 + 3\sin\theta$



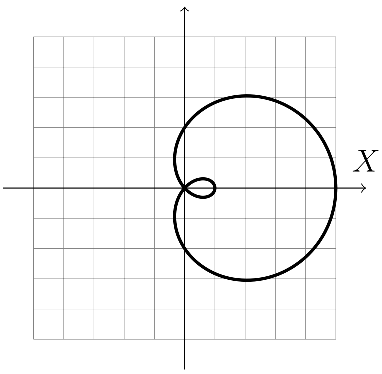
$r = 3 + 2\sin\theta$



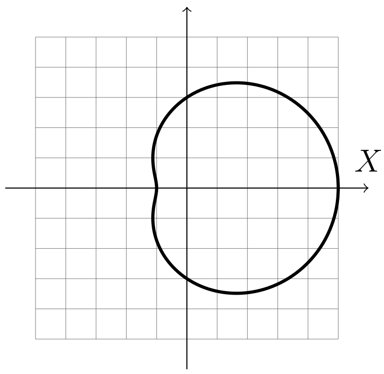
$r = 2 + 2\cos\theta$



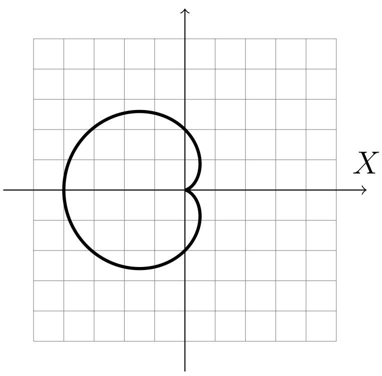
$r = 2 + 3\cos\theta$



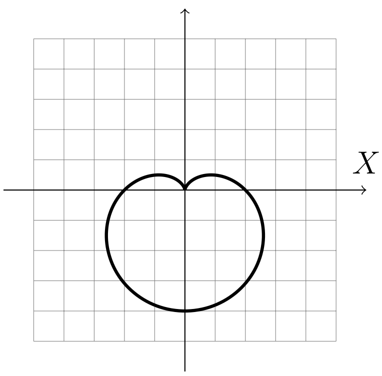
$r = 3 + 2\cos\theta$



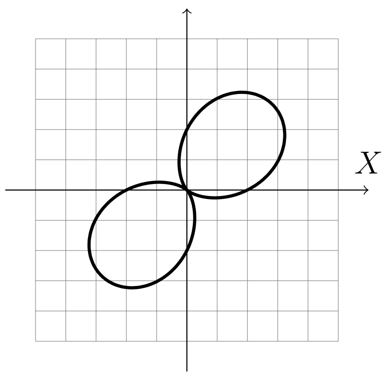
$r = 2 - 2\cos\theta$



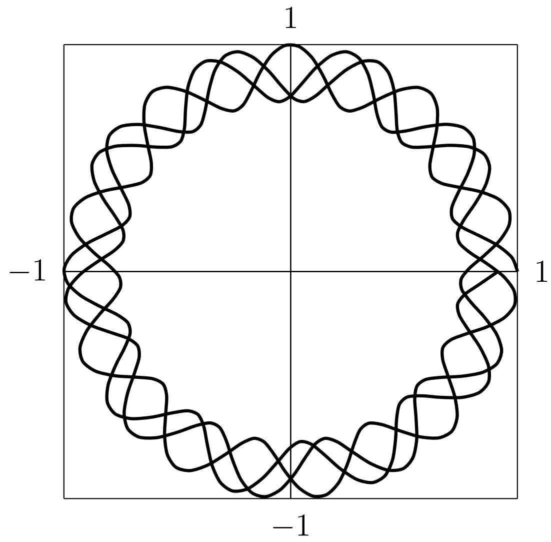
$r = 2 - 2\sin\theta$



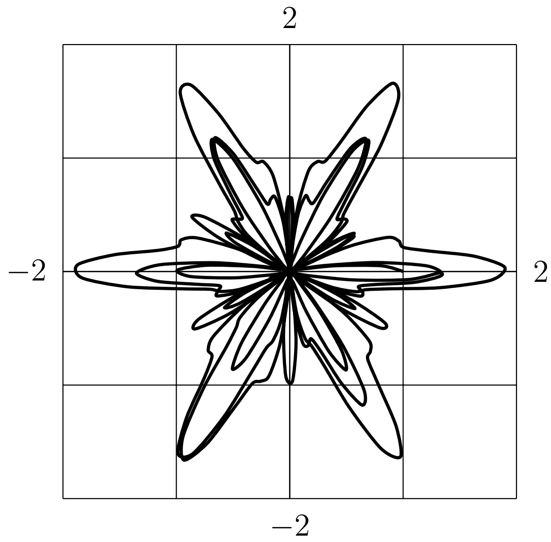
$r = 2 + 2\sin 2\theta$



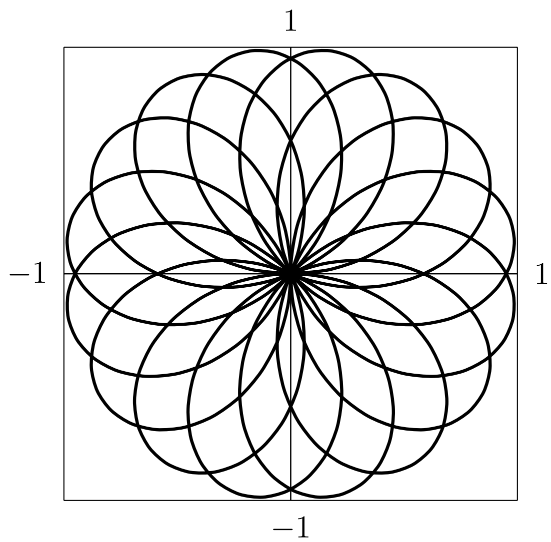
$r = \sin^2(2.4\theta) + \cos^4(2.4\theta)$



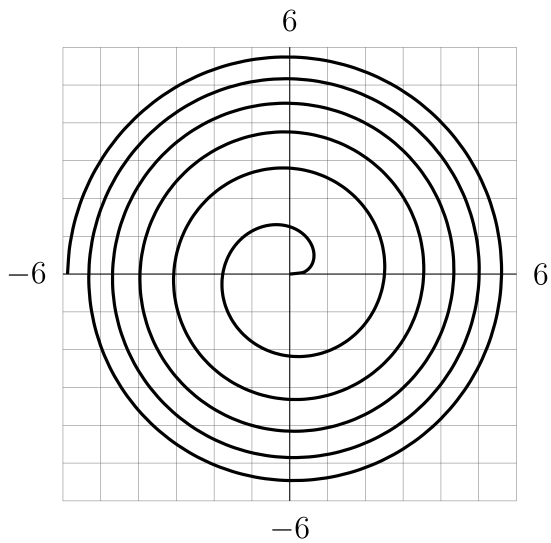
$r = \sin^2(1.2\theta) + \cos^3(6\theta)$



$r = \sin(\frac{8}{5}\theta)$



$r = \sqrt{\theta}$



แบบฝึกหัด 4.2

1. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

   1.1 $r = 2$
   1.2 $2\theta = \pi$
   1.3 $4\theta = 3\pi$
   1.4 $r = 5\cos 2\theta$
   1.5 $r = -3\sin 4\theta$
   1.6 $r = 4\cos 3\theta$
   1.7 $r = 5\sin 6\theta$
   1.8 $r = 6\cos 7\theta$
   1.9 $r = -4\cos 5\theta$

2. จงเขียนกราฟของสมการในระบบเชิงขั้วต่อไปนี้

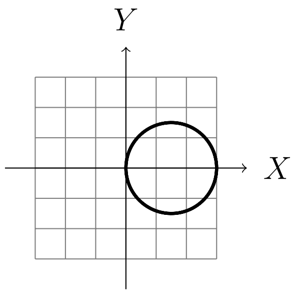
   2.1 $r = 1 - 3\cos\theta$
   2.2 $r = 3 + 4\cos\theta$
   2.3 $r = 1 + \cos\theta$
   2.4 $r = 2 - 4\sin\theta$
   2.5 $r = 3 + 3\cos\theta$
   2.6 $r = -4 - 4\sin\theta$

3. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 5 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

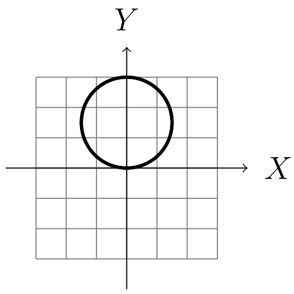
4. จงยกตัวอย่างสมการที่ให้กราฟกลีบกุหลาบ 8 กลีบ มาอย่างน้อย 3 สมการ

5. จงจับคู่สมการในระบบเชิงขั้วในแต่ละข้อต่อไปนี้กับกราฟที่กำหนดให้

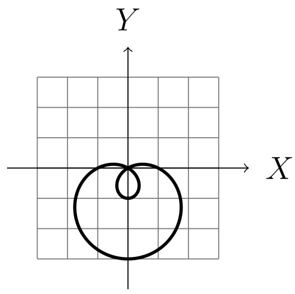
   5.1 $r = 3\sin 3\theta$
   5.2 $r = 3\cos\theta$
   5.3 $r = 2 + 2\cos\theta$
   5.4 $r = 1 - 2\sin\theta$
   5.5 $r = 3\cos 4\theta$
   5.6 $r = 3\sin\theta$



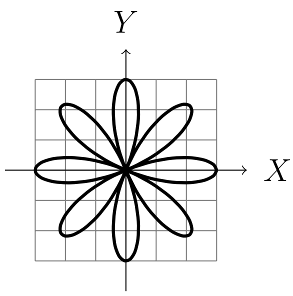
(ก)



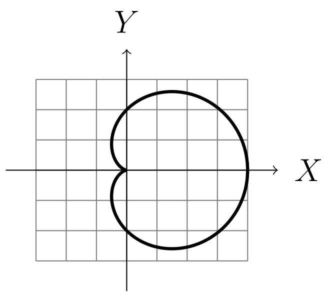
(ข)



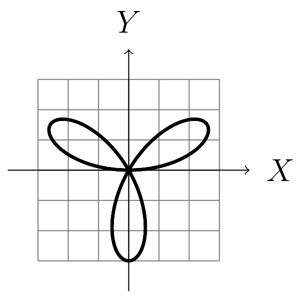
(ค)



(ง)



(จ)

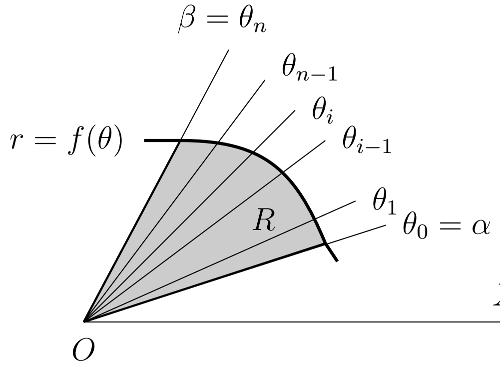


(ฉ)

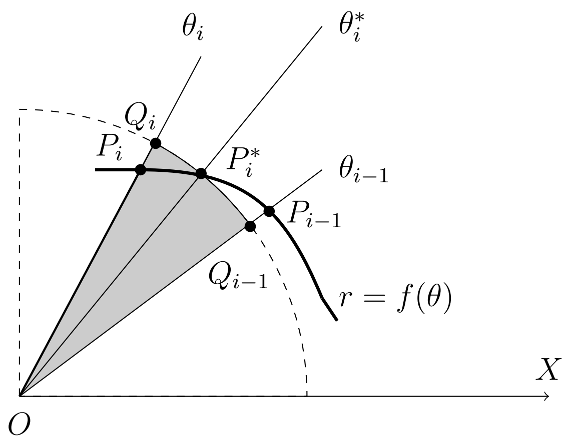
4.3 การหาพื้นที่ของบริเวณในระบบพิกัดเชิงขั้ว

ให้ R เป็นพื้นที่อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยฟังก์ชัน $r = f(\theta)$ และเส้นตรง $\theta = \alpha$ และ $\theta = \beta$ เมื่อ $r > 0$ แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$$



สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., n$ ให้
R_i เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $\theta = \theta_{i-1}$ และ $\theta = \theta_i$ ด้วยเส้นโค้ง $r = f(\theta)$
P_i เป็นจุด $(f(\theta_i), \theta_i)$ และ P_{i-1} เป็นจุด $(f(\theta_{i-1}), \theta_{i-1})$
ให้ $\theta_i^* \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$ และ P_i^* เป็นจุด $(f(\theta_i^*), \theta_i^*)$



พิจารณาวงกลมรัศมี OP_i^* ตัดกับเส้นตรง $\theta = \theta_{i-1}$ ที่จุด Q_{i-1} และเส้นตรง $\theta = \theta_i$ ที่จุด Q_i และให้ $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$

$$R_i \approx \text{ พื้นที่เซกเตอร์ } OQ_iQ_{i-1} = \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

ดังนั้น

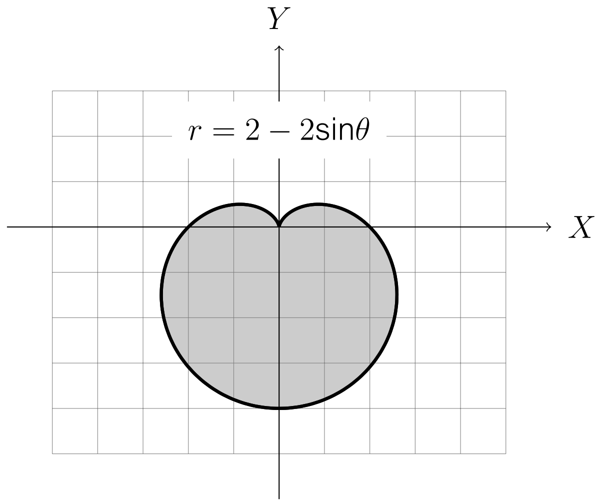
$$R = \sum_{i=1}^{n} R_i \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i$$

เมื่อแบ่ง n มาก ๆ และทำให้ $\Delta\theta_i$ มีค่าน้อยๆ และ $r = f(\theta)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง โดยใช้ผลบวกของรีมันน์จะได้ว่า

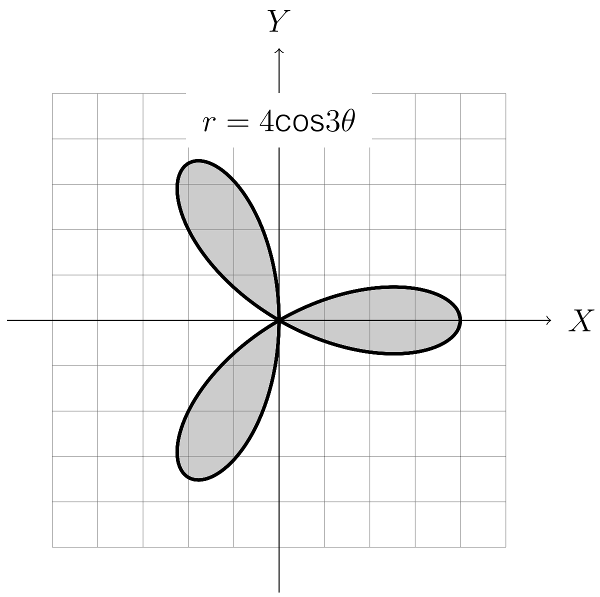
$$\text{พื้นที่ } R = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}[f(\theta_i^*)]^2 \Delta\theta_i = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

