



คณิตศาสตร์การเงิน

Mathematical Finance

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

MAP4406

คณิตศาสตร์การเงิน

Mathematical Finance

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ฉันทยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
เอกสารประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์การเงิน ปีการศึกษา 2/2563

สารบัญ

1	ดอกเบี้ยว	1
1.1	ดอกเบี้ยวเชิงเดียว	1
1.2	ดอกเบี้ยวทบต้น	8
1.3	ค่างวด	13
1.4	กฎของเลข 72	20
2	บัตรเครดิตและภาษีรายได้บุคคลธรรมดา	23
2.1	บัตรเครดิต	23
2.2	ภาษีรายได้บุคคลธรรมดา	29
3	ประกันชีวิต	39
3.1	ประกันแบบออมทรัพย์	39
3.2	ประกันแบบบำนาญ	44
3.3	อัตราผลตอบแทนภายใน	48
3.4	การลดหย่อนภาษีโดยประกันชีวิต	54
4	การลงทุนในตราสารการเงิน	59
4.1	ตราสารหนี้	59
4.2	ตราสารทุนหรือหุ้น	66
4.3	กองทุนรวม	76
4.4	การลงทุนแบบถัวเฉลี่ย	81
5	ความน่าจะเป็นเพื่อการลงทุน	85
5.1	ความน่าจะเป็น	85
5.2	ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง	92
5.3	ค่าคาดคะเน	97
5.4	ความแปรปรวนร่วม	110
6	การจัดพอร์ตการลงทุนเบื้องต้น	119
6.1	ผลตอบแทนและความเสี่ยงของการลงทุน	119
6.2	พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำ	130

6.3	การจัดการพอร์ตโดยใช้ข้อมูลอดีต	136
6.4	อัตราดอกเบี้ยที่คาดหวัง	141

บทที่ 1

ดอกเบี้ย

ดอกเบี้ย (Interest) คือ เงินตอบแทนที่ได้เพิ่มขึ้นจากการออมหรือลงทุน หรือจะเป็นเงินตอบแทนที่ผู้ปล่อยกู้ได้จากผู้ขอกู้ ในบทนี้จะศึกษาวิธีคิดดอกเบี้ย 2 ประเภทคือ

1. การคิดดอกเบี้ยเชิงเดียว
2. การคิดดอกเบี้ยทบต้น

และกล่าวถึงการคำนวณค่าวง

1.1 ดอกเบี้ยเชิงเดียว

การคิด **ดอกเบี้ยเชิงเดียว (simple interest)** เป็นการคิดดอกเบี้ยเพียงครั้งเดียวหลังจากครบกำหนดเวลากู้เงินหรือฝากเงิน บางครั้งดอกเบี้ยอาจเรียกว่าอัตราดอกเบี้ย เขียนแทนด้วย i หรือ r และจะบอกในรูปเปอร์เซ็นต์ต่อปีเช่น ดอกเบี้ย 2% ต่อปี นั่นคือ $r = 0.02$ ซึ่งหมายถึง

ดอกเบี้ยของเงินต้น 1 บาทในระยะเวลา 1 ปี เท่ากับ 0.02 บาท

บทนิยาม 1.1.1 ให้ S แทนเงินรวมในระยะเวลา t ปี ที่เกิดจาก**เงินต้น (pinciple) P** เมื่อคิดดอกเบี้ยด้วยอัตรา r ต่อปี จะได้ว่า

$$S = P + Prt = P(1 + rt)$$

ดอกเบี้ยที่ได้รับคือ $I = Prt$

ตัวอย่าง 1.1.2 ในปี 2562 นักลงทุนรายหนึ่งได้ตัดสินใจซื้อพันธบัตรรัฐบาลอายุ 3 ปี ให้ผลตอบแทน 3.08% ต่อปี (ข้อมูลจากธนาคารแห่งประเทศไทย) ถ้านักลงทุนซื้อเป็นจำนวน 500,000 บาท เมื่อหมดอายุจะได้ผลตอบแทนเท่าใด เมื่อคำนวณผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว

ตัวอย่าง 1.1.3 นายพีชตัดสินใจซื้อพันธบัตรอายุ 10 ปี เป็นจำนวนเงิน 100,000 บาท โดยรับผลตอบแทนคืนเมื่อครบกำหนด 10 ปี เป็นจำนวน 167,000 บาท ถ้านายพีชคำนวณผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว นายพีชจะได้ผลตอบแทนปีละกี่เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 1.1.4 ณรงค์หวังผลการลงทุนในการซื้อพันธบัตรรัฐบาลให้ได้ผลตอบแทนรวมเงินต้น 100,000 บาท ในอีก 10 ปีข้างหน้า ณรงค์จะต้องตัดสินใจซื้อพันธบัตรด้วยจำนวนเงินเท่าใด ถ้ากำหนดให้ผลตอบแทนประมาณ 4% ต่อปี คำนวณผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว

สำหรับการซื้อรถยนต์ถ้าไม่ซื้อด้วยเงินสดเต็มจำนวน เราอาจทำได้โดยจ่ายเงินส่วนหนึ่งเรียกว่า **เงินดาวน์** และส่วนที่เหลือ (ยอดจัด) จะให้สถาบันการเงินมาจ่ายในส่วนที่เหลือ โดยผู้ซื้อจะต้องผ่อนชำระกับสถาบันการเงินโดยตรงเป็นงวด ๆ และมักนิยมใช้งวดเป็นเดือน โดยคิดดอกเบี้ยแบบเชิงเดียว หรือเรียกดอกเบี้ยชนิดนี้ว่า **อัตราดอกเบี้ยคงที่ (flat interest rate)**

ตัวอย่าง 1.1.5 โปรโมชันวีลออกสของวันที่ 1 มีนาคม – 5 เมษายน 2563 เมื่อซื้อรถยนต์ Toyota VIOS 2019 รุ่น Entry ราคา 609,000 บาท คิดอัตราดอกเบี้ย 0.99% นาน 48 เดือน เมื่อดาวน์ 25% ขึ้นไป จงคำนวณค่างวดต่อไปนี้

1. ดาวน์ 25% นาน 48 เดือน

2. ดาวน์ 30% นาน 48 เดือน

3. ดาวน์ 35% นาน 48 เดือน

ตัวอย่าง 1.1.6 จงเติมตารางค่างวดของรถยนต์ BMW X1 2020 ให้สมบูรณ์
โดยคิดอัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี (ค่างวดประมาณให้เป็นจำนวนเต็ม)

BMW X1 2020	ราคาขาย	ดาวน์	ยอดดาวน์	ยอดจัด	48 เดือน	60 เดือน	72 เดือน
sDrive18i (Iconic)	1,999,000	15%	299,850	1,699,150	39,647	32,568	27,848
		20%					
		25%					
sDrive18d xLine	2,359,000	15%					
		20%					
		25%					
sDrive20d M Sport	2,559,000	15%					
		20%					
		25%					

ข้อมูลราคารถยนต์จาก www.bmw.co.th

หมายเหตุ ราคารถยนต์มีหนึ่งรวม VAT 7%

ตัวอย่าง 1.1.7 ต้นหอมต้องการซื้อรถยนต์มือสองจากเต็นท์รถแห่งหนึ่งโดยตกลงขายกันในราคา 300,000 บาท (ราคาไม่รวมภาษี) ต้นหอมไม่มีเงินดาวน์จึงตัดสินใจเลือกไฟแนนซ์ที่ให้อัตราดอกเบี้ย 5.5% ต่อปี ผ่อนชำระทั้งหมด 60 งวด ถ้าต้นหอมมีกำลังในการผ่อนงวดละไม่เกิน 7,000 บาท ต้นหอมจะตัดสินใจซื้อรถคันนี้หรือไม่

ตัวอย่าง 1.1.8 อัตราดอกเบี้ยในการปล่อนสินเชื่อรถยนต์มือสองของสถาบันการเงินแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

รถจดทะเบียนปี ค.ศ.	36 - 48 เดือน	60 เดือน
2009 - 2014	3.75%	4.15%
2007 - 2008	3.80%	4.50%
2005 - 2006	4.75%	5.25%
2003 - 2004	5.00%	5.50%
2001 - 2002	5.50%	6.00%

ถ้า นาย ก ตัดสินใจซื้อรถยนต์มือสองปีจดทะเบียน 2014 ราคา 400,000 บาท (ไม่รวมภาษี) โดยวางเงินดาวน์ 100,000 บาท

1. ถ้า นาย ก ต้องการผ่อนชำระ 48 เดือน ต้องผ่อนชำระเดือนละกี่บาท
2. ถ้า นาย ก ต้องการผ่อนชำระ 60 เดือน ต้องผ่อนชำระเดือนละกี่บาท
3. จงคำนวณดอกเบี้ยทั้งหมดที่ผ่อนชำระแบบ 48 เดือน และ 60 เดือน

แบบฝึกหัด 1.1

- นายพีชตัดสินใจซื้อพันธบัตรอายุ 10 ปี เป็นจำนวนเงิน 150,000 บาท โดยรับผลตอบแทนคืนเมื่อครบกำหนด 10 ปี เป็นจำนวน 280,000 บาท ถ้านายพีชคำนวณผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว นายพีชจะได้ผลตอบแทนปีละกี่เปอร์เซ็นต์
- นักลงทุนรายหนึ่งได้ตัดสินใจซื้อพันธบัตรรัฐบาลอายุ 8 ปี ให้ผลตอบแทน 5% ต่อปี ถ้านักลงทุนซื้อเป็นจำนวน 100,000 บาท เมื่อหมดอายุจะได้ผลตอบแทนเท่าใด เมื่อคำนวณผลตอบแทนแบบดอกเบี้ยเชิงเดียว
- จงเติมตารางค่างวดของรถกระบะ Toyota Hilux Revo ให้สมบูรณ์

Toyota Hilux Revo	ดาวน์	ยอดดาวน์	ยอดจัด	48 เดือน	60 เดือน	72 เดือน
4x2 2.4 Entry ราคา 584,000	15%					
	20%					
	25%					
4x2 2.8 Entry ราคา 604,000	15%					
	20%					
	25%					

ดาวน์ 15% ดอกเบี้ย 2.99% ดาวน์ 20% ดอกเบี้ย 2.59% ดาวน์ 25% ดอกเบี้ย 1.99%

- อัตราดอกเบี้ยในการผ่อนสินค้ามือสองของสถาบันการเงินแห่งหนึ่งเป็นดังนี้

รถจดทะเบียนปี ค.ศ.	36 - 48 เดือน	60 เดือน
2009 - 2014	3.75%	4.15%
2007 - 2008	3.80%	4.50%
2005 - 2006	4.75%	5.25%

ถ้านายวัตรตัดสินใจซื้อรถยนต์มือสองปีจดทะเบียน 2006 ราคา 500,000 บาท (ไม่รวมภาษี) โดยวางเงินดาวน์ 150,000 บาท

- ถ้านายวัตร ต้องการผ่อนชำระ 48 เดือน ต้องผ่อนชำระเดือนละกี่บาท
- ถ้านายวัตร ต้องการผ่อนชำระ 60 เดือน ต้องผ่อนชำระเดือนละกี่บาท
- จงคำนวณดอกเบี้ยทั้งหมดที่ผ่อนชำระแบบ 48 เดือน และ 60 เดือน
- ต้นหนต้องการซื้อรถยนต์มือสองจากเต็นท์รถแห่งหนึ่ง โดยตกลงขายกันในราคา 400,000 บาท แต่เจ้าของเต็นท์ใจดีลดให้อีก 5% (ราคาไม่รวมภาษี) ต้นหนมีเงินดาวน์ 50,000 บาท ที่เหลือเข้าไฟแนนซ์โดยมีอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี ผ่อนชำระทั้งหมด 60 งวด ถ้าต้นหนมีกำลังในการผ่อนงวดละไม่เกิน 10,000 บาท ต้นหนจะตัดสินใจซื้อรถคันนี้หรือไม่

1.2 ดอกเบี้ยทบต้น

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการคิดดอกเบี้ยที่เรียกว่า **ดอกเบี้ยทบต้น** (compound interest) โดยการคิดจะแบ่งออกงวด ๆ เมื่อครบงวดจะคิดดอกเบี้ยนั้น แล้วนำดอกเบี้ยไปรวมเป็นเงินต้นของงวดถัดไป ทำเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ

สมมติการคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ k ครั้ง จะเรียกเวลาที่ครบกำหนดว่า **คาบ** (period) และดอกเบี้ยในคาบนั้นจะเท่ากับ $i = \frac{r}{k}$ เมื่อ r อัตราดอกเบี้ยต่อปี

ตัวอย่าง 1.2.1 ถ้าชัชนิลฝากเงิน 10,000 บาท กับธนาคารแห่งหนึ่งคิดอัตราดอกเบี้ย 1.5% โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทุก ๆ 4 เดือน เมื่อครบ 1 ปี ชัชนิลจะมีเงินในบัญชีเท่าใด

บทนิยาม 1.2.2 ให้ S_n คือเงินรวมในระยะเวลา n คาบ ที่เกิดจากเงินต้น P และคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นปีละ k ครั้ง ที่อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี จะได้ว่า

$$S_n = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^n = P(1 + i)^n$$

เมื่อ $i = \frac{r}{k}$ อัตราดอกเบี้ย 1 คาบ ถ้าให้ t ระยะเวลาในหน่วยปี จะได้ว่า $n = tk$

ตัวอย่าง 1.2.3 ธนาคารกรุงศรีได้ออกแบบการออมที่เรียกว่า **เงินฝากออมทรัพย์มีแต่ได้** ให้อัตราดอกเบี้ย 1.5% ต่อปีคิดดอกเบี้ยทุกเดือน ถ้าลุงชมฝากเงิน 100,000 บาท เป็นเวลา 1 ปี ในบัญชีเงินฝากประเภทนี้แล้วปิดบัญชี ลุงชมจะได้รับเงินเป็นจำนวนเท่าใด

ตัวอย่าง 1.2.4 คิกคิกสระระนั่งมีเงินสดอยู่ 1 ล้านบาท จึงตัดสินใจจะฝากเงินในธนาคารเป็นเวลา 1 ปี เพื่อให้ได้ผลตอบแทนที่ดีที่สุด ธนาคารมีข้อเสนอคือ

1. ฝากออมทรัพย์ดอกเบี้ย 1.8% ต่อปีคิดดอกเบี้ยทุกเดือน ถ้าดอกเบี้ยมากกว่า 20,000 บาท ต้องเสียภาษีดอกเบี้ย 15% (ตามกำหนดของกรมสรรพากร)
2. บัญชีฝากประจำแบบ 12 เดือน ให้อัตราดอกเบี้ย 2% ต่อปี โดยคิดดอกเบี้ยเมื่อครบกำหนด และเสียภาษีดอกเบี้ย 15%

คิกคิกสระระนั่งจะตัดสินใจเลือกฝากแบบใดจึงจะได้ผลตอบแทนสูงสุด

ตัวอย่าง 1.2.5 ณ เดช ต้องการเก็บเงินเพื่อดาวน์บ้านในอีก 2 ปีข้างหน้าจำนวน 320,000 บาท จึงวางแผนเก็บเงินโดยการฝากธนาคารจำนวน 300,000 บาทจำนวนนี้ไม่สามารถถอนก่อน 2 ปีได้ และธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก ๆ 3 เดือน ด้วยอัตรา 2.5% ต่อปี เมื่อครบกำหนด 2 ปี ณ เดช จะได้เงินรวมเพียงพอที่จะดาวน์บ้านหรือไม่

ตัวอย่าง 1.2.6 ณิชฝากเงินกับธนาคารจำนวน 100,000 บาท โดยธนาคารให้ผลตอบแทน 3 ปีแรก 1.5% ต่อปีและคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 2 เดือน ถ้าณิชฝากต่ออีก 2 ปีจะให้ผลตอบแทนใน 2 ปีหลังอัตรา 3% ต่อปีจะคิดทบต้นทุก 4 เดือน เมื่อผ่านไป 5 ปี ณิชจะมีเงินในบัญชีเท่าใด

การคิดดอกเบี้ยออมทรัพย์จะคิดปีละ 2 ครั้ง

ครั้งที่ 1 คิดวันที่ 30 มิถุนายน **ครั้งที่ 2** คิดวันที่ 31 ธันวาคม

แต่ธนาคาร โดยปกติดอกเบี้ยเงินฝากออมทรัพย์ธนาคารจะคิดดอกเบี้ยให้ผู้ฝากเป็นรายวัน กำหนดให้ 1 ปี มี 365 วัน หรือ 366 วัน (ถ้าไม่ทราบปี พ.ศ. ให้ใช้ 365 วัน) ถ้าดอกเบี้ยมากกว่า 20,000 บาท ต้องเสียภาษีดอกเบี้ย 15% (ตามกำหนดของกรมสรรพากร)

หมายเหตุ การฝากแบบประจำจะต้องเสียภาษีดอกเบี้ยเสมอคือ 15%

ตัวอย่าง 1.2.7 พุทธิรักษาฝากเงินในบัญชีออมทรัพย์วันที่ 10 เมษายน จำนวน 5,000 บาท อยากทราบว่าวันที่ 30 มิถุนายน ในบัญชีของพุทธิรักษาจะมียอดเงินเท่าใด และมีดอกเบี้ยโอนเข้าบัญชีกี่บาท เมื่อธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 0.75% ต่อปี

ตัวอย่าง 1.2.8 ธนพลฝากเงินในบัญชีออมทรัพย์ครั้งแรกวันที่ 1 ของเดือนพฤศจิกายน และครั้งที่สองวันที่ 1 ธันวาคม จำนวน 10,000 บาท เท่ากัน เมื่อธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 1.2% ต่อปี ถามว่าเงินในบัญชีของธนพลมียอดรวมเท่าใดในวันที่ 31 ธันวาคม