ตัวอย่าง 4.3.1 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย

1. $r = 2 - 2\sin\theta$

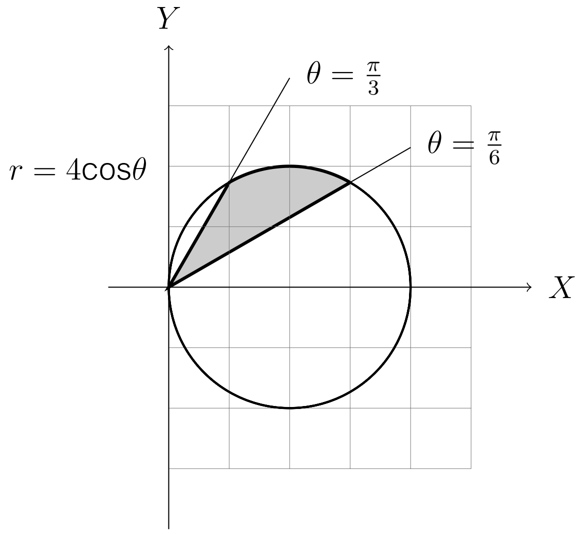


2. $r = 4\cos 3\theta$

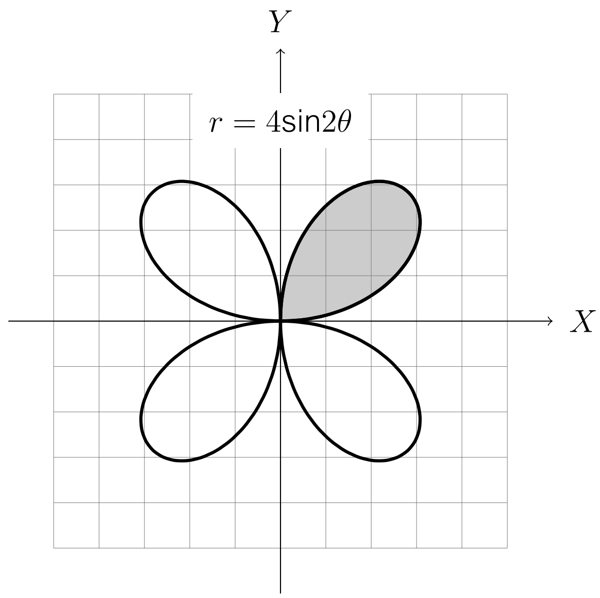


ตัวอย่าง 4.3.2 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย

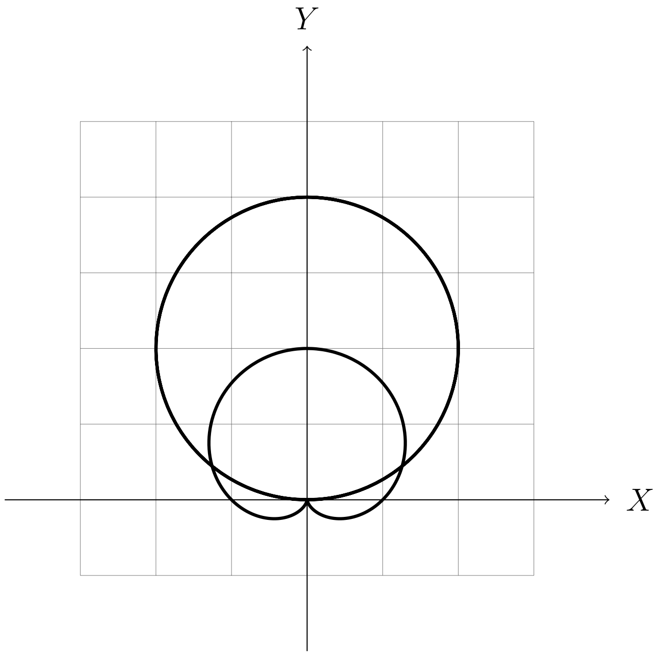
1. $r = 4\cos\theta$ บนช่วง $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$



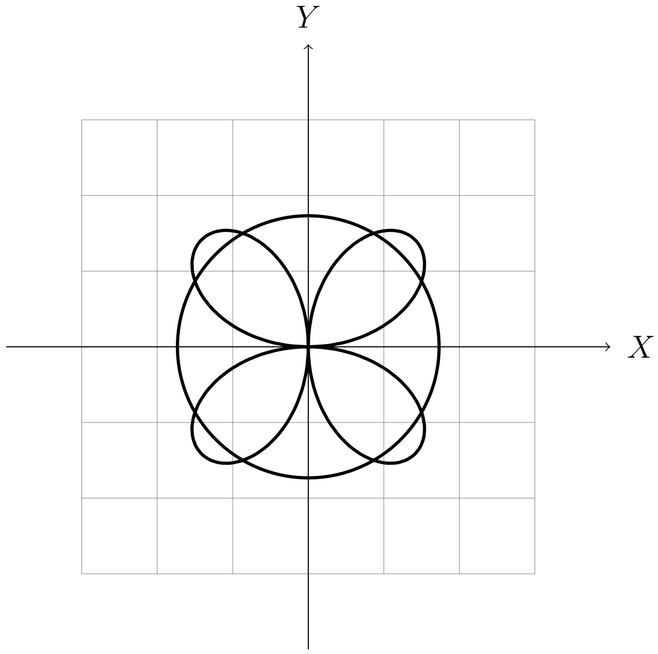
2. $r = 4\sin 2\theta$ บนช่วง $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$



ตัวอย่าง 4.3.3 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่เปิดล้อมด้วย $r = 6\sin\theta$ และ $r = 2 + 2\sin\theta$ บนช่วง $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$



ตัวอย่าง 4.3.4 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่อยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 2\theta$ และภายนอกวงกลม $r = \sqrt{3}$



แบบฝึกหัด 4.3

1. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

   1.1 $r = 1 + \cos\theta$
   1.2 $r = \sin\theta + \cos\theta$
   1.3 $r = 2\cos 2\theta$
   1.4 $r = 3 - 2\cos\theta$
   1.5 $r = 2\sin 3\theta$
   1.6 $r = 4\cos^2\theta$

2. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง

   2.1 $r = 4 + 3\cos\theta$ บนช่วง $[0, \pi]$
   2.2 $r = 8\cos 2\theta$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$
   2.3 $r = 12\sin 3\theta$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$
   2.4 $r = 2 + 2\cos\theta$ บนช่วง $[0, 2\pi]$
   2.5 $r = 3\sin\theta$ บนช่วง $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$
   2.6 $r = 2 - 2\sin\theta$ บนช่วง $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$

3. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin\theta$ และ $r = 4\sqrt{3}\cos\theta$

4. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 4\sin 2\theta$ และ $r = 4\cos\theta$

5. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2 + \sin\theta$ และ $r = 2 + \sqrt{3}\cos\theta$

6. จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณอยู่ภายในเส้นโค้ง $r = 2\sin 3\theta$ และ $r = 2\sin\theta$

7. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - x - y = 0$ และ $x^2 + y^2 + x - y = 0$

8. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $x \geq \sqrt{3}$

9. จงหาพื้นที่อยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 4y = 0$ เฉพาะส่วนที่ $y \geq 4$

บทที่ 5

ฟังก์ชันหลายตัวแปร

ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ และ n เป็นจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 จะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันค่าจริงของ n ตัวแปร** ตัวอย่างเช่น

$$f(x,y) = \sqrt{x+y},\ g(x,y,z) = xy + xz + yz \text{ และ } h(x_1,x_2,x_3,x_4) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

สำหรับฟังก์ชันที่ไม่ระบุโดเมนให้ถือว่าเป็นโดเมนใหญ่สุดที่เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}^n$

5.1 ฟังก์ชันค่าจริงสองตัวแปร

ตัวอย่าง 5.1.1 กำหนดให้ $f(x,y) = \ell\text{n}(1 - x^2 - y^2)$
จงหาค่าของ $f(0,0)$ และเขียนกราฟแสดงโดเมน

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + x - y^2}}$
จงหาค่าของ $f(3,0)$ และเขียนกราฟแสดงโดเมน

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = 12 - 2x - 3y$

ตัวอย่าง 5.1.4 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - 4y^2}$

ตัวอย่าง 5.1.5 จงหาโดเมนและเรนจ์ของฟังก์ชัน $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาค่าของฟังก์ชันที่จุดต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = x + \sqrt{y}$ ที่จุด $(0,1)$

   1.2 $f(x,y) = x + y + xy$ ที่จุด $(1,2)$

   1.3 $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ที่จุด $(1,-2,2)$

   1.4 $f(x,y,z) = x^2y^2 - x^4 + 4zx^2$ ที่จุด $(a+b, a-b, ab)$

2. จงหาโดเมนของ f พร้อมเขียนกราฟแสดงโดเมน

   2.1 $f(x,y) = \ell\text{n}(1 - x^2 + y^2)$

   2.2 $f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$

   2.3 $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{y}$

   2.4 $f(x,y) = \dfrac{1}{y - x^2}$

3. จงหาโดเมนและเรจน์ของ f

   3.1 $f(x,y) = 4x^2 + 9y^2$

   3.2 $f(x,y) = 1 - x^2 - 9y^2$

   3.3 $f(x,y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$

   3.4 $f(x,y) = -\sqrt{1 - x^2 + y^2}$

5.2 ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $D \subset \mathbb{R}^2$ และ $(x_0, y_0) \in D$ เราจะกล่าวว่า (x, y) เป็น **จุดลิมิต (limit point)** ใน D ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ $r > 0$

$$(B_r(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\}) \cap D \neq \varnothing$$

เมื่อ $B_r(x_0, y_0) = \{(x, y) : \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$

บทนิยาม 5.2.2 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และให้ $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ที่มีจุดใน D ที่อยู่ใกล้ ๆ (x_0, y_0) เราจะกล่าวว่า $f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) เขียนแทนด้วย

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ จำนวนจริง $\epsilon > 0$ มีจำนวนจริงบวก $\delta > 0$ ที่ทำให้

$$|f(x, y) - L| < \epsilon \qquad \text{ทุก ๆ จำนวน } (x, y) \in D \text{ ซึ่ง } 0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

ทฤษฎีบท 5.2.3 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และให้ c, L, M เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} c = c$
2. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} x = x_0$
3. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = y_0$
4. ถ้า $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ และ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x, y) = M$ แล้ว

   4.1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} [f(x, y) + g(x, y)] = L + M$

   4.2 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)g(x, y) = LM$

   4.3 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = \frac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

   4.4 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x, y)| = |L|$

   4.5 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \sqrt[n]{f(x, y)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L}$ เป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 5.2.4 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} (4x^2y - x^3y - 4x + 1)$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(-2,-1)} (|x + y - 1|)$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-5)} (x\sqrt{x^2 - y})$

4. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sin(xy) + x}{x - y}$

ตัวอย่าง 5.2.5 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 - y^2}$

2. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + 3xy + 2y^2}$

3. $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} \dfrac{x^2y + y^2 - 3x^2 - 3y}{xy - 3x - y + 3}$

ทฤษฎีบท 5.2.6 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า

1. มีจำนวนจริง $M > 0$ ซึ่ง $|f(x,y)| < M$ ทุก ๆ $(x,y) \in D$ ซึ่ง $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = 0$

จะได้ว่า

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)g(x,y) = 0$$

ตัวอย่าง 5.2.7 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^4}{x^4+y^4}$

ตัวอย่าง 5.2.8 จงหาลิมิตของ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y^3}{x^2+y^2}$

ทฤษฎีบท 5.2.9 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ (x_0, y_0) เป็นจุดลิมิตของ D และ C เป็นเส้นโค้งใน $\mathbb{R}^2$ ที่ผ่านจุด (x_0, y_0) จะได้ว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = L$ ก็ต่อเมื่อ

$f(x, y)$ มีลิมิตเป็น L เมื่อ (x, y) เข้าใกล้ (x_0, y_0) ตามเส้นโค้ง C

ตัวอย่าง 5.2.10 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{x^2y}{x^4 + y^2}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 5.2.11 กำหนดให้ $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^3}{x^2 + y^4}$ จงแสดงว่า $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ ไม่มีค่า

บทนิยาม 5.2.12 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ และ $(x_0, y_0) \in D$ จะกล่าวว่า f **ต่อเนื่อง**ที่จุด (x_0, y_0) ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$ มีค่า
2. $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$

และกล่าวว่า f ต่อเนื่องบนเซต $S \subset D$ ก็ต่อเมื่อ f ต่อเนื่องทุกจุดในเซต S

ตัวอย่าง 5.2.13 กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องที่จุด $(0,0)$ หรือไม่

ตัวอย่าง 5.2.14 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$ แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

ทฤษฎีบท 5.2.15 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D \subset \mathbb{R}^2$ และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริงซึ่ง $R_f \cap D_g \neq \varnothing$ สำหรับ $(x_0, y_0) \in D$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0) แล้ว $g \circ f$ จะต่อเนื่องที่จุด (x_0, y_0)

ตัวอย่าง 5.2.16 กำหนดให้ $f(x,y) = \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{x^2-y}$
แล้ว f ต่อเนื่องมีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาค่าของลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,2)}(xy+x^2)$

1.2 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}\dfrac{x^2-y^2}{x^4-y^4}$

1.3 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^2-y^2}{x^2y-xy^2}$

1.4 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y}{x^2+y^2}$

1.5 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^4}$

1.6 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{x^4+y^6}$

1.7 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y^4}{x^6+y^6}$

1.8 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$

1.9 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

1.10 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2x-y^2}{xy-y}$

1.11 $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)}\dfrac{xy-2x}{xy-6-2x+3y}$

1.12 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$

1.13 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}}{y}$

1.14 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{y^2x}{x^2+|xy|+y^2}$

1.15 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\dfrac{x^3+3xy-x^2y-3y^2}{x^4+xy^2-x^3y-y^3}$

1.16 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}\dfrac{x^3-8y^3}{x^2-xy-2y^2}$

2. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องบนจุดที่กำหนดให้หรือไม่

2.1 $f(x,y)=\dfrac{x^3y^2}{1-xy}$ ที่จุด $(1,1)$

2.2 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(1,1)\\ 1 & \text{เมื่อ } (x,y)=(1,1)\end{cases}$ ที่จุด $(1,1)$

2.3 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 1 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ ที่จุด $(0,0)$

3. กำหนดให้ $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y)=(0,0)\end{cases}$

แล้ว f ต่อเนื่องบนโดเมน f หรือไม่

4. จงพิจารณาว่า f ต่อเนื่องมีความต่อเนื่องที่จุดใดบ้าง

4.1 $f(x,y)=\sqrt{y-x}$

4.2 $f(x,y)=\dfrac{x^2+4y^2}{x^2-4y^2}$

4.3 $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2+y^2-4}}$

4.4 $f(x,y)=e^{xy}\cos(xy^2+1)$

4.5 $f(x,y)=5x^2y\ell\text{n}|1-x^2-y^2|$

4.6 $f(x,y)=\arcsin(xy)$

5.3 อนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันสองตัวแปร

บทนิยาม 5.3.1 ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $(a,b) \in D_f$
อนุพันธ์ย่อย (partial deivatives) **ของ** f **เทียบกับ** x ที่จุด (a,b) คือ

$$f_x(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h,b)-f(a,b)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

อนุพันธ์ย่อยของ f **เทียบกับ** y ที่จุด (a,b) คือ

$$f_y(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h)-f(a,b)}{h} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ดังนั้นอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน f คือ f_x และ f_y

$$f_x(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h} \qquad \text{และ} \qquad f_y(x,y) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

สัญลักษณ์ที่นิยมใช้แทนอนุพันธ์ย่อย

$$f_x(x,y) = f_x = f_1 = D_1 f = D_x f = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial x}$$
$$f_y(x,y) = f_y = f_2 = D_2 f = D_y f = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial z}{\partial y}$$

ตัวอย่าง 5.3.2 กำหนดให้ $f(x,y) = x^2 y$ จงหาค่าของ $f_x(1,0)$ และ $f_y(1,0)$ โดยใช้บทนิยาม

ตัวอย่าง 5.3.3 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = \dfrac{2x+y^2}{x+y}$

ตัวอย่าง 5.3.4 จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชัน $f(x,y) = e^{x^2y}\sin^2(5y)$

ตัวอย่าง 5.3.5 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

ความหมายทางเรขาคณิตของอนุพันธ์ย่อย

ตัวอย่าง 5.3.6 จงหาความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของพื้นผิว $z = 4 + x^2 - 4y^2$ กับระนาบ $x = 2$ ที่จุด $(2, 1, 4)$

ตัวอย่าง 5.3.7 จงหาความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของพื้นผิว $3x^2 + y^2 + z^2 = 8$ กับระนาบ $y = -1$ ที่จุด $(1, -1, -2)$

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยของฟังก์ชันต่อไปนี้

1.1 $f(x,y) = 3xy - 5x^4y^4$

1.2 $f(x,y) = \sqrt[3]{1-\sin^2(xy)}$

1.3 $f(x,y) = \ell\text{n}(\cos\sqrt{x+y})$

1.4 $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$

1.5 $f(x,y) = y^2 + x^2\tan(xy)$

1.6 $f(x,y) = 5e^{x^2y^2} + e^x\sin(x+y^2)$

1.7 $f(x,y) = e^x(\cos xy + \sin xy)$

1.8 $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right)$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^2ye^{xy}$ จงหาค่าของ $D_1f(1,1)$ และ $D_2f(1,1)$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}$ จงหาค่าของ $f_1(2,1)$ และ $f_2(2,1)$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}e^{\sin(x^2y)}$ จงหาค่าของ $f_x(1,0)$

5. กำหนดให้ $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3+y^3}$ จงหาค่าของ $f_x(0,0)$

6. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   จงหาค่าของ $f_x(0,0)$ และ $f_y(0,0)$

7. กำหนดให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+4y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

   จงหาค่าของ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$

8. ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-xy}{x+y} & \text{เมื่อ } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x+y = 0 \end{cases}$

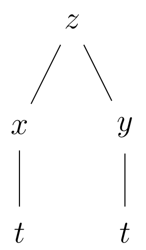
   จงหาค่าของ $D_1f(0,y)$ เมื่อ $y \neq 0$ และ $D_2f(x,0)$ เมื่อ $x \neq 0$

9. จงหาความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของพื้นผิว $x^2+3y^2-z=0$ กับระนาบ $x=2$ ที่จุด $(2,1,7)$

10. จงหาความชันของเส้นโค้งที่เป็นรอยตัดของพื้นผิว $9x^2-36y^2-4z^2=36$ กับระนาบ $y=-1$ ที่จุด $(\sqrt{12},-1,-3)$

5.4 กฎลูกโซ่

ทฤษฎีบท 5.4.1 กฎลูกโซ่ (Chain Rule)
กำหนดให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $x = x(t), y = y(t)$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งตัวแปร ถ้า x, y หาอนุพันธ์ได้แล้ว

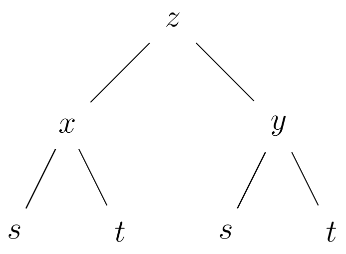


$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

ตัวอย่าง 5.4.2 กำหนดให้ $z = x^2y, \quad x = t\text{cos}t$ และ $y = t\text{sin}t$ จงหา $\dfrac{dz}{dt}$

ตัวอย่าง 5.4.3 กำหนดให้ $z = \ell\text{n}(2x^2 + xy), \quad x = \sqrt{t}$ และ $y = 3t - 1$
จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

ทฤษฎีบท 5.4.4 กำหนดให้ $z = f(x, y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร และ $x = x(s, t), y = y(s, t)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร ถ้า x, y หาอนุพันธ์ได้แล้ว



$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

ตัวอย่าง 5.4.5 กำหนดให้ $z = e^{xy}$, $x = 2s + t$ และ $y = \frac{s}{t}$ จงหา $\frac{\partial z}{\partial s}$ และ $\frac{\partial z}{\partial t}$

ตัวอย่าง 5.4.6 กำหนดให้ $u = 3s - t^2$, $s = x + y\ell\text{n}x$ และ $t = x^2 - y\ell\text{n}y$
จงหา $\frac{\partial u}{\partial x}$ และ $\frac{\partial u}{\partial y}$ เมื่อ $(x, y) = (1, 1)$

ตัวอย่าง 5.4.7 จงหา $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ เมื่อ z นิยามโดยปริยายซึ่งเป็นฟังก์ชันของ x และ y และสอดคล้องสมการ $x^3 + y^3 + z^3 + 2xyz = 1$

ตัวอย่าง 5.4.8 กำหนดให้ $z = f(u - v, v - u)$ จงแสดงว่า $\dfrac{\partial z}{\partial u} + \dfrac{\partial z}{\partial v} = 0$

ตัวอย่าง 5.4.9 จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยกลม ในขณะที่ความสูง 30 นิ้ว และรัศมีของฐานของกรวยยาว 20 นิ้ว ถ้าความสูงกำลังเพิ่มขึ้นในอัตรา 2 นิ้วต่อนาที และรัศมีของฐานกำลังลดลงในอัตรา 1 นิ้วต่อวินาที

ตัวอย่าง 5.4.10 น้ำรั่วออกจากถังรูปทรงกระบอกด้วยอัตรา $\frac{4}{5}\pi$ ลูกบาศก์ฟุตต่อนาที ถ้าถังขยายตัวลักษณะที่ยังคงรูปเป็นทรงกระบอกอยู่ โดยรัศมีเพิ่มด้วยอัตรา 0.002 ฟุตต่อนาที จงหาความสูงของน้ำในถังจะเปลี่ยนแปลงไปในอัตราเท่าใด ขณะที่รัศมีของถังเป็น 2 ฟุต และปริมาตรของน้ำในถังเป็น 20π ลูกบาศก์ฟุต

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงหาอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2e^y$, $x = 2\sin t$ และ $y = t^4$

   1.2 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $x = \ln t$ และ $y = \cos t^2$

   1.3 $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $z = x^2y^3 + x\sin y + tx$, $x = t + \dfrac{1}{t}$ และ $y = \sqrt{t}$

   1.4 $\dfrac{\partial z}{\partial s}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ เมื่อ $z = 3x^2 + xy + 2y^2 + 3x - y$, $x = 2s - 3t$ และ $y = st + s^2$

   1.5 $\dfrac{\partial z}{\partial t}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ เมื่อ $z = e^{\frac{y}{x}}$, $x = r\cos^2 t$ และ $y = r^2\sin t$

   1.6 $\dfrac{\partial z}{\partial r}$ และ $\dfrac{\partial z}{\partial \theta}$ เมื่อ $z = xye^{xy}$, $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$

2. กำหนดให้ $z = \sqrt{5 + x - 2xy^4}$ เมื่อ $x = t^2$ และ $y = t - 1$
   จงหา $\dfrac{dz}{dt}$ เมื่อ $t = 1$

3. กำหนดให้ $z = f(x^2 - y^2)$ จงแสดงว่า $x\dfrac{\partial z}{\partial y} + y\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$

4. ถ้ารัศมีของกรวยกลมใบหนึ่งกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1 เซนติเมตรต่อนาที และความสูงกำลังลดลงด้วยอัตรา 2 เซนติเมตรต่อนาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรกรวยใบนี้ เมื่อรัศมีและความสูงของกรวยเป็น 10 และ 20 เซนติมเตรตามลำดับ

5. สี่เหลี่ยมผืนผ้ารูปหนึ่ง ด้านกว้างกำลังเพิ่มขึ้นด้วยอัตรา 1 ฟุตต่อวินาที และด้านยาวกำลังลดลงด้วยอัตรา 2 ฟุตต่อวินาที จงหาอัตราการเปลี่ยนแปลงของพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ เมื่อความยาวของด้านกว้างเป็น 6 ฟุต และความยาวด้ายยาวเป็น 12 ฟุต

6. รางน้ำอันหนึ่งยาว 300 เซนติเมตร หน้าตัดเป็นรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่ว ซึ่งมีมุมหนึ่งเป็นมุมฉาก ถ้าไขน้ำลงในรางด้วยอัตรา 50,000 ลูกบาศก์เซนติเมตรต่อวินาที ระดับน้ำในรางจะสูงขึ้นด้วยอัตราเท่าใด เมื่อน้ำลึก 150 เซนติเมตร

5.5 อนุพันธ์อันดับสูง

บทนิยาม 5.5.1 ให้ $z = f(x,y)$ เป็นฟังก์ชันสองตัวแปร จะเรียก $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ และ $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ว่า**อนุพันธ์ย่อยอันดับหนึ่ง** (fisrt-order partial derivative) และนิยาม**อนุพันธ์ย่อยอันดับสอง** (second-order partial derivative) ดังนี้

1. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, f_{xx}, f_{11} หรือ $D_{11}f$
2. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial x})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, f_{xy}, f_{12} หรือ $D_{12}f$
3. $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, f_{yx}, f_{21} หรือ $D_{21}f$
4. $\dfrac{\partial}{\partial y}(\dfrac{\partial f}{\partial y})$ เขียนแทนด้วย $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, f_{yy}, f_{22} หรือ $D_{22}f$

อนุพันธ์ย่อยอันดับอื่น ๆ นิยามทำนองเดียวกัน

ตัวอย่าง 5.5.2 จงหาอนุพันธ์อันดับสองของ $f(x,y) = ye^{xy} + x^3y^2$

ตัวอย่าง 5.5.3 กำหนดให้ $f(x,y) = x^3y^2 - x^2\sin y$ จงหา f_{xxy}

ตัวอย่าง 5.5.4 ให้ $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{เมื่อ } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{เมื่อ } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

จงหาค่าของ $D_{12}f(0,0)$ และ $D_{21}f(0,0)$

ตัวอย่าง 5.5.5 กำหนดให้ $z = f(x, y)$, $x = 2t + 3s$ และ $y = st$ จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial s \partial t}$

ตัวอย่าง 5.5.6 กำหนดให้ $z = f(x, y)$, $x = x(r, \theta)$ และ $y = y(r, \theta)$
จงหา $\dfrac{\partial^2 z}{\partial r^2}$ และ $\dfrac{\partial^2 z}{\partial \theta \partial r}$

แบบฝึกหัด 5.5

1. จงหาอนุพันธ์ย่อยอันดับสองของแต่ละข้อต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = x^2 - 2xy^3 + 5y^6 + 3$

   1.2 $f(x,y) = \ell\mathrm{n}(x^2 - 5y)$

   1.3 $f(x,y) = xe^y + ye^x$

   1.4 $f(x,y) = \sin(\cos(2x+3y))$

   1.5 $f(x,y) = e^{xy} + y\sqrt{x}$

2. กำหนดให้ $f(x,y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y^3}$

3. กำหนดให้ $f(x,y) = (2x+y)^5$ จงหา $\dfrac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$ และ $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x^2}$

4. กำหนดให้ $f(x,y) = x^3e^{-5y}$ จงหา $f_{xyy}(0,1)$, $f_{xxx}(0,1)$ และ $f_{yyxx}(0,1)$

5.6 การประมาณค่าเชิงเส้น

บทนิยาม 5.6.1 ค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของ f ที่จุด (x, y) เขียนแทนด้วย $df(x, y)$ และกำหนดโดย

$$df(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y$$

หรืออาจจะเขียน $\Delta x = dx$ และ $\Delta y = dy$

$$df(x, y) = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.2 กำหนดให้ $f(x, y) = x^2 \sin xy$ จงหา $df(x, y)$

เราจะประมาณค่า $f(x + dx, y + dy) - f(x, y) \approx df(x, y)$ เมื่อ $\|(dx, dy)\|$ มีค่าน้อย ๆ เราจะได้สูตร**การประมาณค่าเชิงเส้น** (Linear approximation) ดังนี้

$$f(x + dx, y + dy) \approx f(x, y) + f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

ตัวอย่าง 5.6.3 จงใช้ค่าอนุพันธ์ประมาณค่าของ $\sqrt[3]{(2.01)^2 + (1.98)^2}$

ตัวอย่าง 5.6.4 จงหาปริมาตรโดยประมาณของกล่องรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีฐานเป็นรูปสี่เหลี่ยมจตุรัสซึ่งมีความยาวด้านละ 5.003 เซนติเมตร และสูง 9.997 เซนติเมตร

แบบฝึกหัด 5.6

1. จงหาค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   1.1 $f(x,y) = \sqrt{x^2 + xy}$

   1.2 $f(x,y) = e^x \cos xy$

   1.3 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$

   1.4 $f(x,y) = x^3 \sin x \ell n y$

2. จงประมาณค่าต่อไปนี้

   2.1 $\sqrt{(3.01)^2 + (3.97)^2}$

   2.2 $(1.002)e^{0.001}$

   2.3 $\frac{1}{\sqrt[3]{(0.003)^3+(7.979)^3}}$

   2.4 $(0.99)^{3.001}$

3. ทรงกระบอกใบหนึ่งรัศมีฐานเป็น 5.026 เซนติเมตร และวัดส่วนสูงได้ 24.003 เซนติเมตร จงคำนวณปริมาตรโดยประมาณของทรงกระบอกนี้

4. กรวยกลมใบหนึ่งมีการเปลี่ยนแปลงรัศมีจาก 3 ฟุต และสูง 4 ฟุต ไปเป็นรัศมี 2.9 ฟุต และสูง 4.3 ฟุต จงหาค่าส่วนการเปลี่ยนแปลงของปริมาตรของกรวยใบนี้โดยใช้ค่าอนุพันธ์

5. ในการคำนวณปริมาตรของกล่องรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากซึ่งวัดความกว้าง ความยาว และความสูงได้ 10 13 และ 16 นิ้วตามลำดับ ถ้าวัดความผิดพลาดไม่เกิน 0.03 นิ้ว จงหาขอบเขตของความผิดพลาดสัมพัทธ์