แบบฝึกหัด 1.2

- ฝากเงิน 1 ล้านบาทกับธนาคารเป็นเวลา 2 ปี โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 3 เดือน อัตราดอกเบี้ย 1.25% ต่อปี เงินในบัญชีเมื่อครบ 2 ปีมีจำนวนเท่าใด
- ให้ S คือเงินรวมในระยะเวลา t มีหน่วยเป็นปี ที่เกิดจากเงินต้น P และคิดอัตราดอกเบี้ยทบต้นปีละ k ครั้ง ที่อัตราดอกเบี้ย r ต่อปี จะได้ว่า

$$S = P \left(1 + \frac{r}{k}\right)^{kt}$$

ถ้าคิดทบต้นอย่างไม่จำกัดจำนวนหรือ $k \rightarrow \infty$ จงหาเงินรวม S โดยมองตัวแปรอื่น ๆ เป็นค่าคงที่

- สมหมายฝากเงินกับธนาคารจำนวน 100,000 บาท โดยธนาคารให้ผลตอบแทน 5 ปีแรก 2% ต่อปีและคิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 3 เดือน ถ้าสมหมายฝากต่ออีก 2 ปีจะให้ผลตอบแทนใน 3 ปีหลังอัตรา 2.5% ต่อปีจะคิดทบต้นทุก 2 เดือน เมื่อผ่านไป 8 ปี สมหมายจะมีเงินในบัญชีเท่าใด
- ฝากเงินแบบประจำ 36 เดือน จำนวน 200,000 บาท โดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 3.5% ต่อปี จงหาเงินรวมเมื่อครบกำหนด
- แครอทฝากเงินในบัญชีออมทรัพย์ครั้งแรกวันที่ 20 เมษายนจำนวน 10,000 บาท (สมมติไม่มีการถอน) โดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 0.5% ต่อปี จงหาเงินรวม ณ วันที่ 1 มกราคมของปีถัดไป
- พลฝากเงินในบัญชีออมทรัพย์ครั้งแรกวันที่ 5 ของเดือนมีนาคม และครั้งที่สองวันที่ 5 พฤษภาคมจำนวน 15,000 บาท เท่ากัน เมื่อธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 0.65% ต่อปี ถามว่าเงินในบัญชีของพลมียอดรวมเท่าใดในวันที่ 30 มิถุนายน
- ธนาคารแรกให้อัตราดอกเบี้ย 3% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี ส่วนธนาคารที่สองดอกเบี้ย 2.9% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทุกเดือน ท่านควรเลือกฝากประจำระยะเวลา 2 ปีกับธนาคารใด
- พินิจซื้อพันธบัตรอายุ 5 ปีจำนวน 500,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 5% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุก 6 เดือน โดยจะชำระครั้งเดียวเมื่อสิ้นปีที่ 5 ต่อมาสิ้นปีที่ 2 พินิจมีความจำเป็นต้องใช้เงินจึงนำพันธบัตรไปขายต่อให้ พินัยในราคา 551,000 บาท อยากทราบว่าพินิจกำไรหรือขาดทุนจากการขายพันธบัตรให้พินัย เป็นจำนวนเท่าใด
- ถ้าท่านมีเงิน 1 ล้านบาท มีธนาคารหนึ่งยื่นข้อเสนอเมื่อฝากที่นี่จะให้ดอกเบี้ย 4% ต่อปี คิดดอกเบี้ยทุก 3 เดือน (ทุก ๆ 3 เดือนรับดอกเบี้ยไปใช้ได้เลย) และมีสถาบันการเงินยื่นข้อเสนอขายพันธบัตรให้ดอกเบี้ย 5% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน แต่ห้ามขายคืนก่อน 5 ปี ท่านจะลงทุนอย่างไร จงอธิบาย

1.3 ค่างวด

การซื้อสินค้าที่มีราคาสูงเราอาจจะใช้วิธีการผ่อนชำระเป็นงวด ๆ ทำให้ผู้ซื้อไม่ต้องจ่ายเงินก้อนโต สามารถผ่อนชำระสินค้าได้ และในอีกกรณีคือการฝากแบบประจำกับธนาคาร โดยผู้ฝากทยอยฝากทีละงวด ทำให้สะสมเป็นเงินจำนวนมากได้

เรียกจำนวนเงินที่ชำระหรือฝากแต่ละงวดว่า **ค่างวด (installment payment)** และในกรณีระยะเวลา 1 งวดคือ 1 ปี มักนิยมเรียกค่างวดว่า **ค่างวดรายปี (annuity)**

ตัวอย่าง 1.3.1 วุฒิต้องการออมเงินโดยฝากกับธนาคารแห่งหนึ่ง โดยมีเงื่อนไขการฝากว่าต้องฝากทุกเดือน ๆ ละ 1,000 บาท ต่อเนื่องกันเป็นเวลา 3 ปี และธนาคารจะจ่ายดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี โดยคิดทบต้นให้ทุกครั้งที่น่าเข้าฝาก ผู้ฝากจึงตัดสินใจฝากเงินออมเดือนละ 1,000 บาท อยากทราบว่าเมื่อครบกำหนด 3 ปี ผู้ฝากคนนี้จะได้รับเงินพร้อมดอกเบี้ยเท่าใด

บทนิยาม 1.3.2 เมื่อฝากเงิน P บาทติดต่อกัน n งวด โดย r แทนอัตราดอกเบี้ยต่อปี จะได้รับเงินพร้อมดอกเบี้ย S เมื่อสิ้นงวดที่ n เป็นจำนวน

$$S = P(1 + i) \left[\frac{(1 + i)^n - 1}{i} \right]$$

เมื่อ $i = \frac{r}{k}$ เมื่อคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ k ครั้ง

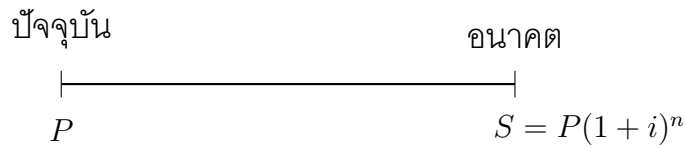
ตัวอย่าง 1.3.3 อรเริ่มทำงานอายุ 25 ปี วางแผนจะเก็บเงินไว้ตอนเกษียณตอนอายุ 60 ปี (ใช้เวลาเก็บเงิน 36 ปี) โดยนำเงินฝาก 2,000 บาท ทุก ๆ เดือน แบบ**ออมทรัพย์มีแต่ได้**ของธนาคารกรุงศรี อัตราดอกเบี้ย 1.5% ต่อปีคิดทบต้นทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าตอนเกษียณจะมีเงินในบัญชีเท่าใด

ตัวอย่าง 1.3.4 เคเคตั้งใจจะฝากเงินทุกเดือนเพื่อเป็นทุนการศึกษาต่อต่างประเทศให้กับลูกสาว ตั้งแต่เดือนเกิดจนอายุครบ 18 ปี ฝากต่อเนื่องทุกเดือน ๆ ละ 10,000 บาท โดยธนาคารคิดอัตราดอกเบี้ย 2.5% ต่อปี คิดทบต้นทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าเมื่อลูกสาวอายุครบ 18 ปี เคเคจะมีเงินในบัญชีเท่าใด

ตัวอย่าง 1.3.5 สมวงศ์วางแผนเก็บเงิน 100,000 บาท ในอีก 5 ปีข้างหน้า โดยนำเงินฝากธนาคารทุกเดือน ทางธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 2 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ในเดือนถัดไปทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าสมวงศ์ควรฝากเงินกับธนาคารเพื่อให้ได้เงินตามที่กำหนดเป็นจำนวนเท่าใด

ตัวอย่าง 1.3.6 พรชัยวางแผนเก็บเงิน 1 ล้านบาทในวัยเกษียณในอีก 40 ปีข้างหน้า โดยนำเงินฝากธนาคารทุกเดือน ทางธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 1.65 ต่อปี และคิดดอกเบี้ยทบต้นให้ในเดือนถัดไปทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าพรชัยควรฝากเงินกับธนาคารเพื่อให้ได้เงินตามที่กำหนดเป็นจำนวนเท่าใด

จากการคำนวณดอกเบี้ยทบต้น เพื่อคำนวณหาเงินในอนาคต จาก $S = P(1 + i)^n$



นั่นหมายถึงเงิน P บาทในปัจจุบันมีค่าเท่ากับ S บาทใน n งวด เรียก P ว่า **มูลค่าปัจจุบัน** (present value) ของเงิน S บาทใน n งวดข้างหน้ามีค่าเท่ากับ P ดังนั้น

$$P = S(1 + i)^{-n}$$

ตัวอย่าง 1.3.7 จงหาเงินปัจจุบันที่จะนำไปฝากกับธนาคารให้ได้เงินรวม 50,000 บาทในอีก 3 ปีข้างหน้า โดยที่ธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 3 และคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละ 2 ครั้ง

ตัวอย่าง 1.3.8 ต้องการผ่อนชำระสินค้าราคา 5,000 บาท เดือนละครั้ง ๆ ละเท่า ๆ กันเป็นเวลา 5 เดือน โดยผู้ขายคิดดอกเบี้ย 5% ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน ผู้ซื้อต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

บทนิยาม 1.3.9 เมื่อซื้อสินค้าราคา C บาทและต้องการผ่อนส่ง n งวด ๆ ละ S บาท เริ่มเมื่อซื้อสินค้าไปแล้วเป็นเวลา 1 งวด และดอกเบี้ยต่องวด i จะได้ว่า

$$C = S \left[\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} \right]$$

ตัวอย่าง 1.3.10 ซื้อ iPhone12 ราคา 35,000 บาท ถ้าผู้ซื้อต้นการผ่อนชำระเดือนละครั้ง ๆ ละ เท่า ๆ กันเป็นเวลา 1 ปี โดยผู้ขายคิดดอกเบี้ยร้อยละ 7 ต่อปีโดยคิดทบต้นทุกเดือน ผู้ซื้อต้องผ่อนชำระเดือนละเท่าใด

ตัวอย่าง 1.3.11 ญาติพลซื้อโทรศัพท์จากเพื่อน โดยเพื่อนยอมให้ผ่อนส่ง 12 เดือนโดยคิดดอกเบี้ยร้อยละ 12 ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน และผ่อนส่งเดือนละ 1,000 บาท ตั้งแต่เดือนถัดไปจนครบ 12 เดือน อยากทราบว่าราคาเงินสดของโทรศัพท์เครื่องนี้เท่าใด

ตัวอย่าง 1.3.12 ในการซื้อรถราคา 800,000 บาท ต้องวางเงินดาวน์ 20% ต้องการผ่อนชำระ 60 เดือนเท่า ๆ กัน โดยคิดดอกเบี้ยร้อยละ 4 ต่อปี ถ้าบริษัทจำหน่ายรถยนต์คิดดอกเบี้ยแบบทบต้นแบบลดต้นลดดอก ต้องชำระเดือนละเท่าใด

ตัวอย่าง 1.3.13 ชลธิ์ซื้อบ้านราคา 4.5 ล้านบาท ชำระเงินสด 5 แสนบาท ส่วนที่เหลือขอกู้เงินจากธนาคาร โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 6 ต่อปี คิดทบต้นทุก ๆ เดือน

1. ถ้าชลธิ์ผ่อนชำระ 20 ปี อยากทราบว่าชลธิ์จะต้องผ่อนเดือนละเท่าใด
2. ถ้าชลธิ์มีความสามารถในการผ่อนเดือนละ 25000 บาท อยากทราบว่าชลธิ์ต้องผ่อนส่งบ้านกี่ปี
3. ถ้าชลธิ์ผ่อนไป 5 ปี แล้วต้องการปลดหนี้ ต้องนำเงินไปจ่ายธนาคารเป็นจำนวนเท่าใด
4. ถ้าชลธิ์ชำระเพิ่มอีก 1 ล้านบาทในงวดที่ 12 จากนั้นก็ผ่อนส่งตามปกติ อยากทราบว่าชลธิ์ต้องผ่อนชำระต่ออีกเป็นเวลาเท่าใดจึงจะปลดหนี้สำเร็จ

แบบฝึกหัด 1.3

1. ต้องการฝากเงินทุกเดือน ๆ ละ 2,000 บาท โดยธนาคารให้ดอกเบี้ย 4% ต่อปีโดยคิดทบต้นทุก ๆ เดือน ต้องฝากกี่เดือนเงินรวมจึงจะได้ 100,000 บาท
2. นายเอฝากเงินทุกเดือน ๆ ละ 5,000 บาท โดยธนาคารให้ดอกเบี้ย 3.5% ต่อปีโดยคิดทบต้นทุก ๆ เดือน
 - 2.1 อยากทราบว่านายเอจะมีเงินในบัญชีเท่าใดเมื่อสิ้นปีที่ 3
 - 2.2 ถ้านายเอฝากจนเกษียณเป็นเวลา 30 ปีจะได้เงินทั้งหมดเท่าใด
3. จากข้อ 1 ถ้านายเอตั้งใจจะออมเงินให้ได้ 1 ล้านบาทในเวลา 20 ปี ต้องออมเดือนละเท่าใด
4. จากข้อ 1 ถ้าธนาคารเพิ่มอัตราดอกเบี้ยหลังปีที่ 3 ให้นายเอเป็น 4.25% ถ้านายเอฝากต่ออีก 2 ปี จะมีเงินรวมในปีที่ 5 เป็นจำนวนเท่าใด
5. ญัฐซื้อเครื่องเสียงจากเพื่อน โดยเพื่อนยอมให้ผ่อนส่ง 10 เดือนโดยคิดดอกเบี้ยร้อยละ 15 ต่อปีโดยคิดดอกเบี้ยทบต้นทุกเดือน และผ่อนส่งเดือนละ 800 บาท ตั้งแต่เดือนถัดไปจนครบ 10 เดือน อยากทราบว่าราคาเงินสดของเครื่องเสียงนี้เท่าใด
6. ต้นไทรซื้อบ้านราคา 5 ล้านบาท โดยขอกู้เงินจากธนาคาร โดยธนาคารคิดดอกเบี้ยร้อยละ 5.5 ต่อปี คิดทบต้นทุก ๆ เดือน
 - 6.1 ถ้าต้นไทรต้องการผ่อนชำระ 20 ปี อยากทราบว่าต้นไทรจะต้องผ่อนเดือนละเท่าใด
 - 6.2 ถ้าต้นไทรมีความสามารถในการผ่อนเดือนละ 20,000 บาท อยากทราบว่าต้นไทรต้องผ่อนส่งบ้านกี่ปี
 - 6.3 ถ้าชลธิผ่อนไป 10 ปี แล้วต้องการปลดหนี้ ต้องนำเงินไปจ่ายธนาคารเป็นจำนวนเท่าใด
 - 6.4 ถ้าต้นไทรชำระเพิ่มอีก 1 ล้านบาทในงวดที่ 60 จากนั้นก็ผ่อนส่งตามปกติ อยากทราบว่าต้นไทรต้องผ่อนชำระต่ออีกเป็นเวลาเท่าใดจึงจะปลดหนี้สำเร็จ
7. วัชรวางแผนเกษียณอีก 35 ปีข้างหน้า 10 ปีแรกนำเงินฝาก 2,000 บาท ทุก ๆ เดือน หลังจากปีที่ 10 นำเงินฝาก 3,000 บาท ทุก ๆ เดือน ถ้าธนาคารให้อัตราดอกเบี้ยคงที่ 2% ต่อปีคิดทบต้นทุก ๆ เดือน อยากทราบว่าตอนเกษียณวัชรจะมีเงินในบัญชีเท่าใด

ตัวอย่าง 1.4.2 ซาคิริตลงทุน 1 ล้านบาท เป็นเวลา 36 ปี จงหาเงินรวมเมื่อครบกำหนด (โดยใช้กฎของเลข 72) ถ้าอัตราผลตอบแทนมีค่าเท่ากับ

1. 4% ต่อปี 2. 6% ต่อปี 3. 12% ต่อปี 4. 20% ต่อปี

ตัวอย่าง 1.4.3 จากตัวอย่าง 1.4.2 จงคำนวณผลตอบแทนโดยสูตร $S = P(1 + i)^n$ คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี เพื่อเปรียบเทียบทั้ง 2 วิธี และเติมตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

สูตร	4%	6%	12%	20%
กฎของเลข 72				
$S = P(1 + i)^n$				

แบบฝึกหัด 1.3

1. สุภกิจลงทุน 100,000 บาท ในกองทุนที่ให้ผลตอบแทน 8% ต่อปี จงใช้กฎของเลข 72 เพื่อหาว่าสุภกิจต้องใช้เวลานานเท่าไรจึงจะได้เงินรวม 800,000 บาท
2. ปี1 ลงทุนด้วยอัตราผลตอบแทน 4% ต่อปี และปี2 ลงทุนในสินทรัพย์ที่มให้ผลตอบแทน 8% ต่อปี เมื่อเวลาผ่านไป 36 ปี ปี2จะมีทรัพย์สินเป็นกี่เท่าของปี1 โดยคำนวณจาก
 - 2.1 กฎของเลข 72
 - 2.2 สูตร $S = P(1 + i)^n$
3. ถ้าแบ่งเงินลงทุนในกองทุน A ซึ่งให้ผลตอบแทน 4% ต่อปี และกองทุน B ซึ่งให้ผลตอบแทน 5% ต่อปี อย่างละเท่า ๆ กัน จงใช้กฎของเลข 72 เพื่อหาว่าท่านจะใช้เวลาที่ปีเพื่อให้ได้เงินรวมเป็น 4 เท่าของเริ่มต้น
4. จากข้อ 3 ถ้าสัดส่วนกองทุน A และ B เป็น 40% และ 60% ตามลำดับ ที่เงินรวมเป็น 4 เท่าของเริ่มต้น โดยใช้กฎของเลข 72
5. จงใช้สูตร $S = P(1 + i)^n$ ในการหาคำตอบของข้อ 3 และ 4

บทที่ 2

บัตรเครดิตและภาษีรายได้บุคคลธรรมดา

2.1 บัตรเครดิต

บัตรเครดิต (credit card) หรือบัตรสินเชื่อเป็นบริการที่สถาบันการเงินออกมาเพื่อใช้จ่ายแทนเงินสด ตัวอย่างบัตรเครดิต เช่น วีซ่า มาสเตอร์การ์ด เป็นต้น บัตรเครดิตเป็นบัตรที่ทำให้ผู้ถือสามารถจ่ายก่อนแล้วค่อยชำระเงินภายหลังตามข้อตกลงที่มีกับสถาบันที่ปล่อยบัตร

บัตรเครดิตเริ่มใช้ในสหรัฐอเมริกาเมื่อปี ค.ศ. 1914 โดยบริษัทเกี่ยวกับปิโตรเลียมทำบัตรให้ลูกค้าในการชำระค่าน้ำมัน และในปี ค.ศ. 1950 มีการนำมาใช้โดยทั่วไป

การคิดดอกเบี้ยของบัตรเครดิต

(ได้รวมภาษีมูลค่าเพิ่มไว้แล้ว/ VAT INCLUDED)

นาย ธนิชศ จำปาหวาย
688/1423 ซ.-
ถ.ศรีนครินทร์ แขวงหนองบอน
เขตประเวศ กรุงเทพมหานคร
10250



ขอพึงระวัง
การเสริมวินัย
ทางการเงิน !!