บทที่ 6

อินทิกรัลของฟังก์ชันสองตัวแปร

6.1 อินทิกรัลบนโดเมนรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า

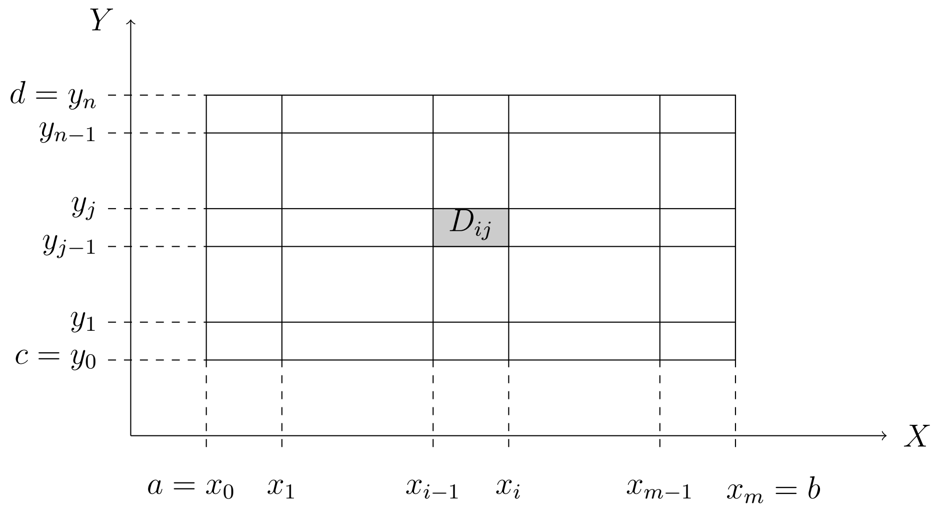
ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a, b] \times [c, d]$ พิจารณาการแบ่งช่วง
แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วง ด้วยจุด $x_0, x_1, x_2, ..., x_m$ โดยที่

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_m = b$$

แบ่ง $[c, d]$ ออกเป็น n ช่วง ด้วยจุด $y_0, y_1, y_2, ..., y_n$ โดยที่

$$c = y_0 < y_1 < y_2 < ... < y_n = d$$

ให้ $D_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ เป็นสี่เหลี่ยมผืนผ้าย่อยของรูป ij เมื่อ $i = 1, 2, ..., m$ และ $j = 1, 2, ..., n$



ให้ $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ และ $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$ และ $D_{ij} = \Delta A_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j$ ให้ $(x_{ij}, y_{ij}) \in D_{ij}$ แล้ว

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij}) \Delta A_{ij}$$

เรียก S_{mn} ว่า **ผลบวกรีมันน์** (Reimann sum) ของ f บน D

ถ้าเราแบ่ง Δx_i และ Δy_i มีค่าเข้าใกล้ศูนย์เมื่อ m และ n มีค่ามาก ๆ และ

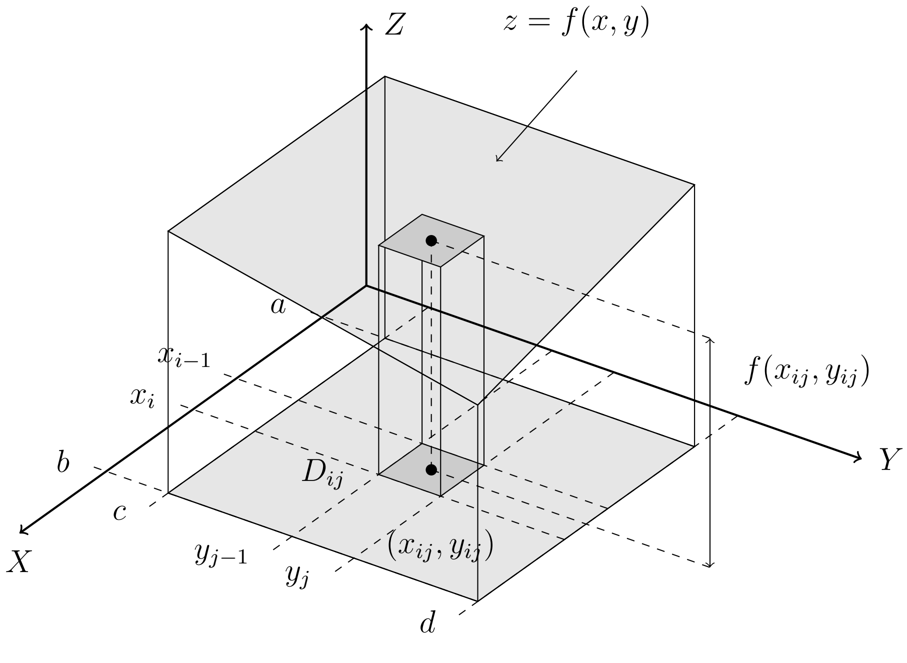
$$\lim_{m\to\infty, n\to\infty} S_{mn} = L$$

แล้วเราจะกล่าวว่า f เป็นฟังก์ชันที่**อินทิเกรตได้** (integrable) บน D และเรียกค่าลิมิต L ว่า**อินทิกรัลสองชั้น** (double integral) ของ f บน D ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\iint_D f \qquad \text{หรือ} \qquad \iint_D f\,dA \qquad \text{หรือ} \qquad \iint_D f\,dxdy$$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x,y) \geq 0$ ทุก $(x,y) \in D$ ซึ่งอินทิเกรตได้บน D

$f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij} =$ ปริมาตรรูปทรงสี่เหลี่ยมมุมฉากที่มีความสูง $f(x_{ij}, y_{ij})$ บนสี่เหลี่ยมผืนผ้า D_{ij}



ดังนั้น

$$\iint_D f\,dA = \text{ปริมาตรรูปทรงตันซึ่งอยู่ภายใต้ผิว } z = f(x,y) \text{ บน } D$$

สำหรับ $f(x,y) = 1$ จะได้ว่า

$$\iint_D dA = \text{พื้นที่อาณาบริเวณของ } D$$

ตัวอย่าง 6.1.1 กำหนดให้ $f(x, y) = xy$ และ $D = [0, 1] \times [1, 2]$ จงหา $\displaystyle\iint_D dA$ โดยใช้ลิมิตของผลบวกรีมันน์

เนื่องจากการคำนวนค่าอินทิกรัลสองชั้นผ่านลิมิตของผลบวกรีมันน์ค่อนข้างยุ่งยาก เราจึงพิจารณา เหมือนกับการอินทิเกรตในหนึ่งตัวแปร

$$\int f(x,y)\,dx \quad \text{มอง } y \text{ เป็นค่าคงตัว} \qquad \text{และ} \qquad \int f(x,y)\,dy \quad \text{มอง } x \text{ เป็นค่าคงตัว}$$

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_1^2 xy\,dydx &= \int_0^1 \left(\int_1^2 xy\,dy\right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{2}xy^2\right]_{y=1}^{y=2} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{2}x2^2 - \frac{1}{2}x1^2\right] dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x\,dx = \left[\frac{3}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{4}\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 6.1.2 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\int_{-2}^{4}\int_{1}^{3}(3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2)\,dydx$

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{1}^{2}\frac{x+y}{y}\,dydx$

ทฤษฎีบท 6.1.4 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เมื่อ $D = [a,b] \times [c,d]$
ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D แล้ว

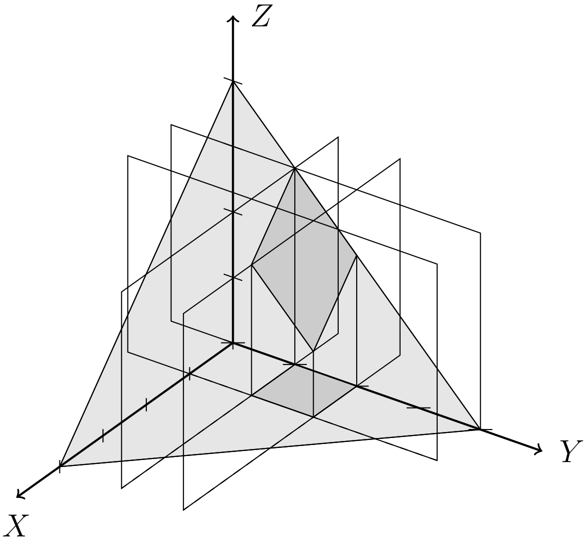
$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy$$

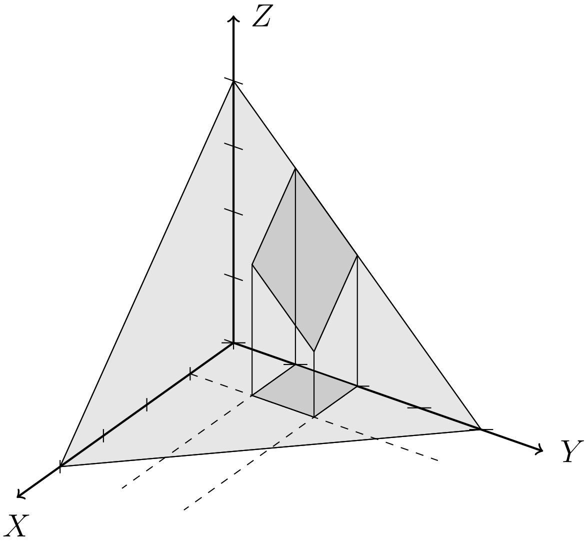
ตัวอย่าง 6.1.5 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\int_0^3 \int_0^1 2x\sqrt{x^2+y}\ dxdy$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\iint_D x\sin(xy)\,dA$ เมื่อ $D = [0,1] \times [0, \frac{\pi}{2}]$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาปริมาตรรูปทรงตันที่อยู่เหนือระนาบ XY ซึ่งปิดล้อมด้วย

ระนาบ $x + y + z = 4$ และปิดล้อมด้วยระนาบ $x = 0$, $x = 1$, $y = 1$ และ $y = 2$





แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้

1.1 $\int_1^2 \int_2^3 (x^2y + xy^2)\, dxdy$

1.2 $\int_0^1 \int_1^6 \dfrac{1}{x+1}\, dxdy$

1.3 $\int_{-2}^2 \int_3^8 \, dxdy$

1.4 $\int_0^2 \int_0^1 y\sin x\, dydx$

1.5 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_1^2 y\cos(xy)\, dxdy$

1.6 $\int_0^{\ell n2} \int_0^{\ell n3} e^{x+y}\sin x\, dxdy$

2. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

2.1 $\displaystyle\iint_D \frac{y}{(xy+1)^2} dA$ $\quad D = [0,1] \times [0,1]$

2.2 $\displaystyle\iint_D y dA$ $\quad D = \{(x,y) \,:\, -3 \le x \le 3,\ -2 \le y \le 5\}$

2.3 $\displaystyle\iint_D x\sqrt{1-x^2} dA$ $\quad D =$ อาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $x = 0, x = 1, y = 2$ และ $y = 3$

2.4 $\displaystyle\iint_D x\cos(xy)\cos^2(\pi x) dA$ $\quad D = [0, \frac{1}{2}] \times [0, \pi]$

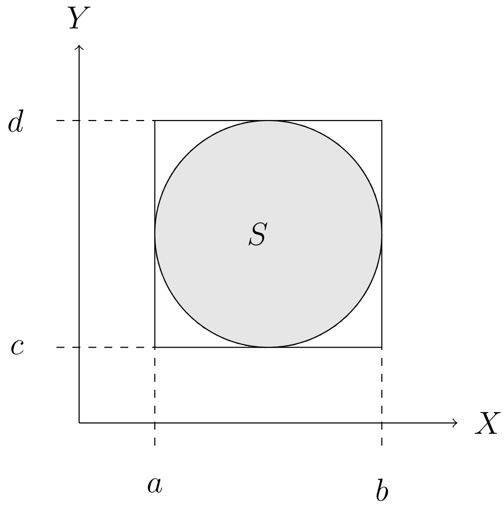
3. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่อยู่ภายใต้พื้นที่ผิว $z = 4x^3 + 3x^2y$ และอยู่เหนือรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า $D = \{(x,y) \,:\, 1 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 4\}$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วย

$$\text{ระนาบ } x = 0, z = 0, x = 5, z - y = 0 \text{ และ } z = 6 - 2y$$

6.2 อินทิกรัลบนโดเมนทั่วไป

ให้ $f : S \longrightarrow \mathbb{R}$ เมื่อ $S \subset D = [a,b] \times [c,d]$



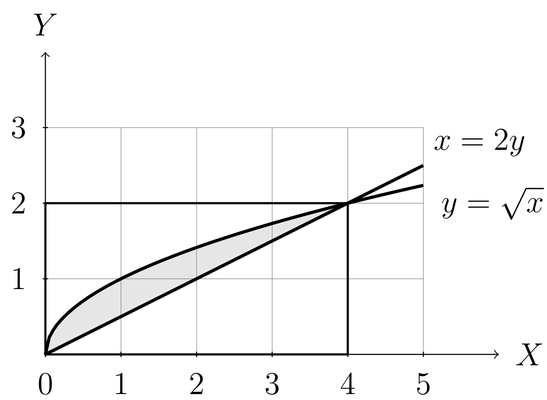
ให้ $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S โดยนิยามค่าของอินทิกรัลเป็น

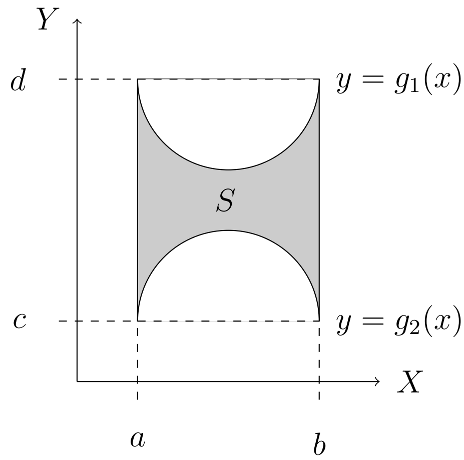
$$\iint\limits_S f = \iint\limits_D \tilde{f}$$

ตัวอย่าง 6.2.1 กำหนดให้ $f(x,y) = xy$ และ S เป็นอาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยเส้นโค้ง $y = \sqrt{x}$ และเส้นตรง $x = 2y$ จงหาค่าของ $\iint\limits_S f$



เราสามารถหาอินทิกรัลสองชั้นโดยการพิจารณาโดเมนได้สองลักษณ์คือ

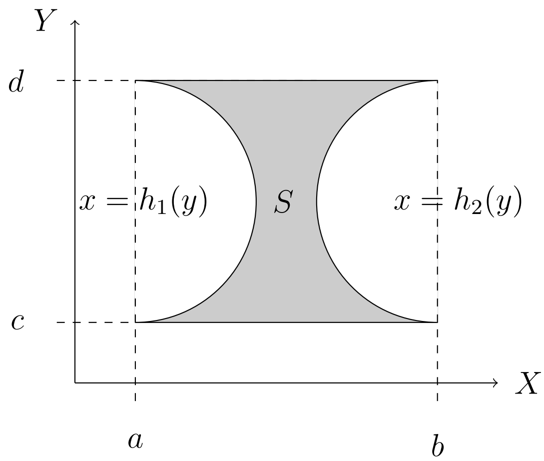
1. **แบบที่ 1** $S = \{(x, y) \,:\, g_1(x) \le y \le g_2(x), a \le x \le b\}$



$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } c \le y < g_1(x) \\ f(x, y) & \text{เมื่อ } g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(x) < y \le d \end{cases} \qquad \text{และ}$$

$$\iint_S f = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)\, dydx$$

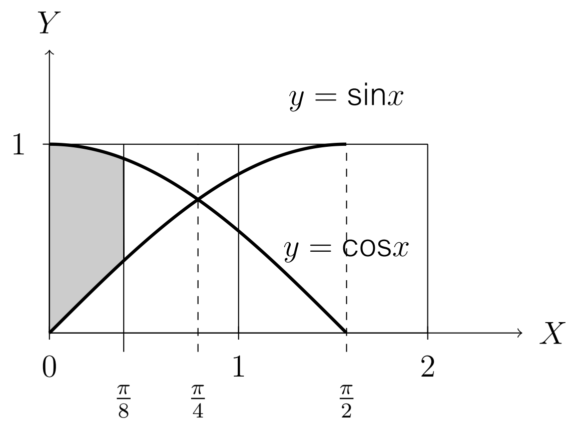
2. **แบบที่ 2** $S = \{(x, y) \,:\, h_1(y) \le x \le h_2(y), c \le y \le d\}$



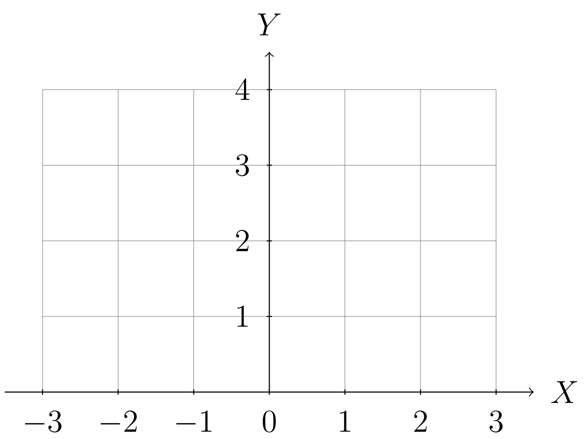
$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \le x < h_1(y) \\ f(x, y) & \text{เมื่อ } h_1(y) \le x \le h_2(y) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(y) < x \le b \end{cases} \qquad \text{และ}$$

$$\iint_S f = \int_a^b \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\, dxdy$$

ตัวอย่าง 6.2.2 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint_S y$ เมื่อ $S = \{(x,y) : 0 \le x \le \frac{\pi}{8}, \sin x \le y \le \cos x\}$

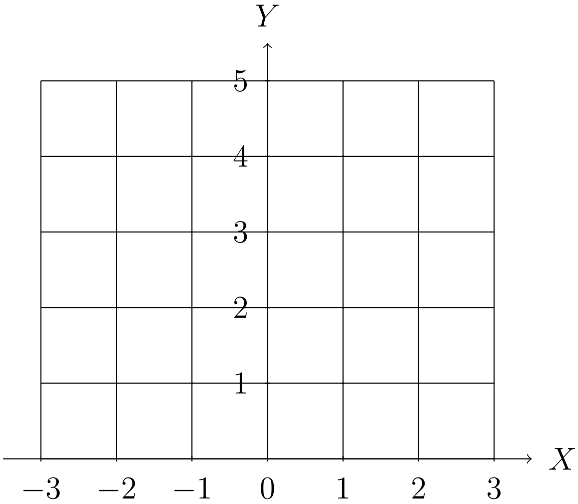


ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้นของ $f(x,y) = x - 3y^2$ บนอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = |x| + 1$ และ $y = 3$

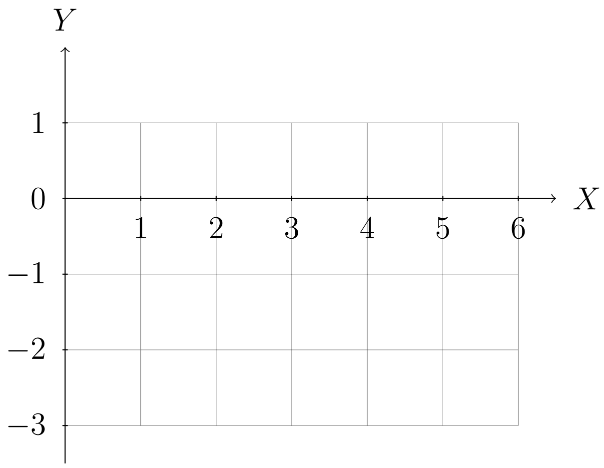


ตัวอย่าง 6.2.4 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint\limits_S xy^2\,dA$

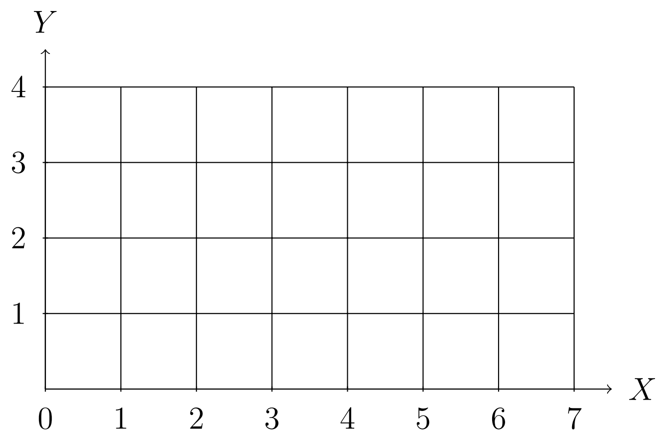
เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณที่ล้อมรอบด้วย $y = x^2,\ \ x + y = 2$ และ $y = \dfrac{1}{2}$ โดยที่ $y \geq x^2$



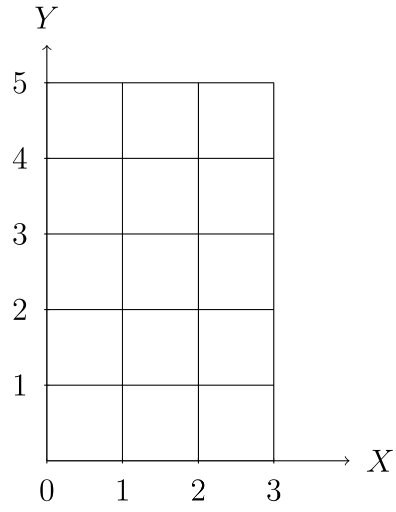
ตัวอย่าง 6.2.5 จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของ $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{1+y^2}^{5} f(x,y)\,dxdy$



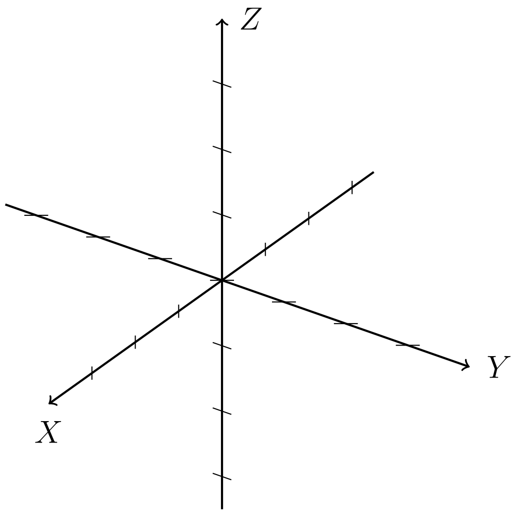
ตัวอย่าง 6.2.6 จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรตของ $\displaystyle\int_{2}^{6}\int_{|x-3|}^{\frac{x}{2}} f(x,y)\,dydx$



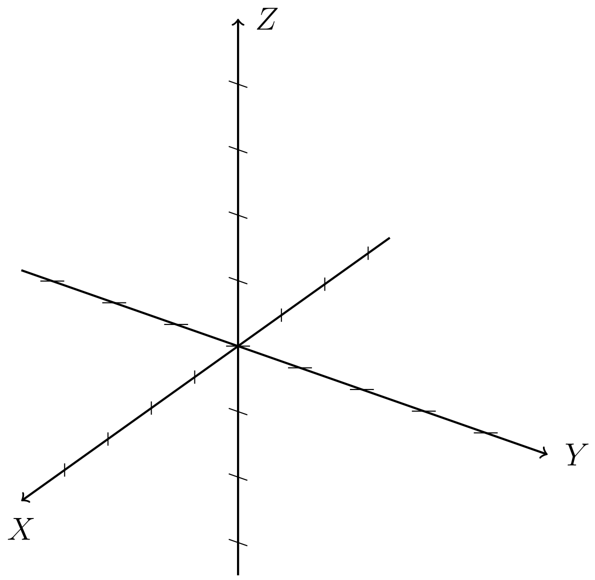
ตัวอย่าง 6.2.7 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3}\,dxdy$



ตัวอย่าง 6.2.8 จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งปิดล้อมด้วยพื้นผิว $z = 4 - x^2 - y^2$ และระนาบ $x + y = 1$ โดยที่ $x + y \leq 1$



ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาปริมาตรทรงตันในอัฐภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่เหนือระนาบ XY และปิดล้อมด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 = 4$ และระนาบ $y + z = 4$



แบบฝึกหัด 6.2

1. จงเปลี่ยนลำดับการอินทิเกรต และเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณของการอินทิเกรต

1.1 $\displaystyle\int_{-2}^{0}\int_{2-\sqrt{4-x^2}}^{2+\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dydx$

1.2 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{1}^{e^y} f(x,y)\,dxdy$

1.3 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{x^2-4}^{0} f(x,y)\,dxdy$

1.4 $\displaystyle\int_{0}^{3}\int_{(y-1)^2}^{y+1} f(x,y)\,dxdy$

2. จงหาค่าของ

2.1 $\displaystyle\int_{0}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} x\,dxdy$

2.2 $\displaystyle\int_{1}^{2}\int_{x}^{2x} \frac{1}{(x+y)^3}\,dydx$

2.3 $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{y} xye^{x^2}\,dxdy$

2.4 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{1} |x-y|\,dydx$

2.5 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{y} x\sqrt{y^2-x^2}\,dxdy$

2.6 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\int_{0}^{x^2} \frac{1}{x}\cos\left(\frac{y}{x}\right)\,dydx$

2.7 $\displaystyle\int_{1}^{3}\int_{0}^{x} \frac{2}{x^2+y^2}\,dydx$

2.8 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\sqrt{x}}^{\sqrt[3]{x}} (1+y^6)\,dydx$

2.9 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{4x}^{x} e^{-y^2}\,dydx$

2.10 $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{\arcsin y}^{\frac{\pi}{2}} \sec^2(\cos x)\,dxdy$

3. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\displaystyle\iint_S f(x,y)\,dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

3.1 $f(x,y)=\cos(x+y)$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=x$, $x=\pi$ และแกน X

3.2 $f(x,y)=xy^2$ S คืออาณาบริเวณเหนือเส้นตรง $y=1-x$ และอยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=1$

3.3 $f(x,y)=\dfrac{2y-1}{x+1}$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วย $y=2x-4$, $y=0$ และ $x=1$

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันที่ปิดล้อมด้วย

4.1 ระนาบ $x+2y+3z=6$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

4.2 พื้นผิว $z=1-x^2-y^2$ เหนือระนาบ XY

4.3 ระนาบ $x+y+z=3$, $y=x$, $x+y=2$, $x=0$ และ $z=0$ โดยที่ $x+y\geq 2$

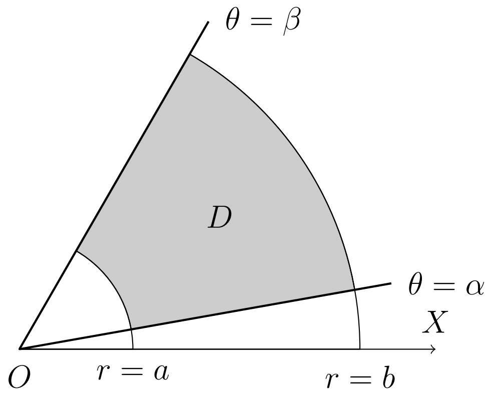
4.4 พื้นผิว $4x^2+y^2=9$ ระนาบ $z=y+3$ และอยู่เหนือระนาบ XY

4.5 พื้นผิว $z=x^2+y^2$ และ $x^2+y^2=4$ ในอัฐภาคที่หนึ่ง

6.3 อินทิกรัลบนระบบพิกัดเชิงขั้ว

พิจารณาโดเมน

$$D = \{(r, \theta) \,:\, a \leq r \leq b,\, \alpha \leq \theta \leq \beta\}$$



ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D จะแบ่งอาณาบริเวณ D ออกเป็นส่วนย่อย ๆ คือ แบ่ง $[a, b]$ ออกเป็น m ช่วงย่อยด้วยจุด $r_0, r_1, r_2, ..., r_m$ โดยที่

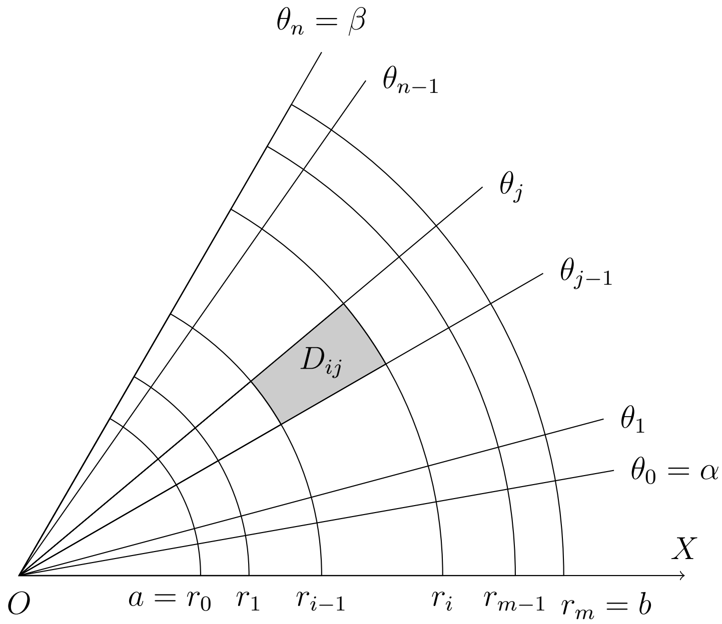
$$a = r_0 < r_1 < r_2 < ... < r_m = b$$

แบ่ง $[\alpha, \beta]$ ออกเป็น n ช่วงย่อยด้วยจุด $\theta_0, \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$ โดยที่

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < ... < \theta_n = \beta$$

สำหรับ $i = 1, 2, 3, ..., m$ และ $j = 1, 2, 3, ..., n$ ให้

$$D_{ij} = \{(r, \theta) \,:\, r_{i-1} \leq r \leq r_i,\, \theta_{j-1} \leq \theta \leq \theta_j\}$$

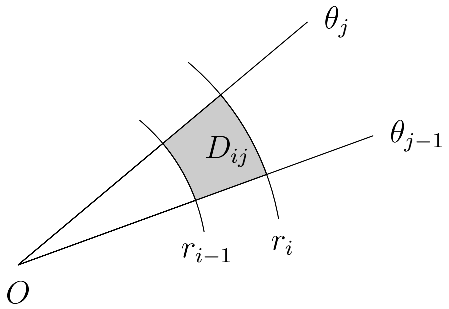


ให้ (x_{ij}, y_{ij}) เป็นจุดใน D_{ij} ดังนั้น

$$x_{ij} = r_{ij}\cos\theta_{ij} \quad \text{และ} \quad y_{ij} = r_{ij}\sin\theta_{ij} \qquad \text{เมื่อ} \quad r_{i-1} \le r_{ij} \le r_i \text{ และ } \theta_{j-1} \le \theta_{ij} \le \theta_j$$