ชื่อผู้ถือบัตร Cardholder Name THANATYOD JAMPAWAI	วงเงินรวมทุกบัตร Credit Line 101,000.00	ยอดชำระเต็มจำนวน Full Payment Amount 4,822.08
หมายเลขบัตรเครดิต Card Number 4050 16XX XXXX 4007	วงเงินบัตร Credit Limit 101,000.00	ยอดชำระขั้นต่ำทั้งหมด Total Min. Payment Amount 242.00
ประเภทบัตร Card Type TMB SO SMART	วันสรุปยอดบัญชี Statement Date 12/10/2020	กำหนดชำระภายในวันที่ Payment Due Date 01/11/2020
Head Office/Tax. ID	ชำระโดยตัดบัญชีเงินที่/Direct Debit From A/C No.	

ข้อควรระวัง !! - ควรรักษาสลิปเป็นความลับ กรณีบัตรหายให้รีบแจ้งอายัด ติดต่อ TMB Contact Center 1558 เนื่องจากท่านต้องรับผิดชอบยอดใช้จ่ายก่อนแจ้งอายัด - หากชำระไม่ครบหรือชำระล่าช้า จะถูกเรียกเก็บดอกเบี้ย ค่าธรรมเนียม และค่าใช้จ่ายในการติดตามทวงถามหนี้เพิ่ม ศึกษาการคำนวณดอกเบี้ยที่ด้านหลัง

คะแนนสะสมยกมา Rewards Point Balance 0	คะแนนสะสมรอบนี้ Rewards Point Earned This Cycle 0	คะแนนสะสมพิเศษรอบนี้ Bonus Point Earned This Cycle 0	คะแนนสะสมใช้ไปรอบนี้ Rewards Point Redeemed This Cycle 0	คะแนนสะสมคงเหลือ Outstanding Rewards Points 0
คะแนนสะสมหมดอายุภายใน No. of Point Expiring on 0	คะแนนสะสมหมดอายุภายใน No. of Point Expiring on 0	เครดิตเงินคืนรอบนี้ Cash Back Received This Cycle 0.00	เครดิตเงินคืนรวมปีนี้ Cash Back Received This Year 0.00	เงินฝากเข้าบัญชี No Fixed Cash Deposit to No Fixed A/C 196.01

วันที่ใช้บัตร Transaction Date	วันที่บันทึกรายการ Posted Date	รายการ Description	เงินต่างประเทศ Foreign Currency	จำนวนเงิน (บาท) Amount (Baht)
PREVIOUS BALANCE				21,419.49
13/09/2020	16/09/2020	451 SCT-SAMYAN MITRTOWN BANGKOK TH		1,000.00
14/09/2020	16/09/2020	ADVANCE MPAY BANGKOK TH		480.43
14/09/2020	16/09/2020	ADVANCE MPAY BANGKOK TH		1,121.90
15/09/2020	18/09/2020	BANGCHAK BGN-ODOMSUK 45 BANGKOK TH		840.00
18/09/2020	20/09/2020	BIG C SUPERCENTER-BANGNA BANGKOK TH		1,232.75
19/09/2020	21/09/2020	TLR (DIGITAL GATEWAY) BANGKOK TH		147.00
01/10/2020	01/10/2020	MOBILE PAYMENT FROM A/C 0432659316		-21,419.49
		TOTAL COLLECTION FEE AMT		0.00
		TOTAL COLLECTION FEE VAT		0.00
		TOTAL FEE AMOUNT		0.00
		TOTAL VAT AMOUNT		0.00
		TOTAL AMOUNT DUE		4.822.08

ตัวอย่าง 2.1.1 การใช้บัตรเครดิตเดือนกรกฎาคมดังนี้

วันสรุปยอดบัญชี	กำหนดครบชำระ	ยอดชำระเต็ม	ยอดชำระขั้นต่ำ
12 ส.ค.	1 ก.ย.	10,000.00	1,000.00
วันที่ใช้บัตร	วันที่บันทึกรายการ	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
13 ก.ค.	14 ก.ค.	สินค้า ก	3,000.00
20 ก.ค.	20 ก.ค.	สินค้า ข	5,000.00
5 ส.ค.	6 ส.ค.	บริการ ค	2,000.00
		รวม	10,000.00

โดยผู้ออกบัตรคิดดอกเบี้ย 18% ต่อปีและวันปลอดดอกเบี้ยคือ 20 วัน และคิดขั้นต่ำ 10% ของยอดที่ชำระเต็ม สมมติว่าวันที่ 1 ก.ย. ครบกำหนดชำระ ผู้ถือบัตรชำระเงิน 1,000 บาท และรอบเดือนสิงหาคมมีรายจ่าย 2 รายการคือซื้อสินค้า ง และ จ ดังตารางสรุป

วันสรุปยอดบัญชี	กำหนดครบชำระ	ยอดชำระเต็ม	ยอดชำระขั้นต่ำ
12 ก.ย.	2 ต.ค.		
วันที่ใช้บัตร	วันที่บันทึกรายการ	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
		ยอดหนี้ครั้งก่อน	10,000.00
15 ส.ค.	16 ส.ค.	สินค้า ง	1,000.00
26 ส.ค.	26 ส.ค.	สินค้า จ	4,000.00
1 ก.ย.		ชำระค่าบริการ	-1,000.00
12 ก.ย.		ดอกเบี้ย	
		รวม	

จึงคำนวณใบแจ้งหนี้วันสรุปยอด 12 กันยายน โดยเติมตารางให้สมบูรณ์

ตัวอย่าง 2.1.2 จากตัวอย่าง 2.1.1 สมมติว่าวันที่ 2 ต.ค. ครอบกำหนดชำระ ผู้ถือบัตรชำระเงินขั้นต่ำ และรอบเดือนกันยายนมีรายจ่าย 2 รายการคือซื้อสินค้า ช และ ญ ดังตารางสรุป

วันสรุปยอดบัญชี	กำหนดครบชำระ	ยอดชำระเต็ม	ยอดชำระขั้นต่ำ
12 ต.ค.	1 พ.ย.		
วันที่ใช้บัตร	วันที่บันทึกรายการ	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
15 ก.ย.	15 ก.ย.	ยอดหนี้ครั้งก่อน สินค้า ช	2,500.00
2 ต.ค.		ชำระค่าบริการ	
5 ต.ค.	6 ต.ค.	สินค้า ญ	3,500.00
12 ต.ค.		ดอกเบี้ย	
		รวม	

จงคำนวณใบแจ้งหนี้วันสรุปยอด 12 ตุลาคม โดยเติมตารางให้สมบูรณ์

ตัวอย่าง 2.1.3 จากตัวอย่าง 2.1.2 สมมติว่าวันที่ 1 พ.ย. ครอบกำหนดชำระ ผู้ถือบัตรชำระเงินขั้นต่ำ และรอบเดือนตุลาคมมีรายจ่าย 2 รายการคือซื้อสินค้า ฉ และ ป และมีการกดเงินสดจากบัตรจำนวน 10,000 บาท โดยผู้ออกบัตรกำหนดค่าธรรมเนียม 3% ของยอดที่กด ดังตารางสรุป

วันสรุปยอดบัญชี	กำหนดครบชำระ	ยอดชำระเต็ม	ยอดชำระขั้นต่ำ
12 พ.ย.	2 ธ.ค.		
วันที่ใช้บัตร	วันที่บันทึกรายการ	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
		ยอดหนี้ครั้งก่อน	
20 ต.ค.	21 ต.ค.	สินค้า ฉ	1,000.00
27 ต.ค.	27 ต.ค.	ถอนเงินสด	10,000.00
27 ต.ค.	27 ต.ค.	ค่าธรรมเนียมถอนเงินสด	
1 พ.ย.	1 พ.ย.	สินค้า ป	3,000.00
1 พ.ย.		ชำระค่าบริการ	
12 พ.ย.		ดอกเบี้ย	
		รวม	

หมายเหตุ กรณีกดเงินสดถึงแม้จะจ่ายเต็มแต่จะคิดดอกเบี้ยตั้งแต่วันที่รายการ (บางครั้งผู้ออกบัตรอาจเรียกเก็บภาษีมูลค่าเพิ่ม 7% ของค่าธรรมเนียมและดอกเบี้ย)

วงคำนวณใบแจ้งหนี้วันสรุปยอด 12 พฤศจิกายน โดยเติมตารางให้สมบูรณ์

แบบฝึกหัด 2.1

1. พีพีเริ่มต้นทำบัตรเครดิต โดยวันสรุปรยอดทุก ๆ วันที่ 5 ของเดือน และกำหนดชำระอีก 20 วัน ถัดจากวันสรุปรยอด โดยผู้ออกบัตรคิดดอกเบี้ยร้อยละ 20 ต่อปี พีพีเริ่มใช้บริการเดือนมีนาคม มีซื้อสินค้า 2 รายการคือ เสื้อผ้า 2,000 บาท ในวันที่ 10 มีนาคม และบันทึกรายการ 10 มีนาคม จึงทำใบแจ้งยอดในครั้งแรกวันที่ 5 เมษายน ซึ่งต้องชำระในวันที่ 25 เมษายน โดยขึ้น ค่าคิด 10% ของยอดหนี้ (แต่ไม่เกินน้อยกว่า 500 บาท)
2. จากข้อ 1 ถ้าพีพีชำระเงิน 1,000 บาทในวันที่ 25 เมษายน และในวันที่ 1 พฤษภาคม จ่ายค่า ไฟด้วยบัตรดังกล่าวจำนวน 1,000 บาท โดยบันทึกรายการวันที่ 1 พฤษภาคม จึงทำรายการ ในใบแจ้งยอดครั้งที่สองวันที่ 5 พฤษภาคม
3. จากข้อ 2 ถ้าพีพีซื้ออุปกรณ์คอมพิวเตอร์ 50,000 บาท ในวันที่ 10 พฤษภาคม โดยบันทึก รายการวันที่ 11 พฤษภาคม และในครั้งที่สองจ่ายชำระหนี้ด้วยขั้นต่ำ และกดเงินสดจำนวน 150,000 บาท ในวันที่ 26 พฤษภาคม จึงหาดอกเบี้ย ณ วันที่ 5 มิถุนายน
4. จากข้อ 3 จึงทำรายการในใบแจ้งยอดครั้งที่สามวันที่ 5 มิถุนายน โดยผู้ถือบัตรคิดค่าธรรมเนียม 300 บาท
5. จากข้อ 4 ถ้าผู้ออกบัตรคิดภาษีมูลค่าเพิ่ม 7% ของดอกเบี้ยและค่าธรรมเนียม พีพีต้องจ่าย ภาษีจำนวนเท่าใด
6. การใช้บัตรเครดิตเดือนแรกดังนี้

วันสรุปรยอดบัญชี	กำหนดครบชำระ	ยอดชำระเต็ม	ยอดชำระขั้นต่ำ
10 มิ.ย.	30 มิ.ย.	8,000.00	800.00
วันที่ใช้บัตร	วันที่บันทึกรายการ	รายการ	จำนวนเงิน (บาท)
15 พ.ค.	16 พ.ค.	สินค้า A	2,000.00
29 พ.ค.	29 พ.ค.	สินค้า B	6,000.00
		รวม	8,000.00

โดยผู้ออกบัตรคิดดอกเบี้ย 24% ต่อปีและวันปลอดดอกเบี้ยคือ 20 วัน และคิดขั้นต่ำ 10% ของยอดที่ชำระเต็ม สมมติว่าวันที่ 30 มิ.ย. ครบกำหนดชำระ ผู้ถือบัตรชำระเงิน 800 บาท และซื้อเสื้อผ้า 3,000 บาท ในวันที่ 15 มิ.ย. โดยบันทึกรายการ 16 มิ.ย. ซื้อหนังสือ 1,000 บาท ในวันที่ 1 ก.ค. โดยบันทึกรายการ 1 ก.ค. จึงทำรายการในใบแจ้งยอดในวันที่ 10 ก.ค.

2.2 ภาษีรายได้บุคคลธรรมดา

การเสียภาษีรายได้บุคคลธรรมดาที่รัฐบาลจะเก็บจากรายได้ของเราโดยกรมสรรพากรทำหน้าที่จัดเก็บ โดยนำรายได้ต่าง ๆ ใน 1 ปี ที่เรียกว่ารายได้พึงประเมินหักจากค่าใช้จ่ายและส่วนลดหย่อน (ตามประกาศของกรมสรรพากร) แล้วนำรายได้ที่เหลือที่เรียกว่า **เงินได้สุทธิ (net income)** มาคิดภาษี โดยอัตราภาษีคิดแบบขั้นบันได

เงินได้พึงประเมิน (taxable income) ตามมาตรา 40 แห่งประมวลรัษฎากร มี 8 ประเภท

- 40(1) เงินได้เนื่องจากการจ้างแรงงานไม่ว่าจะเป็นเงินเดือน ค่าจ้าง เบี้ยเลี้ยง โบนัส เบี้ยหวัด บำเหน็จ บำนาญ เงินค่าเช่าบ้าน เงินที่คำนวณได้จากมูลค่าของการได้อยู่บ้านที่นายจ้างให้อยู่โดยไม่เสียค่าเช่า เงินที่นายจ้างจ่ายชำระหนี้ใด ๆ ซึ่งลูกจ้างมีหน้าที่ต้องชำระ และเงิน ทรัพย์สิน หรือประโยชน์ใด ๆ บรรดาที่ได้เนื่องจากการจ้างแรงงาน
- 40(2) เงินได้เนื่องจากหน้าที่หรือตำแหน่งงานที่ทำ หรือจากการรับทำงานให้ไม่ว่าจะเป็นค่าธรรมเนียม ค่านายหน้า ค่าส่วนลด เงินอุดหนุนในงานที่ทำ เบี้ยประชุม บำเหน็จ โบนัส เงินค่าเช่าบ้าน เงินที่คำนวณได้จากมูลค่าของการได้อยู่บ้านที่ผู้จ่ายเงินได้ให้อยู่โดยไม่เสียค่าเช่า เงินที่ผู้จ่ายเงินได้จ่ายชำระหนี้ใด ๆ ซึ่งผู้มีเงินได้มีหน้าที่ต้องชำระ และเงิน ทรัพย์สิน หรือประโยชน์ใด ๆ บรรดาที่ได้เนื่องจากหน้าที่หรือตำแหน่งงานที่ทำ หรือจากการรับทำงานให้ นั้นไม่ว่าหน้าที่หรือตำแหน่งงาน หรืองานที่รับทำให้นั้นจะเป็นการประจำหรือชั่วคราว
- 40(3) ค่าแห่งกุศลวิมล ค่าแห่งลิขสิทธิ์หรือสิทธิอย่างอื่น เงินปี หรือเงินได้มีลักษณะเป็นเงินรายปีอันได้มาจากพันธกรรม นิติกรรมอย่างอื่น หรือคำพิพากษาของศาล
- 40(4) เงินได้ที่เป็น
- (ก) ดอกเบี้ยพันธบัตร ดอกเบี้ยเงินฝาก ดอกเบี้ยหุ้นกู้ ดอกเบี้ยตัวเงิน ดอกเบี้ยเงินกู้ยืมไม่ว่าจะมีหลักประกันหรือไม่ ดอกเบี้ยเงินกู้ยืมที่อยู่ในบังคับต้องถูกหักภาษีไว้ ณ ที่จ่าย ตามกฎหมายว่าด้วยภาษีเงินได้ปิโตรเลียม เฉพาะส่วนที่เหลือจากถูกหักภาษีไว้ ณ ที่จ่ายตามกฎหมายดังกล่าว หรือผลต่างระหว่างราคาไถ่ถอนกับราคาจำหน่ายตัวเงินหรือตราสารแสดงสิทธิในหนี้ที่บริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคล หรือนิติบุคคลอื่นเป็นผู้ออก และจำหน่ายครั้งแรกในราคาต่ำกว่าราคาไถ่ถอน รวมทั้งเงินได้ที่มีลักษณะทำนองเดียวกันกับดอกเบี้ย ผลประโยชน์หรือค่าตอบแทนอื่น ๆ ที่ได้จากการให้กู้ยืม หรือจากสิทธิเรียกร้องในหนี้ทุกชนิด ไม่ว่าจะมีหลักประกันหรือไม่ก็ตาม
 - (ข) เงินปันผล เงินส่วนแบ่งของกำไร หรือประโยชน์อื่นใดที่ได้จากบริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคล หรือสถาบันการเงินที่มีกฎหมายโดยเฉพาะของประเทศไทยจัดตั้งขึ้นสำหรับให้กู้ยืมเงิน เพื่อส่งเสริมเกษตรกรรม พาณิชยกรรม หรืออุตสาหกรรม เงินปันผลหรือเงินส่วนแบ่งของกำไรที่อยู่ในบังคับ ต้องถูกหักภาษีไว้ ณ ที่จ่าย ตามกฎหมายว่าด้วยภาษีเงินได้ปิโตรเลียม เฉพาะส่วนที่เหลือจากถูกหักภาษีไว้ ณ ที่จ่ายตามกฎหมายดังกล่าว
 - (ค) เงินโบนัสที่จ่ายแก่ผู้ถือหุ้น หรือผู้เป็นหุ้นส่วนในบริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคล

- (ง) เงินลดทุนของบริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคลเฉพาะส่วนที่จ่ายไม่เกินกว่ากำไรและเงินที่กันไว้รวมกัน
- (จ) เงินเพิ่มทุนของบริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคลซึ่งตั้งจากกำไรที่ได้มาหรือเงินที่กันไว้รวมกัน
- (ฉ) ผลประโยชน์ที่ได้จากการที่บริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคลควบเข้ากัน หรือรับช่วงกัน หรือเลิกกัน ซึ่งตีราคาเป็นเงินได้เกินกว่าเงินทุน
- (ช) ผลประโยชน์ที่ได้จากการโอนการเป็นหุ้นส่วน โอนหน่วยลงทุน หรือโอนหุ้น หุ้นกู้ พันธบัตร หรือตัวเงิน หรือตราสารแสดงสิทธิในหนี้ที่บริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคลหรือนิติบุคคลอื่นเป็นผู้ออก รวมทั้งเงินได้จากการขายคืนหน่วยลงทุนให้แก่บริษัทหรือห้างหุ้นส่วนนิติบุคคลที่เป็นกองทุนรวม ทั้งนี้ เฉพาะซึ่งตีราคาเป็นเงินได้เกินกว่าที่ลงทุน
- (ซ) เงินส่วนแบ่งของกำไร หรือผลประโยชน์อื่นใดในลักษณะเดียวกันที่ได้จากการถือหรือครอบครองโทเคนดิจิทัล
- (ฌ) ผลประโยชน์ที่ได้รับจากการโอนคริปโทเคอร์เรนซีหรือโทเคนดิจิทัล ทั้งนี้ เฉพาะซึ่งตีราคา เป็นเงินได้เกินกว่าที่ลงทุน
- 40(5) เงินหรือประโยชน์อย่างอื่นที่ได้เนื่องจาก
- (ก) การให้เช่าทรัพย์สิน
- (ข) การผิดสัญญาเช่าซื้อทรัพย์สิน
- (ค) การผิดสัญญาซื้อขายเงินผ่อนซึ่งผู้ขายได้รับคืนทรัพย์สินที่ซื้อขายนั้น โดยไม่ต้องคืนเงินหรือประโยชน์ที่ได้รับไว้แล้ว
- 40(6) เงินได้จากวิชาชีพอิสระ คือ วิชากฎหมาย การประกอบโรคศิลปะ วิศวกรรม สถาปัตยกรรม การบัญชี ประณีตศิลปกรรม หรือวิชาชีพอิสระอื่น ซึ่งจะได้มีพระราชกฤษฎีกากำหนดชนิดไว้
- 40(7) เงินได้จากการรับเหมาที่ผู้รับเหมาต้องลงทุนด้วยการจัดหาสัมภาระในส่วนสำคัญนอกจากเครื่องมือ
- 40(8) เงินได้จากการธุรกิจ การพาณิชย์ การเกษตร การอุตสาหกรรม การขนส่ง หรือการอื่นนอกจากที่ระบุไว้ใน (1) ถึง (7) แล้ว

เงินได้พึงประเมินข้างต้น สามารถหักค่าใช้จ่ายได้ดังนี้

1. เงินได้จากมาตรา 40(1) และ 40(2) หักค่าใช้จ่ายร้อยละ 50 ของเงินได้ แต่ไม่เกิน 100,000 บาท
2. เงินได้จากมาตรา 40(3) หักค่าใช้จ่ายร้อยละ 50 ของเงินได้ แต่ไม่เกิน 100,000 บาท

นอกจากค่าใช้จ่ายข้างต้นแล้ว ยังมีค่าลดหย่อนได้ โดยมีค่าลดหย่อนที่สำคัญ เช่น

รายการหักลดหย่อน/ยกเว้นภาษี	จำนวนเงิน
1. ลดหย่อนส่วนบุคคล 1.1 ผู้มีเงินได้ 1.2 คู่สมรส (ผู้ไม่มีเงินได้) 1.3 บุตร (อายุไม่เกิน 20 ปี) 1.4 ค่าอุปการะบิดา มารดาของผู้มีเงินได้ ค่าอุปการะเลี้ยงบิดา มารดาของคู่สมรส ที่ไม่มีเงินได้ ทั้งนี้บิดามารดามีอายุ 60 ปีขึ้นไป และไม่มีเงินได้พึงประเมินไม่เกิน 30,000 บาท ในปีภาษี	60,000 บาท 60,000 บาท คนละ 30,000 บาท คนละ 30,000 บาท
2. เบี้ยประกันสุขภาพ บิดามารดาของผู้มีเงินได้ และบิดา มารดาของคู่สมรสที่ไม่มีเงินได้	ตามจำนวนที่จ่ายจริง แต่ไม่เกิน 15,000 บาท
3. เบี้ยประกัน 3.1 เบี้ยประกันแบบออมทรัพย์ (ระยะเวลาเอาประกันมากกว่า 10 ปีขึ้นไป) 3.2 ประกันชีวิตแบบบำนาญ	ตามจริงแต่ไม่เกิน 100,000 บาท ไม่เกิน 15% ของเงินได้พึงประเมิน แต่ไม่เกิน 200,000 บาท
4. เงินสะสมที่จ่ายเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพ (providen fund) และกองทุนบำเหน็จ บำนาญข้าราชการ (government pension fund: กบข.)	ตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 500,000 บาท
5. ค่าซื้อกองทุนรวมเพื่อการเลี้ยงชีพ (retirement mutual fund: RMF)	ตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกินร้อยละ 30 ของเงินได้พึงประเมินและไม่เกิน 500,000 บาท
6. ค่าซื้อกองทุนเพื่อการออม (super saving fund : SSF)	ตามที่จ่ายจริง แต่ไม่เกินร้อยละ 30 ของเงินได้พึงประเมินและไม่เกิน 200,000 บาท
7. ดอกเบี้ยเงินกู้ยืมเพื่อการศึกษา	ตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 100,000 บาท
8. เงินสมทบที่จ่ายเข้ากองทุนประกันสังคม (social security fund)	ตามที่จ่ายจริงแต่ไม่เกิน 9,000 บาท
9. เงินบริจาคเพื่อสนับสนุนการศึกษา	ดูรายละเอียดได้จาก www.rd.go.th

ค่าลดหย่อนมีข้อจำกัดและรายละเอียดอีกมาก ดูเพิ่มเติมได้จาก www.rd.go.th

เงินได้สุทธิ = เงินได้พึงประเมิน – ค่าใช้จ่ายตามกฎหมาย – ค่าลดหย่อน

บุคคลธรรมดาชั้นต้องยื่นภาษีเงินได้ (ภ.ง.ด.) ที่นิยมมีอยู่ด้วยกัน 2 แบบคือ

ภ.ง.ด. 90 สำหรับผู้มีเงินได้ทุกประเภท

ภ.ง.ด. 91 สำหรับผู้มีเงินได้ประเภท 1 หรือ ม 40(1) อย่างเดียว

อัตราภาษีเงินได้บุคคลธรรมดา เมื่อได้ยอดเงินได้สุทธิแล้ว นำไปคำนวณภาษีตามอัตราภาษีดังนี้

ชั้นเงินได้สุทธิต่อปี	เงินได้สุทธิจำนวน สูงสุดของชั้น	อัตรา ภาษี	ภาษีในแต่ละชั้น เงินได้	ภาษีสะสม สูงสุดของชั้น
0 - 150,000	150,000	5%	ยกเว้น*	0
150,001 - 300,000	150,000	5%	7,500	7,500
300,001 - 500,000	200,000	10%	20,000	27,500
500,001 - 750,000	250,000	15%	37,500	65,000
750,001 - 1,000,000	250,000	20%	50,000	115,000
1,000,001 - 2,000,000	1,000,000	25%	250,000	365,000
2,000,001 - 5,000,000	3,000,000	30%	900,000	1,265,000
5,000,001 ขึ้นไป	-	35%	-	-

การเสียภาษีในแต่ละปีกรมสรรพากรจะให้ยื่นแสดงความจําางเสียภาษีประจำปีประจำปีในเดือน มกราคม - มีนาคม ของปีถัดไป ผ่านระบบอิเล็กทรอนิกส์หรือผ่านสำนักงานสรรพากรตามท้องที่ที่ผู้เสียภาษีอาศัยอยู่

ตัวอย่าง 2.2.1 บุญเต็มมีเงินได้สุทธิ 35,000 บาท จะเสียภาษีรายได้บุคคลธรรมดาเท่าไร

ตัวอย่าง 2.2.2 บุญศรีมีเงินได้สุทธิ 600,000 บาท จะเสียภาษีรายได้บุคคลธรรมดาเท่าไร

ตัวอย่าง 2.2.3 เอมี่เงินได้สุทธิ 3,500,000 บาท จะเสียภาษีรายได้บุคคลธรรมดาเท่าไร

ตัวอย่าง 2.2.4 แคทรียามีเงินได้พึงประเมิน 5 ล้านบาท และมีรายการลดหย่อนดังนี้

ประกันแบบออมทรัพย์	100,000	บาท
กองทุนรวมเพื่อการออม (SSF)	200,000	บาท
กองทุนรวมเพื่อการเลี้ยงชีพ (RMF)	200,000	บาท

จงคำนวณภาษีรายได้บุคคลธรรมดาที่แคทรียาต้องจ่าย

ตัวอย่าง 2.2.5 พี่ชมีเงินเดือน 50,000 บาท ต่อเดือน โดยนายจ้างหักภาษี ณ ที่จ่าย 10% จงคำนวณภาษีที่พี่ชต้องจ่ายเพิ่มหรือได้คืน (สมมติว่าไม่มีส่วนลดหย่อนอื่น ๆ)

ตัวอย่าง 2.2.6 ในปีภาษีที่ผ่านมาของนายทีเล็กซ์ มีรายการดังนี้

40(1) เงินเดือน ๆ ละ 50,000 บาท หักภาษี ณ ที่จ่าย 10%

40(4) (ก) รายได้จากดอกเบี้ยเงินฝาก หักภาษี ณ ที่จ่าย 15% แล้วจำนวน 85,000 บาท

มีรายการลดหย่อนดังนี้

เงินประกันแบบออมทรัพย์	100,000	บาท
กองทุนรวมเพื่อการออม (SSF)	100,000	บาท
กองทุนรวมเพื่อการเลี้ยงชีพ (RMF)	100,000	บาท
กองทุนสำรองเลี้ยงชีพ	50,000	บาท
สมทบกองทุนประกันสังคม	10,000	บาท

จงคำนวณภาษีรายได้บุคคลธรรมดาของนายทีเล็กซ์ แบบรวมรายได้ดอกเบี้ย และไม่รวมรายได้ดอกเบี้ย

การคำนวณภาษีในกรณีรายได้ 40(4) (ข) เงินปันผล จะมีคำว่า **เครดิตภาษี** คือเงินปันผลที่ได้รับจากการลงทุนในหุ้นที่หักภาษีไป 2 รอบ ดังนี้

1. บริษัทนำส่งภาษีให้กับรัฐ จากกำไรในอัตราที่กำหนดเช่น 10%, 20%, 30% ในส่วนนี้เรียกว่า**เครดิตภาษี** เช่นบริษัท ก มีเครดิตภาษี 20% หมายความว่า ถ้าบริษัท ก มีกำไร 100 บาท จะต้องเสียภาษี 20 บาท
2. เงินปันผลจากข้อ 1 ที่นำส่งให้ผู้ถือหุ้นส่วนใหญ่จะหักภาษี ณ ที่จ่ายอีก 10% ดังนั้นถ้าบริษัท ก มีเครดิตภาษี 20% ปันผล 100 บาท จะส่งถึงผู้ถือหุ้น 72 บาท

ตัวอย่าง 2.2.7 ในรอบปีที่ผ่านมา นายวุฒิมีรายได้จากเงินปันผลอย่างเดียวที่ได้รับจริง 720,000 บาท โดยปันผลมีเครดิตภาษี 20% และถูกหัก ณ ที่จ่ายอีก 10% นายวุฒิควรจะนำเงินปันผลมายื่นเสียภาษีหรือไม่ เพราะเหตุใด

ตัวอย่าง 2.2.8 ในปีภาษีที่ผ่านมาของแคนดัส มีรายการดังนี้

40(1) เงินเดือน ๆ ละ 150,000 บาท หักภาษี ณ ที่จ่าย 10%

40(4) (ก) รายได้จากดอกเบี้ยเงินฝาก หักภาษี ณ ที่จ่าย 15% แล้วจำนวน 127,500 บาท

40(4) (ข) เงินปันผลหุ้นหลังจากหักภาษี ณ ที่จ่ายอีก 10% แล้วจำนวน 576,000 บาท โดยปันผลมี
เครดิตภาษี 20%

มีรายการลดหย่อนดังนี้

เงินค่าเลี้ยงดูบิดามารดา	60,000	บาท
เงินประกันแบบออมทรัพย์	100,000	บาท
เงินประกันแบบออมบำนาญ	200,000	บาท
กองทุนรวมเพื่อการออม (SSF)	200,000	บาท
กองทุนรวมเพื่อการเลี้ยงชีพ (RMF)	54,000	บาท
กองทุนสำรองเลี้ยงชีพ	46,000	บาท

จงคำนวณภาษีรายได้บุคคลธรรมดาแคนดัส แบบรวมรายได้ดอกเบี้ยและเงินปันผล และไม่รวมรายได้ดอกเบี้ยและเงินปันผล

แบบฝึกหัด 2.2

1. นาย ก มีเงินได้สุทธิ 500,000 บาท จะเสียภาษีรายได้บุคคลธรรมดาเท่าไร
2. นาย ข มีเงินได้สุทธิ 7,000,000 บาท จะเสียภาษีรายได้บุคคลธรรมดาเท่าไร
3. นาย ค มีเงินได้พึงประเมิน 4.5 ล้านบาท จงคำนวณภาษีรายได้บุคคลธรรมดาที่นาย ค ต้องจ่าย ถ้ามีรายการลดหย่อนดังนี้

ประกันแบบออมทรัพย์	100,000 บาท
กองทุนรวมเพื่อการออม (SSF)	200,000 บาท
กองทุนรวมเพื่อการเลี้ยงชีพ (RMF)	100,000 บาท

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ตอบคำถาม ข้อ 4-10 ในปีภาษีที่ผ่านมาท่านมีรายการดังนี้

- 40(1) เงินเดือน ๆ ละ 100,000 บาท หักภาษี ณ ที่จ่าย 10%
- 40(4) (ก) รายได้จากดอกเบี้ยเงินฝาก หักภาษี ณ ที่จ่าย 15% แล้วจำนวน 85,000 บาท
- 40(4) (ข) เงินปันผลหุ้นหลังจากหักภาษี ณ ที่จ่ายอีก 10% แล้วจำนวน 72,000 บาท โดยปันผลมีเครดิตภาษี 20%
4. ในกรณีที่ไม่วมรายได้จากดอกเบี้ยและเงินปันผลหุ้น ท่านจะมีเงินได้พึงประเมินเท่าใด
5. ในกรณีที่รวมรายได้จากดอกเบี้ยและเงินปันผลหุ้น ท่านจะมีเงินได้พึงประเมินเท่าใด
6. ท่านโดนหักภาษีไปแล้วทั้งหมดเท่าใด (หัก ณ ที่จ่าย และเครดิตภาษี)
7. จงกำหนดการลดหย่อนให้มีประสิทธิภาพสูงสุด
 - เงินค่าเลี้ยงดูบิดามารดา
 - เงินประกันแบบออมทรัพย์
 - เงินประกันแบบออมบ้านวณ
 - กองทุนรวมเพื่อการออม (SSF)
 - กองทุนรวมเพื่อการเลี้ยงชีพ (3% ของเงินเดือน)
 - กองทุนสำรองเลี้ยงชีพ
8. ท่านต้องจ่ายภาษี หรือได้คืน จากรายได้พึงประเมินข้อ 3 โดยใช้แผนลดหย่อนภาษีข้อ 6
9. ท่านต้องจ่ายภาษี หรือได้คืน จากรายได้พึงประเมินข้อ 4 โดยใช้แผนลดหย่อนภาษีข้อ 6
10. ท่านเลือกที่จะนำรายได้จากดอกเบี้ยและเงินปันผลหุ้นมาคำนวณภาษีเงินได้หรือไม่ เพราะเหตุใด

บทที่ 3

ประกันชีวิต

ประกันชีวิต (life insurance) เป็นสัญญาระหว่างผู้รับประกันซึ่งมักเป็นบริษัทประกันชีวิตกับผู้เอาประกัน โดยผู้เอาประกันต้องจ่ายเบี้ยประกันให้แก่ผู้รับประกัน หากเสียชีวิตระหว่างที่กรมธรรม์มีผลบังคับใช้ ผู้ประกันจะต้องจ่ายเงินให้ผู้รับผลประโยชน์เรียกว่าเงินสินไหม สำหรับประกันชีวิตที่เราสนใจคือประกันที่ได้ผลตอบแทนกลับมาตามเงื่อนไขกรมธรรม์ เราจะศึกษาประกัน 2 ประเภทคือประกันชีวิตแบบออมทรัพย์ และประกันชีวิตแบบบำนาญ

3.1 ประกันแบบออมทรัพย์

ประกันแบบออมทรัพย์ (saving insurance) เป็นประกันชีวิตที่ผู้รับประกันหรือบริษัทประกันต้องจ่ายเงินเอาประกันให้แก่ผู้เอาประกัน 2 กรณีคือ

1. ผู้เอาประกันเสียชีวิต บริษัทจะต้องจ่ายเงินให้ผู้รับผลประโยชน์ตามจำนวนเงินประกัน
2. ผู้เอาประกันมีอยู่ชีวิตอยู่จนถึงระยะเวลาที่กำหนดไว้ในกรมธรรม์ เช่นครบ 10 ปี หลังทำสัญญาหรือบริษัทแบ่งจ่ายเงินทุก ๆ ปี ให้ผู้เอาประกันหลังจากทำสัญญาครบตามปีที่กำหนดไปจนครบอายุกรมธรรม์