และ ΔA_{ij} เป็นพื้นที่ของอาณาบริเวณ D_{ij} ดังนั้นผลบวกรีมันน์คือ

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{ij}, y_{ij})\Delta A_{ij}$$



$$\begin{aligned}
\Delta A_{ij} &= \frac{1}{2}r_i^2(\theta_j - \theta_{j-1}) - \frac{1}{2}r_{i-1}^2(\theta_j - \theta_{j-1}) = \frac{1}{2}(r_i^2 - r_{i-1}^2)(\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1})(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \\
&= r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1}) \qquad (\text{ เลือก } r_{ij} = \frac{1}{2}(r_i + r_{i-1}) \text{ เป็นจุดกึ่งกลาง })
\end{aligned}$$

ดั้นนั้น

$$S_{mn} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(r_{ij}\cos\theta_{ij}, r_{ij}\sin\theta_{ij})r_{ij}(r_i - r_{i-1})(\theta_j - \theta_{j-1})$$

เนื่องจาก f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D ดังนั้น

$$\iint_D f = \lim_{m\to\infty, n\to\infty} S_{mn} = \int_{\alpha}^{\beta}\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, dr d\theta$$

สรุปได้ว่า

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_{\alpha}^{\beta}\int_a^b f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, dr d\theta$$

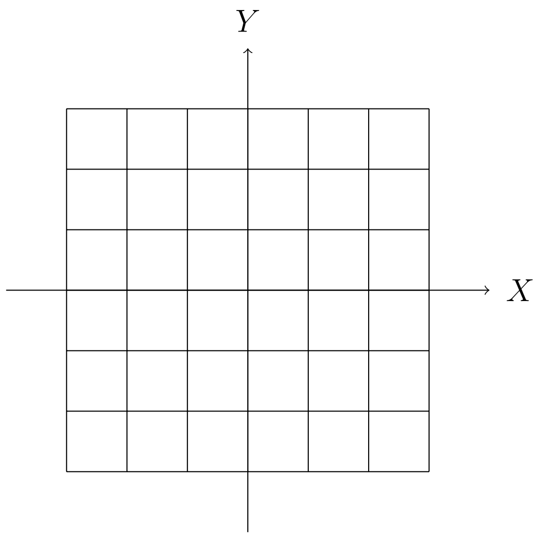
หรือ

$$\iint_D f(x,y)\, dA = \int_a^b\int_{\alpha}^{\beta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\, d\theta dr$$

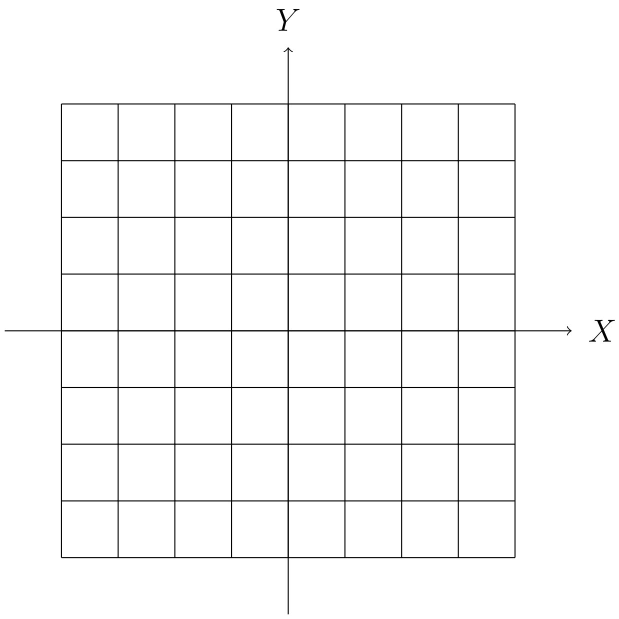
ตัวอย่าง 6.3.1 กำหนดให้ $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^{\pi}\int_0^{1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ D เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่ง ซึ่งอยู่ระหว่างวงกลม $x^2+y^2=1$ และ $x^2+y^2=4$ จงหา

$$\iint\limits_D \frac{1}{x^2+y^2+1}\,dA$$



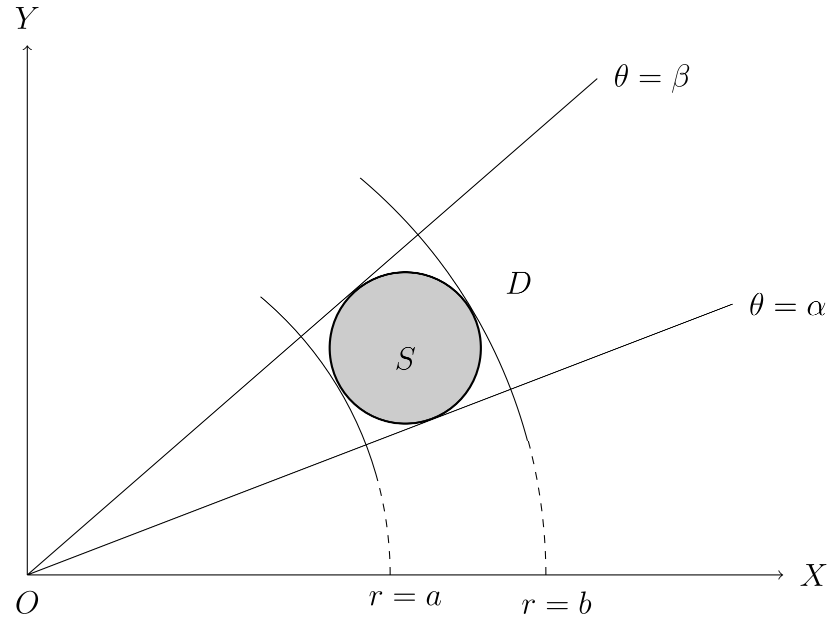
ตัวอย่าง 6.3.3 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} e^{x^2+y^2}\,dxdy$



การอินทิเกรตบนโดเมน S ใดๆ เมื่อ $f : S \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้ เราจะหาค่าของ $\iint\limits_S f$ โดยการสร้างรูป

$$D = \{(r,\theta) \,:\, a \le r \le b,\, \alpha \le \theta \le \beta\}$$

ล้อมรอบ S



และกำหนดฟังก์ชัน $\tilde{f} : D \to \mathbb{R}$ นิยามโดย

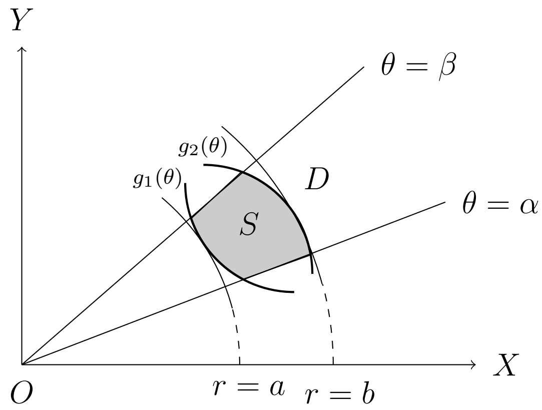
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{เมื่อ } x \in S \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin S \end{cases}$$

ถ้า $\tilde{f}$ เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน D เราจะกล่าวได้ว่า f เป็นฟังก์ชันที่อินทิเกรตได้บน S โดยนิยามค่าของอินทิกรัลเป็น

$$\iint\limits_S f(x,y)\,dA = \iint\limits_D \tilde{f}(x,y)\,dA$$

การหาอินทิกรัลสองชั้นในระบบพิกัดเชิงขั้วพิจารณาโดเมนได้ 2 แบบคือ

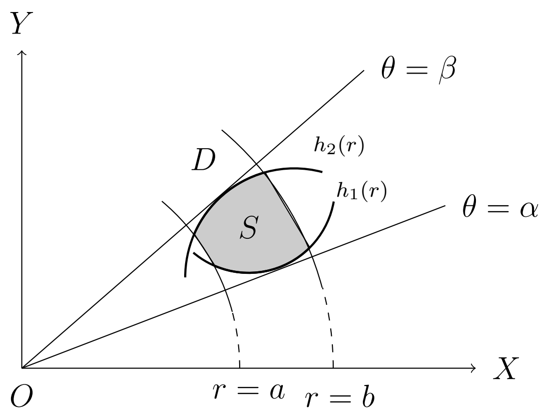
1. **แบบที่ 1** $S = \{(r,\theta)\ :\ g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$



$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } a \le r < g_1(\theta) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } g_1(\theta) \le r \le g_2(\theta) \\ 0 & \text{เมื่อ } g_2(\theta) < r \le b \end{cases}$$

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_\alpha^\beta \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,dr d\theta$$

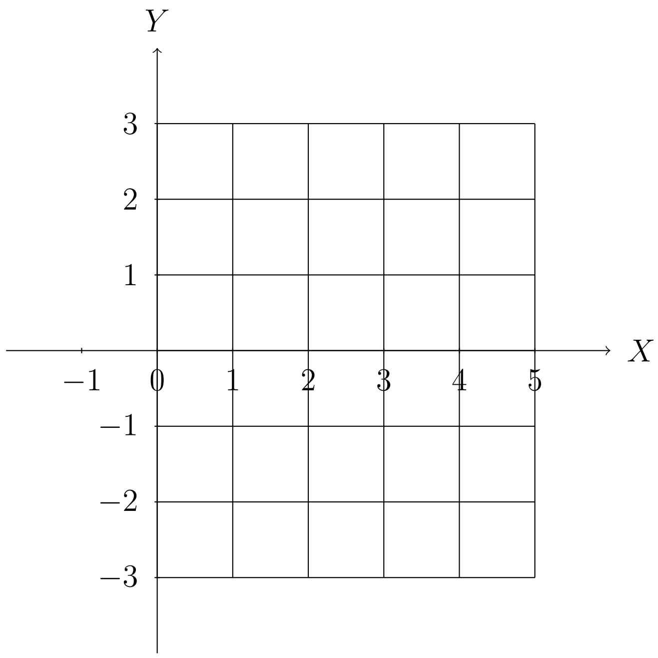
2. **แบบที่ 2** $S = \{(r,\theta)\ :\ h_1(r) \le \theta \le h_2(r), a \le r \le b\}$



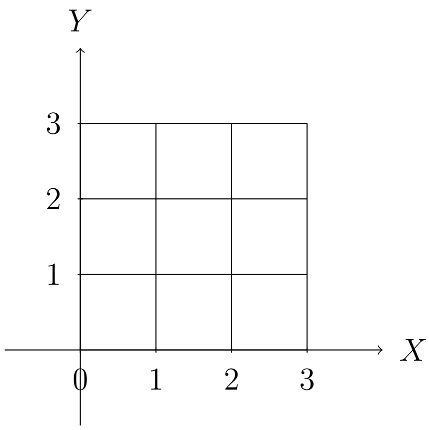
$$\tilde{f}(x,y) = \tilde{f}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } \alpha \le \theta < h_1(r) \\ f(r\cos\theta, r\sin\theta) & \text{เมื่อ } h_1(r) \le \theta \le h_2(r) \\ 0 & \text{เมื่อ } h_2(\theta) < \theta \le \beta \end{cases}$$

$$\iint_S f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{h_1(r)}^{h_2(r)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,d\theta dr$$

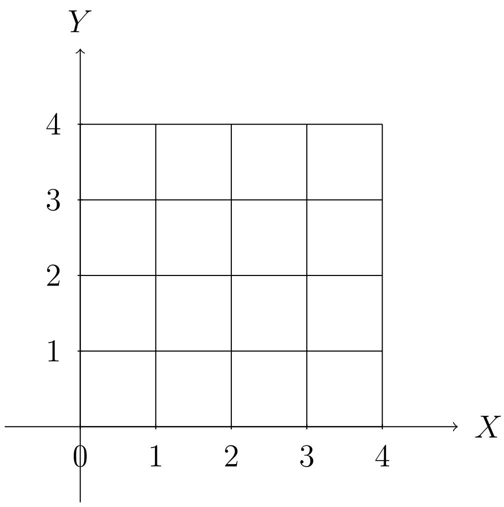
ตัวอย่าง 6.3.4 จงเขียนอินทิกรัล $\displaystyle\int_{-2}^{2}\int_{2-\sqrt{4-y^2}}^{2+\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



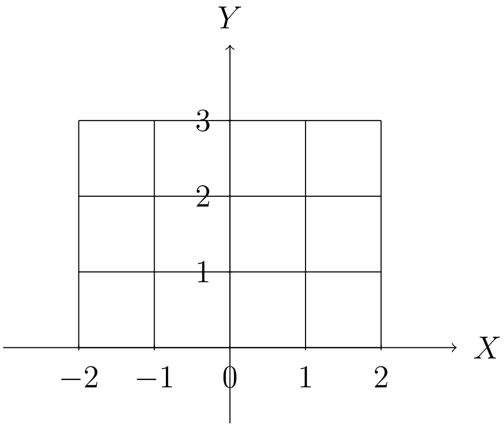
ตัวอย่าง 6.3.5 จงเขียนอินทิกรัล $\int_0^2 \int_x^2 f(x, y)\, dydx$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



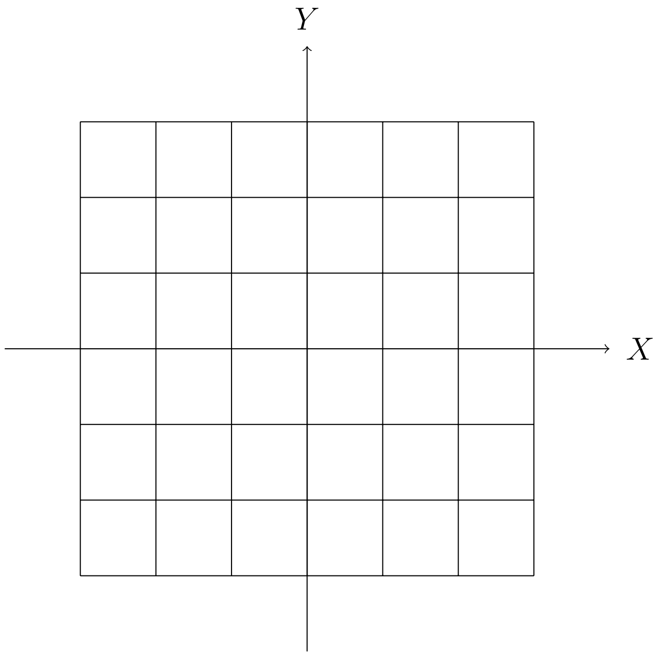
ตัวอย่าง 6.3.6 จงเขียนอินทิกรัล $\int_0^2 \int_x^3 f(x, y)\, dydx$ ให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว



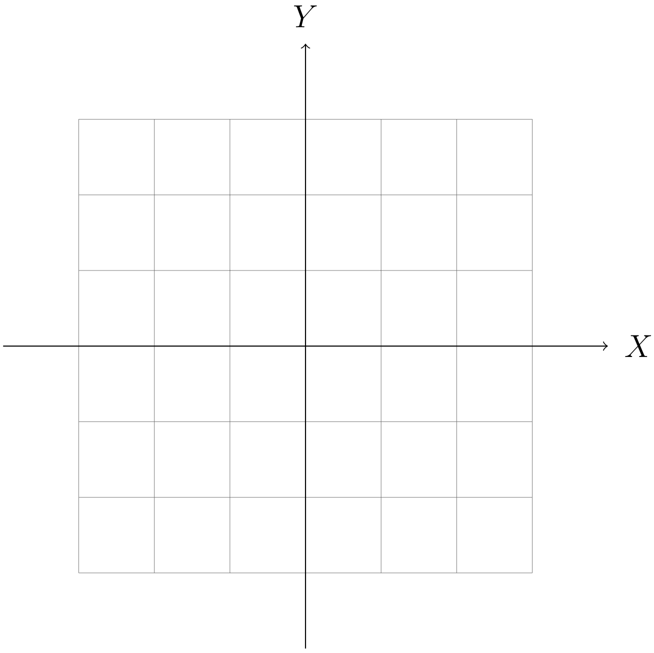
ตัวอย่าง 6.3.7 จงเขียนอินทิกรัล $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\sec\theta} r^2\sin2\theta\,drd\theta$ ให้อยู่ในระบบพิกัดฉาก



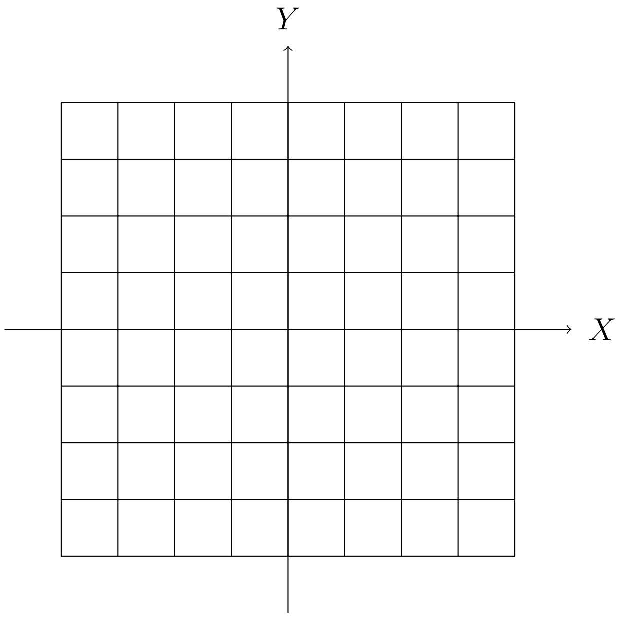
ตัวอย่าง 6.3.8 จงหาค่าของ $\displaystyle\iint\limits_S \sin(x^2+y^2)\,dA$ เมื่อ S เป็นอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=4$ และ เส้นตรง $y=0$ และ $y=x$



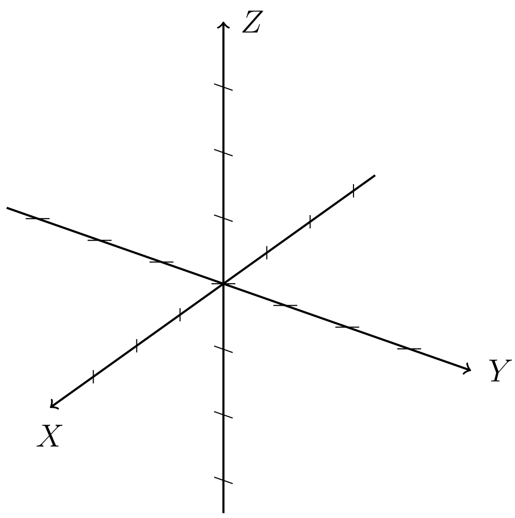
ตัวอย่าง 6.3.9 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_1^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx$

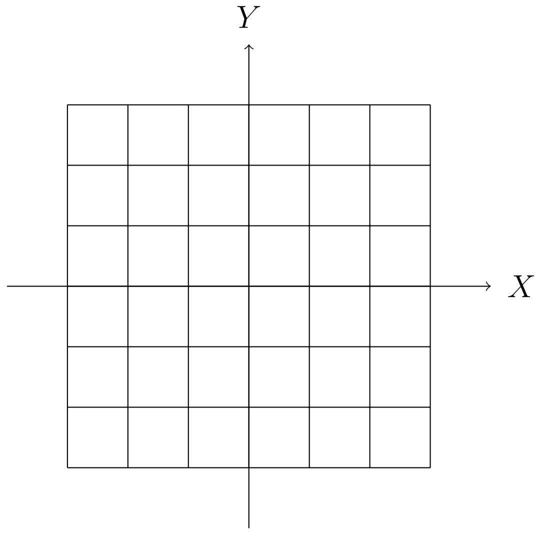


ตัวอย่าง 6.3.10 จงหาพื้นที่ของอาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งซึ่งอยู่ภายในวงกลม $x^2 + y^2 = 1$ และวงกลม $x^2 + y^2 = 2y$



ตัวอย่าง 6.3.11 จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งล้อมรอบด้วยด้านข้างด้วยพื้นผิว $x^2 + y^2 - 2x = 0$ และส่วนบนปิดด้วยพื้นผิว $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$





แบบฝึกหัด 6.3

1. จงเขียนอินทิกรัลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดเชิงขั้วพร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณการอินทิเกรต

   1.1 $\int_0^1 \int_{1-y}^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

   1.2 $\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dydx$

   1.3 $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{|y|}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)\,dxdy$

   1.4 $\int_{-1}^1 \int_{x^2}^1 f(x,y)\,dydx$

2. จงเขียนอินทิกรัลต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปพิกัดฉากพร้อมทั้งเขียนรูปแสดงอาณาบริเวณการอินทิเกรต

   2.1 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r^2\,drd\theta$

   2.2 $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\csc\theta}^{2\csc\theta} r\cos\theta\,drd\theta$

3. จงหาค่าอินทิกรัลสองชั้น $\iint\limits_S f(x,y)\,dA$ ต่อไปนี้บนอาณาบริเวณที่กำหนดให้

   3.1 $f(x,y) = \sqrt{1+4x^2+4y^2}$ S คืออาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=4$

   3.2 $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ S คืออาณาบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=4x$ และอยู่ภายนอกวงกลม $x^2+y^2=4$

   3.3 $f(x,y) = x+y$ S คืออาณาบริเวณในจตุภาคที่หนึ่งที่ปิดล้อมด้วย $x^2+y^2=4$, $y=\sqrt{3}x$ และ $y=0$

   3.4 $f(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ S คืออาณาบริเวณที่ปิดล้อมด้วยครึ่งวงกลม $y=\sqrt{2x-x^2}$ และแกน X

4. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=1$ และเส้นตรง $x=3$, $y=x$ และ $y=0$

5. จงหาพื้นที่ของบริเวณที่อยู่ภายในวงกลม $x^2+y^2=4$ เมื่อ $y\geq 3$

6. จงหาพื้นที่ของบริเวณซึ่งปิดล้อมด้วยวงกลม $x^2+y^2=4x$ และเส้นโค้ง $y=\sqrt{2x}$ กับแกน X

7. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z=1-x^2-y^2$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2+y^2=x$

8. จงหาปริมาตรของรูปทรงตันเหนือระนาบ XY ซึ่งอยู่ภายใต้พื้นผิว $z=4+x+2y$ และล้อมรอบด้วยพื้นผิวด้านข้างด้วย $x^2+y^2=1$

บทที่ 7

สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

7.1 สมการเชิงอนุพันธ์

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า**สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 7.1.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation : ODE) ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation : PDE)

ตัวอย่าง 7.1.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็น ODE หรือ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} = e^x$		
$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sin x$		

บทนิยาม 7.1.3 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี** (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

ตัวอย่าง 7.1.4 จงบอกอันดับและดีกรีของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

สมการเชิงอนุพันธ์	อันดับ	ดีกรี
$\frac{dy}{dx} = x^3$		
$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0$		
$xu\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^3 = \cos t$		
$xy^2 = y' + \sqrt{1+y'}$		

บทนิยาม 7.1.5 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิสัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (nonlinear equation)

ตัวอย่าง 7.1.6 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็นสมการเชิงเส้นหรือไม่

สมการเชิงอนุพันธ์	สมการเชิงเส้น	สมการไม่เชิงเส้น
$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y = 3x^2$		
$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = \tan x$		
$\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)^2 = \sin u$		
$xy^2 = y' + yy''$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$		
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + y = 0$		

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{หรือ} \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

บทนิยาม 7.1.7 เราจะเรียกฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **ผลเฉลย** (solution) ของสมการ

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามแบบแจ่มชัด (explicite function) หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicite function) ก็ได้ เราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) และผลเฉลยที่กำหนดค่าคงตัวแน่นอนว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution)

ตัวอย่าง 7.1.8 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 7.1.9 จงแสดงว่า $y = \dfrac{1+ce^t}{1-ce^t}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{2}(y^2-1)$

ตัวอย่าง 7.1.10 จงแสดงว่า $y = x - \dfrac{1}{x}$ ผลเฉลยเฉพาะของสมการ $xy' + y = 2x$

ตัวอย่าง 7.1.11 จงแสดงว่า $y = \sin x \cos x - \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$y' + (\tan x)y = \cos^2 x$$

ตัวอย่าง 7.1.12 จงแสดงว่า $x^2y - xy^2 = c$ สอดคล้องสมการ $(x^2 - 2xy)y' = y^2 - 2xy$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงบอกอันดับ ดีกรี รวมทั้งระบุว่าสมการใดเป็นสมการเชิงเส้น หรือเป็นสมการไม่เชิงเส้น

   1.1 $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 4x$

   1.2 $y''' + 2y'' + 3y' + 4y = \cos x$

   1.3 $e^x \dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y'}$

   1.4 $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^5 + x\dfrac{d^2y}{dx^2} = \ell\text{n}x$

   1.5 $(x^2 - 1)y' + xy^2 + 1 = 0$

   1.6 $u\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\dfrac{\partial u}{\partial x}$

2. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   2.1 $y = cx + \sqrt{1 - c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1 - (y')^2} = y$

   2.2 $(x - c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

   2.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x\dfrac{dy}{dx}$

   2.4 $y = 4 + \dfrac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

7.2 สมการแยกตัวแปรได้

บทนิยาม 7.2.1 สมการเชิงอนุพันธ์ที่สามารถเขียนในรูป

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(x) \qquad \text{หรือ} \qquad M_1(x)M_2(y)dx + N_1(x)N_2(y)dy = 0$$

เรียกว่าเป็น **สมการแบบแยกตัวแปรได้** (variable separable equation)

วิธีหาผลเฉลย ดังนั้นสมการแบบแยกตัวแปรได้ คือสมการที่สามารถเขียนได้ในรูป

$$\frac{M_1(x)}{N_1(x)}dx + \frac{N_2(y)}{M_2(y)}dy = 0$$

การหาผลเฉลยของสมการแบบแยกตัวแปรได้คือการอินทิเกรตแต่ละส่วน

$$\int \frac{M_1(x)}{N_1(x)}\,dx + \int \frac{N_2(y)}{M_2(y)}\,dy = c$$

เมื่อ c เป็นค่าคงตัวไม่เจาะจง

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $3(1-y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y-xy}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 7.2.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(\ell\mathsf{n}\, y)^2 y' = x^2 y$ เมื่อ $y(2) = 1$

2. $4\sin^2 x\, dy + \sec^2 y\, dx = 0$ เมื่อ $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$

1.2 $(y^4+y)y'=\sin x-\cos x$

1.3 $x^3\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x^2-x^2y^2}$ เมื่อ $x>0$

1.4 $3(4y^2+1)\,dx=y(x-1)\,dy$

1.5 $\dfrac{1+e^x}{1-e^{-y}}dy+e^{x+y}\,dx=0$

1.6 $(x^2y+x^2)\,dx=(xy^2-y^2)\,dy$

1.7 $(x^2+1)y'+y^2+1=0$

1.8 $(x^2y^2\sec x\tan x+xy^2\sec x)\,dx+xy^3\,dy=0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\cos^2 x\dfrac{dy}{dx}=\sin^2 y$ เมื่อ $y(0)=\dfrac{\pi}{2}$

2.2 $\sqrt{x^2+1}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x}{y}$ เมื่อ $y(\sqrt{3})=2$

2.3 $dy=\dfrac{9e^x}{ey^2+y^2e^2}\,dx$ เมื่อ $y(1)=3$

2.4 $x\,dy=\dfrac{y}{x-x^3}\,dx$ เมื่อ $y(2)=-2$

7.3 สมการเอกพันธุ์

บทนิยาม 7.3.1 เรียกฟังก์ชัน $F(x, y)$ ว่า**ฟังก์ชันเอกพันธุ์ดีกรี n** (homogeneous function of degree n) ถ้ามีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y) \qquad \text{สำหรับทุก ๆ จำนวนจริงบวก } \lambda$$

ตัวอย่าง 7.3.2 จงพิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์หรือไม่ ถ้าเป็นดีกรีเท่าใด

1. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2$
2. $f(x, y) = \dfrac{x^2 - 2y^2}{xy}$
3. $f(x, y) = \dfrac{1}{y}\cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$
4. $f(x, y) = x^2\sin(xy)$

บทนิยาม 7.3.3 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์** (homogeneous differential equation) ถ้า $M(x, y)$ และ $N(x, y)$ เป็นฟังก์ชันเอกพันธุ์ที่มีดีกรีเท่ากัน หรือพิจารณาสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

เป็นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์ก็ต่อเมื่อ $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรี 0

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $F(x, y)$ เป็นสมการเอกพันธุ์ดีกรี 0 ดังนั้น $F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y)$ ให้ $\lambda = \dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x > 0$ และ $\lambda = -\dfrac{1}{x}$ เมื่อ $x < 0$ จะได้ว่า

$$F(x, y) = F(\lambda x, \lambda y) = F\left(1, \frac{y}{x}\right) = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ดังนั้นสมการเชิงอนุพันธ์เอกพันธุ์จะอยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} = G\left(\frac{y}{x}\right)$$

ให้ $v = \dfrac{y}{x}$ แล้ว $y = vx$ ดังนั้น $\dfrac{dy}{dx} = v + x\dfrac{dv}{dx}$ ทำให้ได้ว่า

$$v + x\frac{dv}{dx} = G(v)$$

เห็นได้ชัดว่าเป็นสมการแบบแยกตัวแปรได้ในพจน์ของ x และ v

ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(y^2 - x^2)\,dx + xy\,dy = 0$

2. $x\dfrac{dy}{dx} - y = x\cos\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ตัวอย่าง 7.3.5 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$xyy' = x^2e^{-\frac{y}{x}} + y^2 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(1) = 0$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2+2xy}{x^2}$

1.2 $x\,dy - \left(x\tan\left(\dfrac{y}{x}\right) + y\right)\,dx = 0$

1.3 $(x^2y + y^3)\,dx + x^3\,dy = 0$

1.4 $2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = 0$

1.5 $xy' = x + y$

1.6 $x\left(1 + \ell\mathrm{n}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right)y' = y$

1.7 $2x\,dy - 2y\,dx = \sqrt{x^2+4y^2}\,dx$ เมื่อ $x > 0$

1.8 $2ye^{\frac{x}{y}}\,dx = (2xe^{\frac{x}{y}} - y)\,dy$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ เมื่อ $y(-1) = 0$

2.2 $x^2y\,dx - (x^3 - y^3)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 1$