ตัวอย่าง 3.1.1

ชื่อแบบประกันชีวิต : เงินฝากสงเคราะห์และครอบครัวแบบออมทรัพย์คู่ใจ 10/10

ระยะคุ้มครองชีวิต : 10 ปี

ทุนประกันชีวิต : 100,000 บาท

ระยะเวลาชำระเบี้ย : 10 ปี

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน	จ่ายคืน ณ ต้นปี	ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	บาท	
1	11,180	-	-	100,000
2	11,180	2%	2,000	100,000
3	11,180	2%	2,000	100,000
4	11,180	2%	2,000	100,000
5	11,180	2%	2,000	100,000
6	11,180	2%	2,000	100,000
7	11,180	2%	2,000	100,000
8	11,180	2%	2,000	100,000
9	11,180	2%	2,000	100,000
10	11,180	2%	2,000	100,000
11	0	102%	102,000	

1. จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์
2. จงคำนวณผลประโยชน์ที่ได้รับทั้งหมดในปีที่ 11
3. ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ 5 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด
4. ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ 1 หลังทำประกันผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด

ตัวอย่าง 3.1.2

ชื่อแบบประกันชีวิต : ออมทรัพย์คุ้มครองค่า 15/8

ระยะคุ้มครองชีวิต : 15 ปี

ทุนประกันชีวิต : 50,000 บาท

ระยะเวลาชำระเบี้ย : 8 ปี

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน	จ่ายคืน ณ ต้นปี	ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	บาท	
1	12,850	-	-	50,000
2	12,850	-	-	50,000
3	12,850	-	-	50,000
4	12,850	5%	2,500	55,000
5	12,850	5%	2,500	67,500
6	12,850	5%	2,500	82,500
7	12,850	5%	2,500	95,000
8	12,850	5%	2,500	110,000
9	0	5%	2,500	110,000
10	0	5%	2,500	110,000
11	0	5%	2,500	110,000
12	0	5%	2,500	110,000
13	0	5%	2,500	110,000
14	0	5%	2,500	110,000
15	0	5%	2,500	110,000
16	0	190%	95,000	

1. จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์
2. จงคำนวณผลประโยชน์ที่ได้รับทั้งหมดในปีที่ 16
3. ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ 9 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด

แบบฝึกหัด 3.1

1. ประกันแบบออมทรัพย์ทุนประกัน 100,000 บาท สำหรับเพศชายอายุ 30 ปี

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี บาท	
1	26,700	-	-	200,000
2	26,700	5%	5,000	200,000
3	26,700	-	-	200,000
4	26,700	5%	5,000	200,000
5	26,700	-	-	200,000
6	26,700	5%	5,000	200,000
7	26,700	-	-	200,000
8	0	5%	5,000	200,000
9	0	-	-	200,000
10	0	5%	5,000	200,000
11	0	-	-	200,000
12	0	5%	5,000	200,000
13	0	-	-	200,000
14	0	5%	5,000	200,000
15	0	205%	205,000	200,000

1.1 จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์

1.2 จงคำนวณผลประโยชน์ที่ได้รับทั้งหมดในปีที่ 15

1.3 ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ 10 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด

2. ประกันแบบออมทรัพย์ทุนประกัน 250,000 บาท สำหรับเพศชายอายุ 30 ปี

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี บาท	
1	35,138	-	-	250,000
2	35,138	-	-	250,000
3	35,138	-	-	250,000
4	35,138	10%	25,000	250,000
5	35,138	-	-	250,000
6	35,138	-	-	250,000
7	35,138	-	-	250,000
8	35,138	10%	25,000	200,000
9	35,138	-	-	250,000
10	35,138	-	-	250,000
11	35,138	-	-	500,000
12	35,138	10%	50,000	500,000
13	35,138	-	-	500,000
14	35,138	-	-	500,000
15	35,138	-	-	500,000
16	35,138	10%	25,000	750,000
17	35,138	-	-	750,000
18	35,138	-	-	750,000
19	35,138	-	-	750,000
20	35,138	10%	25,000	750,000
21	0	290%	725,000	

2.1 จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์

2.2 จงคำนวณผลประโยชน์ที่ได้รับทั้งหมดในปีที่ 10

2.3 ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ 20 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด

3. ประกันแบบออมทรัพย์ทุนประกัน 1,000,000 บาท สำหรับเพศชายอายุ 35 ปี

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี บาท	
1	84,100	-	-	1,000,000
2	84,100	1%	10,000	1,000,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	84,100	1%	10,000	1,000,000
11	84,100	1%	10,000	1,100,000
12	84,100	1%	10,000	1,200,000
13	84,100	1%	10,000	1,300,000
14	84,100	1%	10,000	1,400,000
15	84,100	1%	10,000	1,500,000
16	0	1%	10,000	1,500,000
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
29	0	1%	10,000	1,500,000
30	0	150%	1,500,000	1,500,000

3.1 จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์

3.2 จงคำนวณผลประโยชน์ที่ได้รับทั้งหมดในปีที่ 15

3.3 ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตในปีที่ 20 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด

3.4 ถ้าผู้เอาประกันอยู่จนครบปีที่ 30 จงคำนวณผลกำไรที่ได้รับ

3.2 ประกันแบบบำนาญ

ประกันแบบบำนาญ (persion insurance) คือการประกันชีวิตที่ผู้ทำประกันชีวิตจะต้องจ่ายเบี้ยประกันทุกปีตั้งแต่เริ่มสัญญาจนถึงวันที่เอาผู้เอาประกันไม่สามารถประกอบอาชีพได้หรือเกษียณอายุ 55-60 ปีตามระบุไว้ในกรมธรรม์ หลังจากนั้นผู้เอาประกันจะได้รับเงินรายปีจนครบอายุของกรมธรรม์จนกว่าจะเสียชีวิต

ตัวอย่าง 3.2.1

ชื่อแบบประกันชีวิต : TMM คุ่มชีวิต 85/60

ทุนประกันชีวิต : 100,000 บาท

เริ่มสัญญาเมื่ออายุ : 33 ปี

ระยะเวลาคุ้มครองชีวิต : ตั้งแต่เริ่มสัญญาจนครบอายุ 60 ปี

อายุ	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี เงินบำนาญ (บาท)	
33	5,934			100,000
34	5,934			100,000
⋮	⋮			⋮
48	5,934			100,000
49	5,934			100,878
50	5,934			106,812
51	5,934			113,300
52	5,934			121,800
53	5,934			130,600
54	5,934			139,800
55	5,934			149,400
56	5,934			159,400
57	5,934			170,000
58	5,934			181,100
59	5,934			192,900
60	0	12%	12,000	
61	0	12%	12,000	
⋮	⋮	⋮	⋮	
85	0	12%	12,000	

1. จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์
2. ถ้าผู้เอาประกันอยู่จนอายุครบ 85 ปี จงคำนวณผลกำไรที่ได้รับ

ตัวอย่าง 3.2.2

ชื่อแบบประกันชีวิต : ออมสุข 85/5

ทุนประกันชีวิต : 50,000 บาท

เริ่มสัญญาเมื่ออายุ : 25 ปี

อายุ	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี เงินบำนาญ (บาท)	
25	10,864			100,000
26	10,864			100,000
27	10,864			100,000
28	10,864			100,000
29	10,864			100,000
30	0			100,000
31	0			100,000
⋮	⋮			⋮
59	0			100,000
60	0	15%	7,500	112,500
61	0	15%	7,500	105,500
62	0	15%	7,500	97,500
⋮	⋮			⋮
73	0	15%	7,500	15,000
74	0	15%	7,500	7,500
75	0	15%	7,500	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
85	0	15%	7,500	0

1. จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์
2. ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตเมื่ออายุ 75 ปี ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด
3. ถ้าผู้เอาประกันอยู่จนครบอายุตามกรมธรรม์ จงคำนวณผลกำไรที่ได้รับ

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงอธิบายว่าประกันชีวิตแบบออมทรัพย์และแบบบำนาญแตกต่างกันอย่างไร
2. ประกันแบบบำนาญ สำหรับเพศชายอายุ 35 ปี

RETIREMENT AIA ANNUITY FIX
ภาพแสดงผลประโยชน์ และความคุ้มครองชีวิต AIA ANNUITY FIX
 ชาย อายุ 35 ปี วางแผนเกษียณเมื่ออายุ 60 ปี จ่ายเบี้ยประกันรายปี 64,128 บาท โดยเลือกรับเงินบำนาญปีละ 120,000 บาท (เดือนละ 10,000 บาท) จำนวนจากมูลค่าบำนาญตั้งต้น ณ ปีกรมธรรม์ที่ผู้เอาประกันวัยเริ่มรับเงินบำนาญ (1,920,000 x 6.25%)

อายุ (ณ ปีถัดมา)	สิ้นปีกรมธรรม์ประกันภัยที่	เบี้ยประกันภัยหลักรายปี	เงินบำนาญรายงวด		ความคุ้มครองชีวิต (วงคุ้มครองเงินบำนาญ)		มูลค่าปัจจุบันของจำนวนเงินบำนาญที่บริษัทฯ รับรอง **
			อัตรา (%)	จำนวนเงิน	จำนวนเงิน	มูลค่าเวนคืนกรมธรรม์	
35	1	64,128			67,334	0	
36	2	64,128			134,669	30,720	
37	3	64,128			202,003	90,240	
38	4	64,128			269,338	153,600	
39	5	64,128			336,672	218,880	
40	6	64,128			404,006	291,840	
41	7	64,128			471,341	374,400	
42	8	64,128			538,675	441,600	
43	9	64,128			606,010	510,720	
44	10	64,128			673,344	581,760	
45	11	64,128			740,678	654,720	
46	12	64,128			808,013	729,600	
47	13	64,128			875,347	806,400	
48	14	64,128			942,682	887,040	
49	15	64,128			1,010,016	967,680	
50	16	64,128			1,077,350	1,050,240	
51	17	64,128			1,144,685	1,136,640	
52	18	64,128			1,212,019	1,223,040	
53	19	64,128			1,279,354	1,315,200	
54	20	64,128			1,346,688	1,407,360	
55	21	64,128			1,414,022	1,503,360	
56	22	64,128			1,481,357	1,603,200	
57	23	64,128			1,548,691	1,704,960	
58	24	64,128			1,616,026	1,810,560	
59	25	64,128			1,683,360	1,920,000	
60	26		6.25%	120,000			1,482,240
61	27		6.25%	120,000			1,390,080
62	28		6.25%	120,000			1,296,000
63	29		6.25%	120,000			1,198,080
64	30		6.25%	120,000			1,100,160
65	31		6.25%	120,000			1,000,320
66	32		6.25%	120,000			896,640
67	33		6.25%	120,000			792,960
68	34		6.25%	120,000			687,360
69	35		6.25%	120,000			577,920
70	36		6.25%	120,000			466,560
71	37		6.25%	120,000			353,280
72	38		6.25%	120,000			238,080
73	39		6.25%	120,000			120,960
74	40		6.25%	120,000			0
↓	↓		↓	↓			0
84	50		6.25%	120,000			0
85	51		6.25%	120,000			0
				3,120,000			

สรุปผลประโยชน์ตลอดสัญญา
 รับเงินบำนาญจำนวน 162.50% ของมูลค่าบำนาญตั้งต้น เมื่ออายุครบ 60 - 85 ปี รวม 26 ครั้ง = 3,120,000 บาท

*เงินบำนาญรายงวดในกรณีที่เริ่มรับเงินบำนาญงวดแรกในวันครบรอบปีกรมธรรม์ถัดจากวันที่ผู้เอาประกันมีอายุครบ 60 ปี เท่ากับ 6.25% จากมูลค่าบำนาญตั้งต้น สำหรับเพศชาย และ 5.95% จากมูลค่าบำนาญตั้งต้น สำหรับเพศหญิง

**จากวันที่เริ่มรับเงินบำนาญหากผู้เอาประกันเสียชีวิตก่อนที่จะได้รับเงินบำนาญครบ 15 ปี (อายุ 60-74 ปี) บริษัทฯ จะจ่ายมูลค่าปัจจุบันของจำนวนเงินบำนาญ ตามตารางมูลค่าปัจจุบันของเงินบำนาญและเงินบำนาญคงเหลือที่ยังไม่ได้จ่ายในปีที่ผู้เอาประกันเสียชีวิต (ถ้ามี) ให้แก่ผู้รับผลประโยชน์ แต่ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับอายุที่เริ่มรับเงินบำนาญ

- 2.1 จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์
- 2.2 ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตเมื่ออายุครบ 70 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด
- 2.3 ถ้าผู้เอาประกันอยู่จนครบอายุตามกรมธรรม์ จงคำนวณผลกำไรที่ได้รับ
3. ประกันแบบบำนาญ สำหรับเพศชายอายุ 45 ปี
 - 3.1 จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์
 - 3.2 ถ้าผู้เอาประกันเสียชีวิตเมื่ออายุครบ 70 ผลประโยชน์สุทธิที่ได้รับเป็นเงินเท่าใด

RETIREMENT AIA ANNUITY 60/85
ภาพแสดงผลประโยชน์ และความคุ้มครองชีวิต แบบ เอไอเอ บำนาญ 60/85
 เพศชาย อายุ 45 ปี มีจำนวนเงินเอาประกันภัย 1,000,000 บาท ชำระเบี้ยประกันภัยอายุปี 110,500 บาท

อายุ	สิ้นปี กรมธรรม์ ที่	เบี้ย ประกันภัย สะสม	เงินบำนาญรายงวด*		ความคุ้มครองชีวิต**		มูลค่า ปัจจุบัน ของจำนวน เงินบำนาญ ที่บริษัท รับรอง***
			อัตรา (%)	จำนวน เงิน	อัตรา (%)	จำนวน เงิน	
45	1	110,500			100%	1,000,000	
46	2	221,000			100%	1,000,000	
47	3	331,500			100%	1,000,000	
48	4	442,000			100%	1,000,000	
49	5	552,500			100%	1,000,000	
50	6	663,000			100%	1,000,000	
51	7	773,500			110%	1,100,000	
52	8	884,000			120%	1,200,000	
53	9	994,500			130%	1,300,000	
54	10	1,105,000			140%	1,400,000	
55	11	1,215,500			150%	1,500,000	
56	12	1,326,000			160%	1,600,000	
57	13	1,436,500			170%	1,700,000	
58	14	1,547,000			180%	1,800,000	
59	15	1,657,500			200%	2,000,000	
60	16		10%	100,000			1,195,000
61	17		10%	100,000			1,123,000
62	18		10%	100,000			1,049,000
63	19		10%	100,000			973,000
64	20		10%	100,000			896,000
65	21		10%	100,000			816,000
66	22		10%	100,000			734,000
67	23		10%	100,000			650,000
68	24		10%	100,000			564,000
69	25		10%	100,000			476,000
70	26		10%	100,000			386,000
71	27		10%	100,000			293,000
72	28		10%	100,000			198,000
73	29		10%	100,000			100,000
74	30		10%	100,000			
75	31		10%	100,000			
76	32		10%	100,000			
77	33		10%	100,000			
78	34		10%	100,000			
79	35		10%	100,000			
80	36		10%	100,000			
81	37		10%	100,000			
82	38		10%	100,000			
83	39		10%	100,000			
84	40		10%	100,000			
85	41		10%	100,000			
		รวม	260%	2,600,000			

สรุปผลประโยชน์ตลอดสัญญา

- * เงินบำนาญรายงวด เริ่มปีกรมธรรม์ที่ครบอายุ 60 - 85 ปี รวม 26 ครั้ง ครั้งละ 10% ของจำนวนเงินเอาประกันภัยเริ่มต้น รวมตลอดสัญญาได้รับ 2,600,000 บาท
- ** ความคุ้มครองชีวิตก่อนอายุครบ 60 ปี จำนวนเงินเอาประกันภัยเริ่มต้น + จำนวนเงินเอาประกันภัยเพิ่ม
- *** หากผู้เอาประกันภัยเสียชีวิตก่อนที่จะได้รับบำนาญครบ 15 ปี บริษัทฯ จะจ่ายมูลค่าปัจจุบันของเงินบำนาญให้แก่ผู้รับผลประโยชน์ตามตารางข้างต้น

3.3 ถ้าผู้เอาประกันอยู่จนครบอายุตามกรมธรรม์จึงคำนวณผลกำไรที่ได้รับ

4. ประกันแบบบำนาญ สำหรับเพศชายอายุ 35 ปี



4.1 จงสร้างตารางเบี้ยประกันและผลประโยชน์ที่ได้รับ

4.2 จงคำนวณเบี้ยประกันที่ผู้เอาประกันต้องจ่ายทั้งหมดตลอดระยะเวลาตามกรมธรรม์

4.3 ถ้าผู้เอาประกันอยู่จนครบอายุตามกรมธรรม์จึงคำนวณผลกำไรที่ได้รับ

3.3 อัตราผลตอบแทนภายใน

อัตราผลตอบแทนภายใน (Internal Rate of Return : IRR) คืออัตราผลตอบแทนต่อปีที่นำไปปรับกระแสเงินสดสุทธิทั้งหมดของการลงทุนให้มีมูลค่าปัจจุบันเท่ากับเงินลงทุนเริ่มต้นครั้งแรก หรืออีกนัยว่าอัตราผลตอบแทนที่ทำให้มูลค่าปัจจุบันสุทธิของเงินลงทุนเท่ากับศูนย์

การคำนวณอัตราผลตอบแทนภายในจะต้องรู้จักความหมายของ

1. มูลค่าปัจจุบัน (Present Value : PV)
2. กระแสเงินสด (Cash Flows : CF)
3. มูลค่าปัจจุบันสุทธิ (Net Present Value : NPV)

มูลค่าปัจจุบัน คือ **มูลค่าอนาคต (Future Value : FV)** ที่คิดลดด้วยอัตราดอกเบี้ยลงมาจนถึง ณ เวลาปัจจุบันเพื่อเปรียบเทียบกับค่าของเงินปัจจุบัน โดยตามหลักทั่วไปแล้วเงิน 1 หน่วยในวันนี้ อาจมีค่ามากขึ้นหรือน้อยลงในอนาคต ซึ่งตัวแปรสำคัญที่ทำให้เป็นเช่นนั้นคืออัตราดอกเบี้ยหรืออัตราผลตอบแทน คำนวณได้จากสูตร

$$PV = \frac{FV}{(1 + i)^n}$$

เมื่อ PV คือมูลค่าปัจจุบันของเงิน

FV คือมูลค่าอนาคตของเงิน

i คือดอกเบี้ยใน 1 งวด หรือ **อัตราคิดลด (discount rate)**

n คือจำนวนครั้งในการคิดผลตอบแทน

ตัวอย่าง 3.3.1 นายพลพลต้องการเงิน 20,000 บาทภายใน 10 ปีข้างหน้า ต้องนำไปลงทุนในกองทุนรวมเป็นจำนวนเท่าใด ถ้ากองทุนนี้ให้ผลตอบแทน 12% ต่อปี (คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี)

กระแสเงิน คือการแสดงความเคลื่อนไหวของเงินลงทุน แบ่งออกเป็น 2 ประเภทคือ

1. **กระแสเงินเข้า (Cash outflows)** คือเงินที่เราจ่ายเพื่อการลงทุนหรือเงินที่จ่ายออกไป
2. **กระแสเงินออก (Cash inflows)** คือเงินที่ได้รับจากการลงทุนหรือผลตอบแทนที่ได้รับ ซึ่งเป็นเงินที่เราได้รับมา

ในกรณีที่เรายจ่ายเงินเพื่อการลงทุน และได้รับผลตอบแทนในช่วงเวลาเดียวกัน ผลต่างของกระแสเงินเข้ากับกระแสเงินออกเรียกว่า **กระแสเงินสดสุทธิ (Net Cash Flows : NCF)**

$$\text{กระแสเงินสดสุทธิ} = \text{กระแสเงินเข้า} - \text{กระแสเงินออก}$$

มูลค่าปัจจุบันสุทธิ (NCF) หมายถึงผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดสุทธิในช่วงเวลาของการลงทุน กำหนดให้

NCF_n คือกระแสเงินสดสุทธิในงวดที่ n

$PV[x]$ คือมูลค่าปัจจุบันของเงินจำนวน x บาท

ดังนั้น

$$NPV = NCF_0 + PV[NCF_1] + PV[NCF_2] + \dots + PV[NCF_n]$$

ตัวอย่าง 3.3.2 นาย ก ลงทุน 100,000 บาท และผลตอบแทนปีละ 40,000 บาท ทุกสิ้นปี เป็นเวลา 4 ปี จงหามูลค่าปัจจุบันสุทธิของการลงทุนครั้งนี้ที่อัตราคิดลด 5%

ตัวอย่าง 3.3.3 จากตัวอย่าง 3.3.2 ถ้านาย ก นำเงินไปฝากธนาคารที่ให้อัตราดอกเบี้ย 6% ทุกต้นปีเป็นเวลา 4 ปี ควรจะลงทุนแบบไหนเพื่อให้ได้ผลตอบแทนมากกว่ากัน

ค่า r ที่ได้จาก

$$\text{มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินออก} = \text{มูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินเข้า}$$

เรียกว่าอัตราผลตอบแทน นั่นคืออัตราผลตอบแทนที่ทำให้ $NPV = 0$ เรียกว่า **อัตราผลตอบแทนภายใน (IRR)**

ตัวอย่าง 3.3.4 จากตัวอย่าง 3.3.2 จงหาอัตราผลตอบแทนภายใน หรือ IRR

1. โดยการสุ่มค่า r
2. โดยใช้โปรแกรม excel

ตัวอย่าง 3.3.5 จงคำนวณ IRR ของประกันแบบออมทรัพย์

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน	จ่ายคืน ณ	ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	ต้นปี บาท	
1	11,180	-	-	100,000
2	11,180	2%	2,000	100,000
3	11,180	2%	2,000	100,000
4	11,180	2%	2,000	100,000
5	11,180	2%	2,000	100,000
6	11,180	2%	2,000	100,000
7	11,180	2%	2,000	100,000
8	11,180	2%	2,000	100,000
9	11,180	2%	2,000	100,000
10	11,180	2%	2,000	100,000
11	0	102%	102,000	

ตัวอย่าง 3.3.6 จงคำนวณ IRR ของประกันแบบออมทรัพย์

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		จ่ายคืน ณ ต้นปี	จ่ายคืน ณ ต้นปี	
		% ของทุนประกันชีวิต	บาท	
1	12,850	-	-	50,000
2	12,850	-	-	50,000
3	12,850	-	-	50,000
4	12,850	5%	2,500	55,000
5	12,850	5%	2,500	67,500
6	12,850	5%	2,500	82,500
7	12,850	5%	2,500	95,000
8	12,850	5%	2,500	110,000
9	0	5%	2,500	110,000
10	0	5%	2,500	110,000
11	0	5%	2,500	110,000
12	0	5%	2,500	110,000
13	0	5%	2,500	110,000
14	0	5%	2,500	110,000
15	0	5%	2,500	110,000
16	0	190%	95,000	

แบบฝึกหัด 3.3

1. ในการลงทุน 1 ล้านบาท และผลตอบแทนปีละ 30,000 บาท ทุกสิ้นปี เป็นเวลา 4 ปี แล้วคืนเงินต้นในปีที่ 4 จงหา
 - 1.1 มูลค่าเงินปัจจุบันของผลตอบแทนในแต่ละปี โดยคิดดอกเบี้ย 3% ต่อปี
 - 1.2 IRR ของการลงทุน
2. จงเปรียบเทียบผลตอบแทนในการลงทุนในข้อ 1 กับการลงทุนฝากธนาคารด้วยอัตราดอกเบี้ย 4% ว่าการลงทุนแบบไหนให้ผลตอบแทนมากกว่ากัน
3. นาย ก ลงทุน 100,000 บาท เป็นเวลา 5 ปี โดยผลตอบแทน ณ สิ้นปีที่ 1- ปีที่ 3 ได้รับปีละ 30,000 บาท และในสิ้นปีที่ 4 และสิ้นปีที่ 5 ได้รับปีละ 40,000 บาท โดยไม่ได้รับเงินต้นจกหาอัตราผลตอบแทนภายในของการลงทุนนี้
4. ในการลงทุน 100,000 บาท เป็นเวลา 4 ปี ได้ผลตอบแทนทุกสิ้นปีใน 3 ปีแรกได้ปีละ 40,000 บาท จงหาอัตราผลตอบแทนภายในปีสุดท้ายว่าควรเป็นเท่าไร และต้องลงทุนครั้งนี้เท่าใดจึงได้อัตราผลตอบแทนภายใน 10%
5. บริษัท ก เสนอแบบประกันที่มีทุนประกัน 100,000 บาทดังนี้

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี บาท	
1	40,000	-	-	100,000
2	40,000	2%	2,000	100,000
3	40,000	2%	2,000	100,000
4	40,000	2%	2,000	100,000
5	0	2%	2,000	100,000
6	0	2%	2,000	100,000
7	0	2%	2,000	100,000
8	0	2%	2,000	100,000
9	0	2%	2,000	100,000
10	0	2%	2,000	100,000
11	0	120%	120,000	

จงหาอัตราผลตอบแทนภายในของประกันภัยนี้

6. จากข้อ 5 ถ้าทำเป็นนักคณิตศาสตร์ประกันภัย ถ้าต้องการให้ผู้ถือกรมธรรม์ได้ผลประโยชน์ 2% อยากทราบว่าท่านต้องให้ผู้ถือกรมธรรม์ได้เงินเท่าใดในงวดสุดท้าย

3.4 การลดหย่อนภาษีโดยประกันชีวิต

ในการทำประกันชีวิตแบบออมทรัพย์ กฎหมายกำหนดให้ใช้ลดหย่อนในการคำนวณภาษีรายได้บุคคลธรรมดาได้เท่ากับจำนวนเงินที่จ่ายจริงไม่เกิน 100,000 บาท ในกรณีแบบบำนาญลดหย่อนได้เท่ากับจำนวนเงินที่จ่ายจริงไม่เกิน 200,000 บาท (ทั้งนี้เมื่อรวมกับเงินที่จ่ายเข้ากองทุนสำรองเลี้ยงชีพและกองทุนบำนาญข้าราชการ และกองทุนสำรองเลี้ยงชีพ ต้องไม่เกิน 500,000 บาท)

ตัวอย่าง 3.4.1 นาย ก มีเงินได้สุทธิก่อนซื้อประกันชีวิต 1,000,000 บาท จงคำนวณภาษีของนาย ก และถ้านาย ก ตัดสินใจซื้อประกันชีวิตแบบออมทรัพย์ 100,000 บาท และประกันชีวิตแบบบำนาญ 200,000 บาท จะประหยัดภาษีได้เท่าไร

ตัวอย่าง 3.4.2 ถ้าซื้อประกันแบบออมทรัพย์ต่อไปนี้จะนำไปลดหย่อนภาษีได้ในอัตรา 15% จงหาผลตอบแทนภายในของกรมธรรม์หลังหักค่าลดหย่อนแล้ว

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน	จ่ายคืน ณ ต้นปี	ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	บาท	
1	11,180	-	-	100,000
2	11,180	2%	2,000	100,000
3	11,180	2%	2,000	100,000
4	11,180	2%	2,000	100,000
5	11,180	2%	2,000	100,000
6	11,180	2%	2,000	100,000
7	11,180	2%	2,000	100,000
8	11,180	2%	2,000	100,000
9	11,180	2%	2,000	100,000
10	11,180	2%	2,000	100,000
11	0	102%	102,000	

ตัวอย่าง 3.4.3 จงคำนวณผลตอบแทนภายในของแบบประกันภัยต่อไปนี้ เมื่อผู้เอาประกันสามารถลดหย่อนภาษีได้ 10% และเสียชีวิตเมื่ออายุ 70 ปี

อายุ	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี เงินบำนาญ (บาท)	
33	5,934			100,000
34	5,934			100,000
⋮	⋮			⋮
48	5,934			100,000
49	5,934			100,878
50	5,934			106,812
51	5,934			113,300
52	5,934			121,800
53	5,934			130,600
54	5,934			139,800
55	5,934			149,400
56	5,934			159,400
57	5,934			170,000
58	5,934			181,100
59	5,934			192,900
60	0	12%	12,000	
61	0	12%	12,000	
⋮	⋮	⋮	⋮	
85	0	12%	12,000	

แบบฝึกหัด 3.4

1. นาย ก มีเงินได้สุทธิก่อนซื้อประกันชีวิต 500,000 บาท จงคำนวณภาษีที่นาย ก ต้องจ่ายก่อน และหลังซื้อประกันแบบออมทรัพย์ 70,000 บาท
2. จงหาจำนวนภาษีที่สามารถลดหย่อนได้จากการซื้อประกันชีวิตแบบออมทรัพย์ 100,000 บาท และประกันชีวิตแบบบำนาญ 200,000 บาท เมื่อท่านมีฐานภาษีที่อัตรา 25%
3. จงหาผลตอบแทนภายในของประกันชีวิตแบบออมทรัพย์

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี บาท	
1	12,850	-	-	50,000
2	12,850	-	-	50,000
3	12,850	-	-	50,000
4	12,850	5%	2,500	55,000
5	12,850	5%	2,500	67,500
6	12,850	5%	2,500	82,500
7	12,850	5%	2,500	95,000
8	12,850	5%	2,500	110,000
9	0	5%	2,500	110,000
10	0	5%	2,500	110,000
11	0	5%	2,500	110,000
12	0	5%	2,500	110,000
13	0	5%	2,500	110,000
14	0	5%	2,500	110,000
15	0	5%	2,500	110,000
16	0	190%	95,000	

เมื่อสามารถลดหย่อนภาษีได้ที่อัตรา 10% และ 20%

4. จงหาผลตอบแทนภายในของประกันชีวิตแบบออมทรัพย์

ปีที่	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	จ่ายคืน ณ ต้นปี บาท	
1	40,000	-	-	100,000
2	40,000	2%	2,000	100,000
3	40,000	2%	2,000	100,000
4	40,000	2%	2,000	100,000
5	0	2%	2,000	100,000
6	0	2%	2,000	100,000
7	0	2%	2,000	100,000
8	0	2%	2,000	100,000
9	0	2%	2,000	100,000
10	0	2%	2,000	100,000
11	0	120%	120,000	

เมื่อสามารถลดหย่อนภาษีได้ที่อัตรา 15% และ 20%

5. จงคำนวณผลตอบแทนภายในของแบบประกันภัยต่อไปนี้ เมื่อผู้เอาประกันสามารถลดหย่อนภาษีได้ 20% และเสียชีวิตเมื่ออายุ 85 ปี

อายุ	เบี้ยประกันภัย ณ ต้นปี (บาท)	ผลประโยชน์เงิน จ่ายคืน ณ ต้นปี		ความคุ้มครองชีวิต (บาท)
		% ของทุนประกันชีวิต	เงินบำนาญ (บาท)	
25	10,864			100,000
26	10,864			100,000
27	10,864			100,000
28	10,864			100,000
29	10,864			100,000
30	0			100,000
31	0			100,000
⋮	⋮			⋮
59	0			100,000
60	0	15%	7,500	112,500
61	0	15%	7,500	105,500
62	0	15%	7,500	97,500
⋮	⋮			⋮
73	0	15%	7,500	15,000
74	0	15%	7,500	7,500
75	0	15%	7,500	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
85	0	15%	7,500	0

6. จากผลตอบแทนภายในของเหตุการณ์ในข้อ 4 เมื่อผู้เอาประกันเสียชีวิตเมื่ออายุ 70 ปี (ได้รับเงิน 7,500 บาทก่อนเสียชีวิต)
7. จากผลตอบแทนภายในของเหตุการณ์ในข้อ 4 เมื่อผู้เอาประกันเสียชีวิตเมื่ออายุ 75 ปี (ได้รับเงิน 7,500 บาทก่อนเสียชีวิต)

บทที่ 4

การลงทุนในตราสารการเงิน

เงินที่เหลือจากการออม เราอาจนำไปฝากธนาคารซึ่งมีความปลอดภัยสูงหรือความเสี่ยงต่ำแต่ผลตอบแทนค่อนข้างต่ำ และอีกทางเลือกคือนำไปลงทุนในด้านอื่น ๆ ซึ่งในบทนี้จะกล่าวถึงตราสารการเงิน 2 แบบ คือ ตราสารหนี้ และตราสารทุน

ตราสารตลาดเงิน (money market) คือตราสารที่มีอายุสั้น (ไม่เกิน 1 ปี) มีสภาพคล่องสูงสามารถซื้อขายเปลี่ยนมือกันได้ไวโดยราคาไม่ตก ตัวอย่างของตราสารตลาดเงิน เช่น เงินฝากประจำ 3 เดือน 6 เดือน 12 เดือน ตั๋วแลกเงิน สัญญาใช้เงิน พันธบัตรรัฐบาลอายุสั้น

4.1 ตราสารหนี้

ตราสารหนี้ คือสัญญาทางการเงินระหว่างผู้ออกตราสารหนี้ (ผู้ขอกู้) และผู้ถือตราสารหนี้ (ผู้ให้กู้) ในสัญญานั้นจะกำหนดอายุสัญญาและเงินต้นล่วงหน้า (ราคาหน้าตั๋ว) โดยผู้ขอกู้จะต้องจ่ายผลตอบแทน (ดอกเบี้ย) ให้กับผู้ถือพันธบัตรตามอัตราที่กำหนดไว้ในพันธบัตร การลงทุนในตราสารหนี้จะได้รับดอกเบี้ยสม่ำเสมอและความเสี่ยงไม่มาก ตัวอย่างตราสารหนี้คือ

1. **ตั๋วเงินคลัง (T-bill)** คือตราสารหนี้ระยะสั้นอายุไม่เกิน 1 ปีออกโดยรัฐบาล
2. **พันธบัตรรัฐบาล (Government bond)** คือตราสารหนี้ที่มีอายุมากกว่า 1 ปีออกโดยรัฐบาล
3. **หุ้นกู้ (Corporate bond)** คือตราสารหนี้ที่ออกโดยเอกชน
4. **พันธบัตรรัฐวิสาหกิจ (State enterprise bond)** คือตราสารหนี้ที่ออกโดยรัฐวิสาหกิจ

ตัวอย่าง 4.1.1 พรชัยซื้อพันธบัตรอายุ 5 ปี ราคาหน้าพันธบัตร 100,000 บาท ณ วันที่ 1 มกราคม 2563 โดยได้รับผลตอบแทน 5% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน (ทุกวันที่ 1 มกราคม และ 1 กรกฎาคม)

1. พรชัยได้รับดอกเบี้ยครั้งละเท่าใด
2. ถ้าพรชัยขายพันธบัตรให้พรศักดิ์ในวันที่ 1 เมษายน 2562 โดยไม่ต้องการกำไรและต้องการขาดทุน พรชัยควรขายพันธบัตรให้พรศักดิ์ในราคาเท่าใด
3. จงหา IRR ของการลงทุนนี้

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาดอกเบี้ยที่ค้างจ่าย ณ วันที่ 26 สิงหาคม ของพันธบัตรจำนวน 1,000,000 บาท ที่มีอัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุกวันที่ 30 มิถุนายน และ 31 ธันวาคมของทุกปี

ตัวอย่าง 4.1.3 ถ้าซื้อพันธบัตรจำนวน 500,000 บาท วันที่ 30 สิงหาคม ที่มีอัตราดอกเบี้ย 10% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุกวันที่ 30 มิถุนายน และ 31 ธันวาคมของทุกปี จงหาดอกเบี้ยที่จะได้รับในงวดแรก

การซื้อขายพันธบัตร เมื่อผู้ถือต้องการขายพันธบัตรผู้ถือสามารถขายได้ทุกเมื่อ ณ ราคาซึ่งตกลงกันระหว่างผู้ซื้อกับผู้ขาย โดยสามารถซื้อขายได้ใน **ตลาดรอง (secondary market)** ซึ่งมีสถาบันการเงิน ธนาคารพาณิชย์ และนายหน้าหลักทรัพย์เป็นคนกลางในการซื้อขายพันธบัตร

ตัวอย่าง 4.1.4 ปุณฺยต้องการลงทุนในพันธบัตร โดยสนใจซื้อพันธบัตรที่มีอายุเหลือ 5 ปี ราคาหน้าพันธบัตร 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 12% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 3 เดือน จงหาอัตราผลตอบแทนของการลงทุนนี้ถ้า