2.3 $14xyy' = 6x^2 - 7y^2$ เมื่อ $y(-2) = 1$

2.4 $x^2y' = 3x^2 - 2xy + y^2$ เมื่อ $y(1) = \dfrac{3}{2}$

7.4 สมการแม่นตรง

บทนิยาม 7.4.1 สมการเชิงอนุพันธ์ $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ เป็น**สมการเชิงอนุพันธ์แม่นตรง** (exact differential equation) ก็ต่อเมื่อมีฟังก์ชัน $F(x,y)$ ที่ทำให้

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

ทุก ๆ (x,y) ในอาณาบริเวณ R

วิธีหาผลเฉลย เนื่องจาก $M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy=0$ ดังนั้น $dF(x,y)=0$ นั้นคือ

ผลเฉลยทั่วไปของสมการแม่นตรงคือ $\quad F(x,y)=c$

จากสมบัติค่าเชิงอนุพันธ์จะได้ว่า

$$\begin{aligned} dF(x,y) &= M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \\ \frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy &= M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{\partial F}{\partial x}=M(x,y) \qquad \text{และ} \qquad \frac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$$

จะได้ว่า $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ถ้า $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}$ และ $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ต่อเนื่องในอาณาบริเวณ R จะได้ว่า

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

ดังนั้น

$$F(x,y)=\int M(x,y)\,dx+C(y)$$

หา $C(y)$ ได้จาก $\dfrac{\partial F}{\partial y}=N(x,y)$

ในทำนองเดียวกัน

$$F(x,y)=\int N(x,y)\,dy+C(x)$$

หา $C(x)$ ได้จาก $\dfrac{\partial F}{\partial x}=M(x,y)$

ตัวอย่าง 7.4.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(2xy^3 - ye^{-x})\,dx + (3x^2y^2 + e^{-x} - 4)\,dy = 0$$

ตัวอย่าง 7.4.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{x+y^2}{xy^2}dy - \frac{y-4}{x^2}dx = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(-2) = 1$$

แบบฝึกหัด 7.4

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $2x - y^3 - 3xy^2y' = 0$

   1.2 $(2x - 5y)\,dy = (6x - 2y)\,dx$

   1.3 $x(x\cos(x^2y) - 2y)y' + 2xy\cos(x^2y) = y^2$

   1.4 $(\sin xy + xy + \cos xy)\dfrac{dy}{dx} + y^2\cos xy = 0$

   1.5 $\dfrac{3xy+1}{y}dx + \dfrac{2y-x}{y^2}dy = 0$

   1.6 $\pi y + (\pi x + \arcsin y)\dfrac{dy}{dx} = \sin x$

   1.7 $\dfrac{\ln y}{x}\,dx + (\dfrac{\ln x}{y} + \sin y)\,dy = 0$

   1.8 $(2xye^{x^2} + \sin y)\,dx + (x^2e^{x^2y} + x\cos y - y)\,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $(3x^2y + 2xy)\,dx + (x^3 + x^2 + 2y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 2$

   2.2 $(e^y + ye^x)\,dx - (e^x + xe^y)\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = 0$

   2.3 $(\sin^2 x - 2y\cos x)y' - 2y\sin x\cos x + y^2\sin x = 0$ เมื่อ $y(0) = -2$

   2.4 $\ln(1+y^2) = \left(\dfrac{1}{y} - \dfrac{2xy}{1+y^2}\right)\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ $y(2) = \sqrt{e-1}$

7.5 ตัวประกอบอินทิกรัล

ในกรณีที่ $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ เป็นไม่เป็นสมการแม่นตรงแต่มี $\mu(x,y)$ ที่ทำให้

$$\mu(x,y)(M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy) = 0$$

เป็นสมการแม่นตรง เราจะเรียกฟังก์ชัน $\mu(x,y)$ นี้ว่า**ตัวประกอบอินทิกรัล** (integrating factor) ของสมการเชิงอนุพันธ์นี้ แล้ว

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\\ \mu\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial \mu}{\partial y} &= \mu\frac{\partial N}{\partial x} + N\frac{\partial \mu}{\partial x}\end{aligned}$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{\mu}\left(N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y}\right) = \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$$

กรณีที่ 1. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร x เพียงอย่างเดียว

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mu}N\frac{d\mu}{dx} &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\\ N\frac{d}{dx}\ell\mathrm{n}|\mu| &= \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\\ \frac{d}{dx}\ell\mathrm{n}|\mu| &= \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) = f(x)\end{aligned}$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$

กรณีที่ 2. μ เป็นฟังก์ชันของตัวแปร y เพียงอย่างเดียว

$$\frac{d}{dy}\ell\mathrm{n}|\mu| = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right) = g(y)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$

สรุปได้ว่า

1. สำหรับ $f(x) = \dfrac{1}{N}\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)$ มีตัวประกอบอินทิกรัลเป็น $\mu = e^{\int f(x)\,dx}$
2. สำหรับ $g(y) = \dfrac{1}{M}\left(\dfrac{\partial N}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial y}\right)$ มีตัวประกอบอินทิกรัลเป็น $\mu = e^{\int g(y)\,dy}$

ตัวอย่าง 7.5.1 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1. $(3x + 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$

2. $(x^2 + y^2 + 1)\,dx + x(x - 2y)\,dy = 0$

ตัวอย่าง 7.5.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1 + x\sin y)y' + \cos y = 0$

ตัวอย่าง 7.5.3 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$2y(x^2 - y + x)\,dx + (x^2 - 2y)\,dy = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(0) = -1$$

แบบฝึกหัด 7.5

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $2xy\,dx + (x^3 + 2xy)\,dy = 0$

   1.2 $(4xy - 3x - 3x^2)\,dy - (2xy - y^2 + y)\,dx = 0$

   1.3 $(xy + y - 1)\,dx + x^3\,x\,dy = 0$

   1.4 $y(x + y^3)\,dx + x(y^3 - x)\,dy = 0$

   1.5 $(xy - x^2)y' - xy + 1 = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

   2.1 $y(1 + x^2y)\,dx - x\,dy = 0$ เมื่อ $y(1) = -1$

   2.2 $(x^2 + y)\,dx + (x^2\cos y - x)\,dy = 0$ เมื่อ $y(2) = 0$

   2.3 $1 + (x\tan y - 2\sec y)y' = 0$ เมื่อ $y(-1) = \pi$

7.6 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

บทนิยาม 7.6.1 สมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง คือสมการเชิงอนุพันธ์ที่อยู่ในรูป

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

วิธีหาผลเฉลย สามารถจัดรูปได้เป็น $[P(x)y - Q(x)]\,dx + dy = 0$
ดังนั้น $M(x,y) = P(x)y - Q(x)$ และ $N(x,y) = 1$ จะได้ว่า

$$P(x) = \frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

ดังนั้น $\mu = e^{\int P(x)\,dx}$

$$\begin{aligned} \mu\frac{dy}{dx} + \mu P(x)y &= \mu Q(x) \\ \frac{d}{dx}(\mu y) &= \mu Q(x) \\ \mu y &= \int \mu Q(x)\,dx + C \end{aligned}$$

ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ

$$y = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu Q(x)\,dx + C\right)$$

ตัวอย่าง 7.6.2 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $\dfrac{dy}{dx} - 2xy = x$

ตัวอย่าง 7.6.3 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(y\cot x - \sec^2 x)\,dx + dy = 0$

ตัวอย่าง 7.6.4 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$(xy + x + x^3)\,dx + (1 + x^2)\,dy = 0 \qquad \text{เมื่อ} \quad y(\sqrt{3}) = 1$$

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งบางสมการไม่เป็นสมการเชิงเส้น เราอาจทำให้เป็นสมการเชิงเส้นโดยอาศัยการเปลี่ยนตัวแปรที่เหมาะสม เช่นสมการต่อไปนี้จะเรียกว่า **สมการแบร์นูลลี** (Bernoulli's equation)

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$

เมื่อ n เป็นค่าคงตัว เปลี่ยนตัวแปรโดยให้ $z = y^{1-n}$ จะสมการแบร์นูลลีจะเปลี่ยนเป็นสมการเชิงเส้นอันดับหนึ่ง

$$\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

จะได้ $\mu = e^{\int (1-n)P(x)\,dx}$ ดังนั้นผลเฉลยทั่วไปคือ $z = \dfrac{1}{\mu}\left(\displaystyle\int \mu(1-n)Q(x)\,dx + C\right)$ หรือ

$$y^{1-n} = \frac{1}{\mu}\left(\int \mu(1-n)Q(x)\,dx + C\right)$$

ตัวอย่าง 7.6.5 จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ $(1+x^2)\dfrac{dy}{dx} + xy = x^3y^3$

ตัวอย่าง 7.6.6 จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{2x} = \frac{x}{y^3} \qquad \text{เมื่อ} \quad y(1) = 2$$

แบบฝึกหัด 7.6

1. จงหาผลเฉลยทั่วไปของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

1.1 $\dfrac{dy}{dx} + y\cot x = 5e^{\cos x}$

1.2 $x^2y' + 3xy + 2x^5 = 0$

1.3 $(2y-4)\,dx + dy = 0$

1.4 $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = \dfrac{\sin x}{x^2}$

1.5 $y' - y = \dfrac{1}{1-e^{-x}}$

1.6 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x\ell n x} = x^2$

1.7 $(3xy - 4y - 3x)\,dx + (x^2 - 3x + 2)\,dy = 0$

1.8 $2(y - 3\sin x)\cos x\,dx + \sin x\,dy = 0$

1.9 $(x^2 + y^2)\,dx - 2xy\,dy = 0$

1.10 $(y + xy^2)\,dx - \,dy = 0$

2. จงหาผลเฉลยเฉพาะของสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้

2.1 $(x-1)^3\dfrac{dy}{dx} + 4(x-1)^2y = x+1$ เมื่อ $y(3) = \dfrac{1}{2}$

2.2 $(y - e^x\sin x)\,dx + dy = 0$ เมื่อ $y(0) = -1$

2.3 $(\cos x)y' + y = 1$ เมื่อ $y(\frac{\pi}{4}) = 2$

2.4 $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{x^3y}{x^4+1} = x^7$ เมื่อ $y(0) = 1$

2.5 $xy' + y = y^2x^2e^x$ เมื่อ $y(1) = e$

2.6 $x\dfrac{dy}{dx} + y + 3 = x^3(y+3)^3$ เมื่อ $y\left(-\dfrac{1}{2}\right) = -1$

สรุปสูตรเกี่ยวกับแคลคูลัส

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

    $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\sin^3 x = \dfrac{1}{4}[3\sin x - \sin 3x]$
23. $\cos^3 x = \dfrac{1}{4}[3\cos x + \cos 3x]$
24. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
25. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
26. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
27. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
28. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
29. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) + \sin(x-y)\right]$
30. $\cos x \sin y = \dfrac{1}{2}\left[\sin(x+y) - \sin(x-y)\right]$
31. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) + \cos(x-y)\right]$
32. $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}\left[\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]$

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\frac{d}{dx}C = 0$
2. $\frac{d}{dx}x = 1$
3. $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$
4. $(af)'(x) = af'(x)$
5. $(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$
6. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$
7. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$
8. $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$
9. $\frac{d}{dx}e^x = e^x$
10. $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ell\text{n}a$
11. $\frac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = \frac{1}{x}$
12. $\frac{d}{dx}\text{log}_a|x| = \frac{1}{x\ell\text{n}a}$
13. $\frac{d}{dx}\text{sin}x = \text{cos}x$
14. $\frac{d}{dx}\text{cos}x = -\text{sin}x$
15. $\frac{d}{dx}\text{tan}x = \text{sec}^2x$
16. $\frac{d}{dx}\text{sec}x = \text{sec}x\text{tan}x$
17. $\frac{d}{dx}\text{cot}x = -\text{csc}^2x$
18. $\frac{d}{dx}\text{csc}x = -\text{csc}x\text{cot}x$
19. $\frac{d}{dx}\text{arcsin}x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
20. $\frac{d}{dx}\text{arccos}x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
21. $\frac{d}{dx}\text{arctan}x = \frac{1}{1+x^2}$
22. $\frac{d}{dx}\text{arccot}x = -\frac{1}{1+x^2}$
23. $\frac{d}{dx}\text{arcsec}x = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
24. $\frac{d}{dx}\text{arccsc}x = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

ค่าเชิงอนุพันธ์

1. $dC = 0$
2. $d(u+v) = du + dv$
3. $d(ku) = kdu$
4. $u'dx = du$
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$
6. $d(uv) = vdu + udv$
7. $df(x,y) = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy$

ปริพันธ์ของฟังก์ชัน

1. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
2. $\int f(x)+g(x)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
3. $\int kdx = kx + C$
4. $\int vdu = uv - \int vdu$
5. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
6. $\int \frac{1}{x}dx = \ell\text{n}|x| + C$
7. $\int e^x dx = e^x + C$
8. $\int e^{ax} dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$
9. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ell\text{n}a} + C$
10. $\int \text{sin}x dx = -\text{cos}x + c$
11. $\int \text{cos}x dx = \text{sin}x + C$
12. $\int \text{sec}^2 x dx = \text{tan}x + C$
13. $\int \text{sec}x\text{tan}x dx = \text{sec}x + C$
14. $\int \text{csc}^2 x dx = -\text{cot}x + C$
15. $\int \text{csc}x\text{cot}x dx = -\text{csc}x + C$
16. $\int \text{tan}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x| + C$
17. $\int \text{sec}x dx = \ell\text{n}|\text{sec}x + \text{tan}x| + C$
18. $\int \text{cot}x dx = \ell\text{n}|\text{sin}x| + C$
19. $\int \text{csc}x dx = \ell\text{n}|\text{csc}x - \text{cot}x| + C$

20. $\int e^{ax}\text{sin}bxdx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\text{sin}bx - \text{b}\text{cos}bx) + C$

21. $\int e^{ax}\text{cos}bxdx = \dfrac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\text{cos}bx + b\text{sin}bx) + C$

22. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \text{arcsin}x + C$

23. $\int \dfrac{1}{1+x^2}dx = \text{arctan}x + C$

24. $\int \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}dx = \text{arcsec}x + C$

25. $\int \ell\text{n}xdx = x\ell\text{n}x - x + C$

26. $\int \text{cos}axdx = \dfrac{1}{a}\text{sin}ax + C$

27. $\int \text{sin}axdx = -\dfrac{1}{a}\text{cos}ax + C$

28. $\int \text{arcsin}xdx = x\text{arcsin}x + \sqrt{1-x^2} + C$

29. $\int \text{arccos}xdx = x\text{arccos}x - \sqrt{1-x^2} + C$

30. $\int \text{arctan}xdx = x\text{arctan}x - \dfrac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

31. $\int \text{arccot}xdx = x\text{arccot}x + \dfrac{1}{2}\ell\text{n}(1+x^2) + C$

32. $\int \text{arcsec}xdx = x\text{arcsec}x - \ell\text{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

33. $\int \text{arccsc}xdx = x\text{arccsc}x + \ell\text{n}|x + \sqrt{x^2-1}| + C$

บรรณานุกรม

ดำรง ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). **แคลคูลัส ๒.** กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals.** Canada. Nelson Education, Ltd.

ประวัติผู้เขียน

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย

- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสาตร์, เกียติรนิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours),Chulalongkorn University, 2006

Email: thanatyod.ja@ssru.ac.th
Facebook: www.facebook.com/Jampawai
Office: 1145
Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. หนังสือความจริงที่ต้องพิสูจน์, 2560
2. เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู, 2559
3. ตำราวิชาทฤษฎีจำนวน, 2559