1. ซื้อพันธบัตรในราคา 120,000 บาท

2. ซื้อพันธบัตรในราคา 80,000 บาท

ตัวอย่าง 4.1.5 จากตัวอย่าง 4.1.4 ปู่บุญต้องการผลตอบแทน 10% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 3 เดือน ควรซื้อพันธบัตรในราคาเท่าใด

ตัวอย่าง 4.1.6 เอสซื้อพันธบัตรอายุ 5 ปี ราคา 1,000 บาท มีอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน มาในราคา 1,100 บาท เมื่อถือครองพันธบัตรครบ 3 ปี จึงได้ขายต่อในราคา 1,200 บาท จงหาว่าเอสได้ผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์ในการลงทุนครั้งนี้ ควรซื้อพันธบัตรในราคาเท่าใด

ความเสี่ยงในการลงทุนในตราสารหนี้

- **ความสามารถชำระหนี้** คือการผู้ออกตราสารไม่สามารถชำระดอกเบี้ยหรือเงินต้นเมื่อครบกำหนด
- **ความเสี่ยงจากการเปลี่ยนแปลงอัตราดอกเบี้ย** โดยทั่วไปตราสารหนี้จะมีอัตราดอกเบี้ยคงที่และเป็นเวลานาน แต่เมื่อเวลาผ่านไปอัตราดอกเบี้ยของตลาดอาจสูงกว่าอัตราอัตราดอกเบี้ยที่ได้รับจากการถือครองตราสาร ทำให้ผู้ถือครองตราสารเสียโอกาสในการที่จะได้ผลตอบแทนมากขึ้น
- **ความเสี่ยงด้านสภาพคล่อง** เมื่อเราต้องการใช้เงินสดก่อนครบเวลาได้ถอนตราสาร เราจำเป็นต้องขายตราสารในตลาดรองซึ่งอาจจะขาดทุนหรือขายได้ไม่รวดเร็วทันเวลาที่เราต้องการใช้เงิน
- **ความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยน** ในกรณีลงทุนในตราสารที่ใช้เป็นสกุลเงินต่างประเทศ จะมีความเสี่ยงจากอัตราแลกเปลี่ยนจะเปลี่ยนแปลงไปจากตอนลงทุน
- **ความเสี่ยงจากกฎระเบียบของรัฐ** เช่น การเปลี่ยนแปลงระเบียบต่าง ๆ ที่เกี่ยวข้องกับการลงทุนในตราสาร เช่น การเปลี่ยนแปลงอัตราภาษีจากดอกเบี้ยที่ได้รับจากพันธบัตร (ปัจจุบันจะมีการหักภาษีรายได้ ณ ที่จ่าย 15% ของดอกเบี้ย)

วิธีหนึ่งที่ช่วยให้ผู้ลงทุนในตราสารทราบถึงความเสี่ยงของผู้ออกตราสารคือ **การจัดอันดับ (rating)** ของตราสาร

อันดับเครดิต	ความหมาย
AAA	อันดับเครดิตสูงที่สุด มีความเสี่ยงต่ำที่สุดที่จะไม่สามารถชำระหนี้ได้ตามกำหนด
AA	อันดับเครดิตรองลงมา และถือว่ามีความเสี่ยง
BBB	ถือว่ามีความเสี่ยงและความสามารถในการชำระหนี้อยู่ในระดับปานกลาง
BB	มีความเสี่ยงระดับสูง
B	มีความเสี่ยงระดับสูงมาก
C	มีความเสี่ยงระดับสูงในระดับผิดนัดชำระหนี้สูงที่สุด
D	อยู่ในสถานะของการผิดชำระหนี้

อันดับเครดิตข้างต้นอาจจะมีเครื่องหมาย + หรือ - เพื่อแสดงความแตกต่างกันของอันดับเครดิตที่เพิ่มขึ้นหรือลดลง ถ้าอันดับเครดิตตั้งแต่ BBB ขึ้นไปถือว่าเป็นตราสารใน **อันดับนำลงทุน (investment grade)** ส่วนอันดับเครดิตต่ำกว่า BBB ลงไปมักเป็นตราสารใน **อันดับเก็งกำไร (speculative grade)** ถ้าผู้ออกตราสารหนี้ล้มเหลวหรือเลิกกิจการลำดับการชำระหนี้เป็นดังนี้ เจ้าหนี้ประกัน เจ้าหนี้ไม่ด้อยสิทธิ เจ้าหนี้ประเภทด้อยสิทธิ ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธิ และผู้ถือหุ้นสามัญ ตามลำดับ

แบบฝึกหัด 4.1

1. พันธบัตรอายุ 3 ปีที่มีราคาหน้าพันธบัตร 500,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน ผู้ที่ถือครองพันธบัตรนี้จะได้รับดอกเบี้ยทั้งหมดกี่ครั้ง ครั้งละเท่าใด
2. นาย ก ซื้อพันธบัตรที่มีราคาหน้าพันธบัตร 1,000,000 บาท อายุ 5 ปี จ่ายดอกเบี้ย 12% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน มาในราคา 900,000 บาท จงหาอัตราผลตอบแทนที่นาย ก ได้รับ
3. จากข้อ 2 ถ้านาย ก ซื้อพันธบัตรมาในราคา 1,200,000 บาท อัตราผลตอบแทนที่นาย ก ได้รับ จะเป็นเท่าใด
4. จากข้อ 2 นาย ก ต้องการผลตอบแทน 10% (จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน) นาย ก ต้องซื้อพันธบัตรในราคาเท่าใด
5. จากข้อ 2 ถ้านาย ก ถือพันธบัตรเป็นเวลา 2 ปี เมื่อได้รับดอกเบี้ยงวดที่ 4 แล้วนาย ก ขายพันธบัตรต่อให้ นาย ข ในราคา 1,100,000 บาท นาย ก จะได้อัตราผลตอบแทนเท่าใด
6. จากข้อ 5 ถ้านาย ข ถือครองพันธบัตรครบกำหนด นาย ข จะได้อัตราผลตอบแทนเท่าใด
7. ดลซื้อพันธบัตรอายุ 10 ปี จำนวน 100,000 บาท อัตราดอกเบี้ย 4% ต่อปี จ่ายดอกเบี้ยทุก 6 เดือน ถ้ามลถือครองพันธบัตรมา 3 ปี แล้วต้องการขายต่อเพื่อให้อัตราผลตอบแทนการลงทุนทั้งหมด 6% ต่อปี แล้วดลต้องขายพันธบัตรในราคาเท่าใด
8. พิมพ์ซื้อพันธบัตรราคาหน้าพันธบัตร 500,000 บาท เมื่อวันที่ 1 มกราคม โดยมีอัตราดอกเบี้ย 6% ต่อปีจ่ายดอกเบี้ยทุก 3 เดือน โดยจ่ายในวันที่ 1 มกราคม 1 เมษายน 1 กรกฎาคม และ 1 ตุลาคม จงหาดอกเบี้ยค้างชำระ ณ วันที่ 15 สิงหาคม
9. จากข้อ 8 พิมพ์ขายพันธบัตรในวันที่ 15 สิงหาคม ในราคา 510,000 บาท พิมพ์จะได้รับกำไรหลังหักดอกเบี้ยเป็นจำนวนเท่าใด

4.2 ตราสารทุนหรือหุ้น

หุ้น (equity, stock) คือตราสารที่บริษัทออกให้แก่ **ผู้ถือหุ้น (stock holder)** เพื่อระดมเงินลงทุนไปใช้ในกิจการ ผู้ถือตราสารทุนจะมีฐานะเป็นเจ้าของกิจการ จะมีส่วนได้เสียในทรัพย์สินและรายได้ของบริษัท ผลตอบแทนที่จะได้รับจะอยู่ในรูป **การปันผล (dividend)** ซึ่งขึ้นอยู่กับผลกำไรและข้อตกลงของกิจการนั้น หุ้นมี 2 ประเภทคือ

1. **หุ้นสามัญ (common stock)** เป็นตราสารที่ออกโดยบริษัทมหาชนจำกัด (บมจ.) ที่ต้องการระดมทุนจากประชาชน โดยผู้ถือหุ้นสามัญจะมีสิทธิร่วมเป็นเจ้าของบริษัท มีสิทธิในการออกเสียงลงมติในที่ประชุมผู้ถือหุ้นตามสัดส่วนของหุ้นที่ถือครองอยู่ กล่าวคือเป็นผู้ร่วมตัดสินใจในปัญหาสำคัญในที่ประชุมผู้ถือหุ้น เช่นการเพิ่มทุน การจ่ายปันผล การควบรวมกิจการ ฯลฯ นอกจากนี้ ผู้ถือหุ้นสามัญยังมีสิทธิได้รับเงินปันผลเมื่อบริษัทมีกำไร และมีโอกาสได้รับกำไรจากส่วนต่างราคาเมื่อราคาหลักทรัพย์ปรับตัวสูงขึ้นตามศักยภาพบริษัท รวมถึงโอกาสได้รับสิทธิในการจองหุ้นออกใหม่เมื่อบริษัทเพิ่มทุนหรือจัดสรรใบสำคัญแสดงสิทธิต่าง ๆ ให้ผู้ถือหุ้น
2. **หุ้นบุริมสิทธิ (preferred stock)** เป็นตราสารที่ผู้ถือมีส่วนร่วมเป็นเจ้าของกิจการเช่นเดียวกับหุ้นสามัญแต่จะไม่มีสิทธิในการออกเสียงลงมติในที่ประชุมผู้ถือหุ้น เมื่อกิจการมีกำไรจากการดำเนินงาน ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธิจะได้รับปันผลในอัตราคงที่ ซึ่งอาจจะมากหรือน้อยกว่าผู้ถือหุ้นสามัญก็ได้ ขณะเดียวกันหากกิจการนั้นต้องเลิกกิจการและการชำระบัญชีโดยการขายทรัพย์สิน ผู้ถือหุ้นบุริมสิทธิก็จะได้รับเงินคืนทุนก่อนผู้ถือหุ้นสามัญ

วิธีการคำนวณมูลค่าหุ้นโดยใช้ **การคิดลดกระแสเงิน (discount cash flows)** ซึ่งเป็นการประเมินมูลค่าหุ้นจากเงินปันผลที่จะได้รับในอนาคต

มูลค่าปัจจุบันของหุ้น (V_0) = ผลรวมของมูลค่าปัจจุบันของเงินปันผลในอนาคต

ถ้าให้หุ้นปันผลปีละครั้ง โดยที่ d_i คือเงินปันผลในปีที่ i จะได้ว่า

$$V_0 = \frac{d_1}{1+r} + \frac{d_2}{(1+r)^2} + \frac{d_3}{(1+r)^3} + \dots$$

เมื่อต้องการอัตราผลตอบแทน r ต่อปี
ในกรณีที่ปันผลคงที่ d บาทต่อปี จะได้ว่า

$$V_0 = \frac{d}{r}$$

ตัวอย่าง 4.2.1 หุ้น PTT ของบริษัท ปตท. จำกัด (มหาชน) ให้ปันผลโดยเฉลี่ย 2 บาทต่อหุ้นทุกปี ถ้าท่านต้องการผลตอบแทนในการลงทุน 10% ต่อปี จงหาราคาหุ้น PTT ที่ท่านจะซื้อ

ตัวอย่าง 4.2.2 หุ้น JAS ของบริษัททจัสมินิเตอร์เนชั่นแนลจำกัด (มหาชน) ให้ปันผลโดยเฉลี่ย 0.5 บาทต่อหุ้นทุกปี ถ้าท่านต้องการผลตอบแทนในการลงทุน 15% ต่อปี จงหาราคาหุ้น JAS ที่ท่านจะซื้อ

ทฤษฎีบท 4.2.3 กำหนดให้หุ้นจ่ายปันผลในปีแรก d บาทและจ่ายเพิ่มขึ้นทุกปีด้วยอัตรา c ถ้านักลงทุนต้องการอัตราผลตอบแทน r โดย $c < r$ จะได้ว่ามูลค่าราคาหุ้น มีค่าดังนี้

$$V_0 = \frac{d}{r - c}$$

ตัวอย่าง 4.2.4 หุ้น TKN ของบริษัทเก้าแก่น้อยฟู้ด แอนด์ มาร์เก็ตติ้ง จำกัด (มหาชน) ในปี 2562 ปันผล 0.3402 บาทต่อหุ้น และจะเพิ่มขึ้น 5% ทุกปี ถ้าผู้ต้องการผลตอบแทนในการลงทุน 10% ทุกปี พิจารณาซื้อหุ้น TKN ที่ราคาเท่าใด

ตัวอย่าง 4.2.5 ฎาฎาต้องการซื้อหุ้นให้ได้ผลตอบแทน 10% ต่อปี จากหุ้นที่มีข้อมูลดังนี้

(ก) ในปีแรกจ่ายเงินปันผล 10 บาทและเพิ่มขึ้นปีละ 20% ไปอีก 4 ปี

(ข) หลังจาก 5 ปีแล้ว อัตราการเติบโตของเงินปันผลจะอยู่ที่ 5% ต่อปีตลอดไป

ตัวอย่าง 4.2.6 หุ้น ABA มีการจ่ายปันผลปีละ 5 บาททุกสิ้นปีในช่วง 10 ปีแรก หลังจากนั้นเงินปันผลจะเพิ่มขึ้นปีละ 4% จงหาราคาหุ้น ABA ที่ทำให้ผู้ซื้อีผลตอบแทน 10% ต่อปี

มูลค่าหุ้นเมื่อมีการจ่ายปันผลเป็นหุ้น

หุ้นปันผล (stock dividend) คือการจ่ายปันผลในรูปแบบของหุ้นสามัญออกใหม่ ซึ่งเป็นอีกหนึ่ทางเลือกของบริษัทในการจ่ายผลตอบแทนให้ผู้ถือหุ้น นอกเหนือจากการจ่ายปันผลในรูปแบบ **เงินปันผล (cash dividend)** โดยหุ้นปันผลจะกำหนดจำนวนหุ้นที่จ่ายให้ผู้ถือหุ้นตามสัดส่วนของหุ้นที่ถืออยู่ บริษัทจึงต้องเพิ่มทุนเพื่อนำมาจ่ายปันผลเป็นหุ้นปันผล

ข้อดีของการจ่ายปันผลเป็นหุ้น

1. เก็บเงินสดไว้ลงทุนและขยายกิจการ โดยไม่ต้องจัดหาทุนจากแหล่งทุนภายนอก ซึ่งอาจทำให้ต้นทุนทางการเงินสูงขึ้น
2. ไม่เสียสภาพคล่องทางการเงิน
3. สัดส่วนหนี้สินต่อส่วนของผู้ถือหุ้น (D/E ratio) ไม่เปลี่ยนแปลง
4. เพิ่มสภาพคล่องของหุ้นจากจำนวนหุ้นหมุนเวียนมีมากขึ้น ส่งผลต่อการระดมทุนในอนาคต
5. รักษาความน่าสนใจในการลงทุนจากบริษัทยังคงมีการจ่ายปันผล

การจ่ายปันผลเป็นหุ้นนั้นอาจทำให้มูลค่าของหุ้นลดลง เนื่องจากบริษัทยังคงมีทรัพย์สินเท่าเดิมแต่จำนวนหุ้นเพิ่มขึ้น จะได้ว่า

$$\text{มูลค่ารวมของหุ้นก่อนได้รับปันผล} = \text{มูลค่ารวมของหุ้นหลังได้รับปันผล}$$

ตัวอย่าง 4.2.7 บริษัทแห่งหนึ่งจ่ายปันผลเป็นหุ้นในอัตรา 2 หุ้นเดิมต่อ 1 หุ้นปันผล ถ้าเดิมหุ้นมีมูลค่าหุ้นละ 15 บาท จงหามูลค่าหุ้นหลังจากที่ได้รับปันผลเป็นหุ้นแล้ว

ถ้ามีการปันผล n หุ้นเดิมต่อ m หุ้นปันผล และเดิมหุ้นมีราคาหุ้นละ P_1 บาท หลังได้รับปันผล P_2 แล้วหุ้นควรจะมีความจะได้ว่า

$$P_2 = \frac{nP_1}{n + m}$$

เรียกปรากฏการณ์ที่ราคาหุ้นลดลงนี้ว่า **ผลกระทบเจือจาง (dilution effect)** แต่ในบางครั้งราคาหุ้นในตลาดอาจไม่สะท้อนมูลค่าใหม่ก็ได้

ตัวอย่าง 4.2.8 บริษัท A จ่ายปันผลเป็นหุ้นในอัตรา 15 หุ้นเดิมต่อ 1 หุ้นปันผล ถ้าเดิมหุ้นมีมูลค่าหุ้นละ 100 บาท จงหามูลค่าหุ้นหลังจากที่ได้รับปันผลเป็นหุ้นแล้ว

มูลค่าหุ้นหลังมีการเพิ่มทุน

เมื่อบริษัทต้องการเงินทุนเพิ่มเติมเพื่อมาลงทุน วิธีการหนึ่งคือการออก **หุ้นเพิ่มทุน (right stock)** มาขายผู้ถือหุ้นเดิมเพื่อระดมทุน

ตัวอย่าง 4.2.9 ให้สิทธิผู้ถือหุ้นเดิม 10 หุ้น ในการซื้อเพิ่มทุน 1 หุ้น ในราคาหุ้นละ 20 บาท เดิมบริษัทมีหุ้น 1000 ล้านหุ้น อยากรทราบบริษัทได้เงินจำนวนเท่าใดที่ได้จากหุ้นเพิ่มทุน

ดังนั้น

$$\text{มูลค่าใหม่} = \text{มูลค่าเดิม} + \text{จำนวนเงินเพิ่มทุน}$$

ถ้าอัตราการเพิ่มทุนคือ n หุ้นเดิม ต่อหุ้นเพิ่มทุน m หุ้น โดยราคาเพิ่มทุนหุ้นละ P_1 บาท ถ้าเดิมมีมูลค่าหุ้นละ P_2 บาท ดังนั้นมูลค่าหลังเพิ่มทุนคือ P ที่สอดคล้องสมการ

$$P = \frac{nP_2 + mP_1}{n + m}$$

ตัวอย่าง 4.2.10 บริษัท ก ประกาศเพิ่มทุน 2 หุ้นเดิมต่อ 3 หุ้นใหม่ โดยหุ้นเพิ่มทุนมีราคาหุ้นละ 5 บาท ถ้าปัจจุบันราคาหุ้นละ 10 บาท จงหาราคาหุ้นหลังเพิ่มทุน

ข้อดีของการลงทุนในหุ้น

1. เริ่มต้นด้วยเงินไม่มาก เมื่อเทียบกับการทำกิจการเอง
2. สภาพคล่องสูงกว่าทำธุรกิจด้วยตัวเอง เพราะสามารถซื้อขายได้เกือบตลอดเวลา
3. ไม่ต้องบริหารธุรกิจด้วยตัวเอง
4. ได้ผลตอบแทนจากเงินปันผลและส่วนต่างของราคาซื้อขาย

ความเสี่ยงของการลงทุนในหุ้น

1. ความไม่แน่นอนของเงินปันผลและราคา ขึ้นอยู่กับผลประกอบการ ภาวะอุตสาหกรรมและเกี่ยวข้องกับภาวะเศรษฐกิจ
2. ความเสี่ยงทางการเงิน ถ้าบริษัทมีการก่อหนี้จำนวนมากและกิจการไม่สามารถทำกำไรได้ตามเป้าหมาย บริษัทอาจเสี่ยงต่อการล้มละลาย หรือถูกฟ้องดำเนินคดีได้
3. ความเสี่ยงจากการขาดสภาพคล่อง ผู้ถือหุ้นอาจไม่สามารถเปลี่ยนมือได้ในเวลารวดเร็วตามต้องการ

การประเมินราคาอสังหาริมทรัพย์

การประเมินราคาอสังหาริมทรัพย์โดยใช้แบบส่วนลดกระแสเงินสด

มูลค่าอสังหาริมทรัพย์ (V_0) = ผลรวมมูลค่าปัจจุบันของกระแสเงินสดในอนาคต

ตัวอย่าง 4.2.11 นาย ก วางแผนสร้างโรงงานให้เช่าโดยคิดค่าเช่าเดือนละ 100,000 บาท จ่ายค่าเช่าทุกเดือน เมื่อครบ 20 ปี นาย ก จะขายโรงงานในราคา 20,000,000 บาท จงหางบประมาณในการก่อสร้างโรงงานแห่งนี้เพื่อให้ได้ผลตอบแทน 12% ต่อปี

ตัวอย่าง 4.2.12 นาย ข ลงทุนซื้อบ้านราคา 5 ล้านบาท เพื่อให้เช่าซึ่งรายรับหลังหักค่าใช้จ่ายเดือนละ 30,000 บาทตลอดไปโดยเก็บค่าเช่าทุกเดือน จงหาอัตราผลตอบแทนของการลงทุนของ นาย ข

ตัวอย่าง 4.2.13 แพทต้องการลงทุนซื้อบ้านหลังหนึ่ง ที่มีสมมติฐานดังนี้

- (ก) ได้รับค่าเช่าปีละ 120,000 บาท โดยจ่ายค่าเช่าทุกต้นปีและสามารถขึ้นค่าเช่าได้ 25% ทุก 5 ปี
- (ข) เมื่อสิ้นปีที่ 10 ต้องเสียค่าซ่อมบำรุง 500,000 บาท
- (ค) เมื่อสิ้นปีที่ 20 จะสามารถขายบ้านหลังนี้ในราคา 6,000,000 บาท

จงหาราคาบ้านที่แพทจะซื้อ โดยจะได้ผลตอบแทน 6% ต่อปี

แบบฝึกหัด 4.2

1. หุ้นปันผลปีละ 2 บาท ถ้านักลงทุนต้องการผลตอบแทนที่ 10% ต่อปีควรซื้อหุ้นในราคาเท่าใด
2. จากข้อ 1 ถ้าเงินปันผลเพิ่มขึ้นปีละ 5% ทุกปี อัตราผลตอบแทนใหม่จะเป็นเท่าใด
3. หุ้น ก ปันผลปีละ 1 บาทและเพิ่มขึ้น 5% ทุกปี ถ้านักลงทุนซื้อหุ้น ก มาในราคาหุ้นละ 10 บาท จะได้ผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์ต่อปี
4. หุ้น ข ปันผลปีละ 1 บาทและเพิ่มขึ้น 10% ทุกปี ถ้าต้องการผลตอบแทน 20% ต่อปี ควรซื้อหุ้น ข ที่ราคาหุ้นละเท่าใด
5. หุ้นตัวหนึ่งปันผล 4 บาททุกสิ้นปีเป็นเวลา 5 ปีติดต่อกันหลังจากนั้นเกิดการขาดทุนในปีที่ 6 ไม่มีปันผล หลังจากนั้นฟื้นฟูกิจการแล้วกลับมาจ่ายปันผลในปีที่ 7 โดยปันผล 1 บาท และเพิ่มขึ้นปีละ 10% จงหาราคาหุ้นนี้ ถ้านักลงทุนต้องการผลตอบแทน 12% ต่อปี
6. บริษัทจ่ายปันผลเป็นหุ้นในอัตรา 5 หุ้นเดิมต่อ 3 หุ้น ถ้าเดิมหุ้นมีราคา 24 บาทต่อหุ้น จงหาราคาหุ้นใหม่หลังจากมีการจ่ายปันผล
7. บริษัทประกาศเพิ่มทุนในอัตรา 3 หุ้นเดิมต่อ 1 หุ้นใหม่ โดยเพิ่มทุนราคา 25 บาทต่อหุ้น ถ้าปัจจุบันมีราคาหุ้นละ 10 บาท จงหาราคาหุ้นหลังเพิ่มทุน
8. นาย ก ซื้อบ้านราคา 1 ล้านบาท โดยให้เช่าเดือนละ 10,000 บาท ตลอดไป จงหาอัตราผลตอบแทนของการลงทุน โดยผู้เช่าจ่ายค่าเช่าทุกสิ้นเดือน
9. จากข้อ 8 ถ้านาย ก ต้องการได้ผลตอบแทน 6% ต่อปี (จ่ายผลตอบแทนทุกเดือน) ต้องให้เช่าบ้านเดือนละเท่าใด
10. รรรรซื้อคอนโดมิเนียมระยะเวลา 30 ปีในราคา 4.8 ล้านบาท และได้นำมาให้เช่าปีละ 240,000 บาท (จ่ายค่าเช่าตามหลัง) โดยขึ้นค่าเช่า 10% ทุกปี จงหาอัตราผลตอบแทนที่ รรรรจะได้รับในการลงทุนนี้
11. จากข้อ 10 ถ้าวรรรขายสิทธิที่เหลือในการเช่าไปเมื่อสิ้นปีที่ 20 ในราคา 2 ล้านบาท จงหาอัตราผลตอบแทนของรรร

4.3 กองทุนรวม

การลงทุนในตราสารทุนทางการเงินด้วยตัวเองอาจทำให้เราประสบปัญหาต่าง ๆ เช่น ไม่มีเวลา ไม่มีประสบการณ์ และเงินลงทุนไม่พอ เป็นต้น วิธีการลงทุนอีกแบบหนึ่งคือ การลงทุนผ่าน **กองทุนรวม (mutual fund)** คือการนำเงินของผู้ลงทุนรายย่อยทั้งหลายมารวมกันให้เป็นก้อนใหญ่แล้วนำไปจดทะเบียนในฐานะเป็นนิติบุคคล จากนั้นก็นำเงินที่ระดมได้ไปลงทุนในหลักทรัพย์หรือสินทรัพย์ประเภทต่าง ๆ ตามนโยบายที่ได้ระบุไว้ในหนังสือชี้ชวนที่เสนอขายแก่ผู้ลงทุน โดยผู้ลงทุนแต่ละรายจะได้รับ **หน่วยลงทุน (unit trust)** เพื่อเป็นหลักฐานยืนยันความเป็นเจ้าของโดยมีบริษัทหลักทรัพย์จัดการ (บลจ.) เป็นผู้จัดตั้งและทำหน้าที่บริการกองทุนได้ผลตอบแทนที่ออกเงย แล้วนำมาเฉลี่ยคืนให้กับนักลงทุนแต่ละรายตามสัดส่วนลงทุน

ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุนรวม จะได้รับผลตอบแทนจาก

- ส่วนแบ่งกำไรในรูปเงินปันผล ซึ่งเป็นไปตามหนังสือชี้ชวน
- ส่วนต่างของราคาหน่วยลงทุน เมื่อเราต้องการขายคืน

ประเภทกองทุนรวม แบ่งตามลักษณะทรัพย์สินที่ลงทุน

- **กองทุนรวมตราสารแห่งหนี้ (fixed income fund)** คือกองทุนที่เน้นการลงทุนในตราสารหนี้ เช่น เงินฝาก พันธบัตรหรือหุ้นกู้ เน้นความเสี่ยงต่ำและมีรายได้ประจำจากดอกเบี้ย
- **กองทุนรวมตราสารแห่งทุน (equity fund)** คือกองทุนที่เน้นการลงทุนในหุ้นไม่ต่ำกว่า 65% มีความเสี่ยงสูง แต่ผลตอบแทนสูงด้วย
- **กองทุนที่ลงทุนในต่างประเทศ (foreign investment fund)** คือกองทุนที่นำเงินไปลงทุนในต่างประเทศ
- **กองทุนรวมอีทีเอฟ (exchange trade fund)** คือกองทุนที่ลงทุนในสินทรัพย์ต่าง ๆ เพื่อให้ได้ผลใกล้เคียงกับดัชนีหรือผลตอบแทนของสินทรัพย์ที่กองทุนอ้างอิง สินทรัพย์ทุนที่ใช้อ้างอิง เช่น ทองคำ น้ำมัน ดัชนีหุ้น อัตราการแลกเปลี่ยน
- **กองทุนผสม (mixed fund)** คือกองทุนรวมที่ลงทุนผสมระหว่างหุ้นกับตราสารหนี้ โดยอาจกำหนดสัดส่วนที่แน่นอน หรือไม่กำหนดสัดส่วนก็ได้ โดยเป็นไปตามหนังสือชี้ชวน

ถ้าแบ่งกองทุนตามการบริการจะได้ 2 แบบคือ

- **กองทุนเชิงรุก (active fund)** คือกองทุนที่บริหารแบบเชิงรุกใช้ความสามารถของผู้จัดการกองทุนเป็นหลัก ต้องการผลตอบแทนสูงกว่า **เกณฑ์มาตรฐาน (benchmark)**
- **กองทุนเชิงรับ ([passive] fund)** คือกองทุนที่บริหารที่อิงตามระดับใกล้เคียงเกณฑ์มาตรฐาน

ระดับความเสี่ยงของการลงทุนในกองทุนรวม

กองทุนรวมทั่วไปถูกจัดอันดับไว้ 8 ระดับดังนี้

ระดับที่ 1 กองทุนรวมตลาดเงินที่ลงทุนเฉพาะในประเทศ

มีนโยบายลงทุนเฉพาะในประเทศไทย โดยลงทุนในหรือมีไว้ซึ่งเงินฝาก หรือตราสารหนี้ หรือ หลักทรัพย์ หรือทรัพย์สินอื่น หรือการขาดกผลอื่นตามที่สำนักงานกำหนด ซึ่งมีกำหนดชำระคืนเมื่อทวงถามหรือจะครบกำหนดชำระคืน หรือมีอายุสัญญาไม่เกิน 1 ปีนับแต่วันที่ลงทุนใน ทรัพย์สินหรือเข้าทำสัญญานั้น และมี portfolio duration ในขณะใดขณะหนึ่ง ไม่เกิน 3 เดือน

ระดับที่ 2 กองทุนรวมตลาดเงิน

มีนโยบายลงทุนในต่างประเทศบางส่วน แต่ไม่เกินร้อยละ 50 โดยลงทุนในหรือมีไว้ซึ่งเงิน ฝาก หรือตราสารหนี้ หรือหลักทรัพย์ หรือทรัพย์สินอื่นหรือการขาดกผลอื่นตามที่สำนักงาน กำหนด ซึ่งมีกำหนดชำระคืนเมื่อทวงถามหรือจะครบกำหนดชำระคืนหรือมีอายุสัญญาไม่ เกิน 1 ปีนับแต่วันที่ลงทุนในทรัพย์สินหรือเข้าทำสัญญานั้น รวมทั้งมี portfolio duration ใน ขณะใดขณะหนึ่ง ไม่เกิน 3 เดือน

ระดับที่ 3 กองทุนรวมพันธบัตรรัฐบาล

มีนโยบายเน้นลงทุนในพันธบัตรรัฐบาลเฉลี่ยรอบปีบัญชีไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

ระดับที่ 4 กองทุนรวมตราสารหนี้

มีนโยบายลงทุนในตราสารหนี้ทั่วไป

ระดับที่ 5 กองทุนรวมผสม

มีนโยบายลงทุนได้ทั้งในตราสารทุนและตราสารหนี้

ระดับที่ 6 กองทุนรวมตราสารทุน

มีนโยบายลงทุนในตราสารทุนเป็นหลักโดยเฉลี่ยรอบปีบัญชีไม่น้อยกว่าร้อยละ 65

ระดับที่ 7 กองทุนรวมหมวดอุตสาหกรรม

มีนโยบายมุ่งลงทุนโดยเฉพาะเจาะจงในตราสารทุนเพียงบางหมวดอุตสาหกรรม โดยเฉลี่ย รอบระยะเวลาบัญชีไม่น้อยกว่าร้อยละ 80

ระดับที่ 8 กองทุนที่มีการลงทุนในทรัพย์สินทางเลือก

มีนโยบายลงทุนในทรัพย์สินที่เป็นทางเลือกใหม่ในการลงทุนหรือมีโครงสร้างซับซ้อน เข้าใจ ยาก เช่น commodity/gold fund /oil fund/derivatives ที่ไม่ใช่เพื่อ hedging ซึ่งรวมถึง ตราสาร ที่มีลักษณะของสัญญาซื้อขายล่วงหน้าแฝงที่ไม่คุ้มครองเงินต้น

ข้อดีของการลงทุนในกองทุนรวม

1. ใช้สำหรับกระจายความเสี่ยงในการลงทุน คือ การลงทุนต้องมีการกระจายความเสี่ยงเพราะทิศทางของเศรษฐกิจในแต่ละด้านไม่ได้วิ่งไปทางเดียวกันเสมอไป ตัวอย่างเช่น หากเรามีเงินสดอยู่ 10000 บาท เราไม่สามารถเลือกซื้อหุ้นได้ในทุกประเภท สมมติว่าเราเลือกลงทุนในหุ้นโรงพยาบาล 5000 บาท และหุ้นเทคโนโลยี 5000 บาท แต่ในปีนั้นๆ เป็นปีที่ธุรกิจด้านโรงพยาบาลและด้านเทคโนโลยีถดถอย แต่ ธุรกิจด้านพลังงานและอาหารเจริญเติบโตอย่างต่อเนื่อง ผลก็คือทำให้พอร์ตการลงทุนของผู้ลงทุนเสียหายและเสียโอกาสในการทำกำไรในธุรกิจอื่นๆ ดังนั้นกองทุนรวมจึงมีหน้าที่จัดการกระจายการลงทุนไปยังกลุ่มธุรกิจต่างๆอย่างเหมาะสม
2. ไม่ต้องศึกษาข้อมูลการลงทุนด้วยตัวเอง คือ ผู้ที่ต้องการลงทุนไม่จำเป็นต้องศึกษาข้อมูลการลงทุนในสินทรัพย์นั้นๆโดยละเอียดเพราะจะมีนักวิเคราะห์และผู้จัดการกองทุน คอยจัดการลงทุนให้ซึ่งมีความชำนาญในด้านการลงทุนอยู่แล้ว หากผู้ลงทุนต้องการที่จะลงทุนด้วยตัวเองโดยไม่ผ่านกองทุน ผู้ลงทุนจะต้องศึกษาข้อมูลจำนวนมาก เช่น หากนักลงทุนต้องการลงทุนในตลาดหุ้น ผู้ลงทุนจะต้องศึกษาการอ่านงบการเงิน ศึกษาภาวะเศรษฐกิจ ซึ่งหากไม่มีความชำนาญก็จะเกิดความผิดพลาดในการวิเคราะห์และนำมาซึ่งการขาดทุน เป็นต้น
3. ไม่ต้องมีเงินมากก็สามารถลงทุนได้ สมมติว่าผู้ลงทุนมีความสนใจที่จะลงทุนในธุรกิจอสังหาริมทรัพย์ เพราะคิดว่าในอนาคตราคาของที่ดินต้องเพิ่มขึ้นอย่างแน่นอน แต่การที่จะซื้อที่ดินมาเก็บไว้ขายในอนาคตต้องใช้ทุนเยอะมาก ทำให้ไม่สามารถซื้อได้แต่ก็จะมีกองทุนรวมที่เน้นการลงทุนในอสังหาริมทรัพย์ ให้ผู้ลงทุนได้เลือกลงทุนโดยซื้อหน่วยลงทุนตามกำลังทรัพย์ของผู้ลงทุนเอง และจะได้ผลตอบแทนตามหน่วยลงทุนที่ผู้ลงทุนถือ
4. กองทุนรวมบางประเภทสามารถนำไปลดหย่อนภาษีได้
5. เป็นที่สำหรับฝากเงินที่มีอัตราผลตอบแทนสามารถชนะเงินเฟ้อได้

ข้อเสียของกองทุนรวม คือ กองทุนรวมไม่มีข้อมูลการลงทุนให้เราติดตามตลาดเวลาเหมือนกันลงทุนในหุ้น กองทุนรวมจะสรุปข้อมูลการลงทุนให้ทุกสามเดือนรู้ทุกสิ้นปีทำให้ผู้ลงทุนไม่สามารถติดตามผลการดำเนินงานของกองทุนได้อย่างรวดเร็ว

แบบฝึกหัด 4.3

1. ถ้าท่านมีเงินออม ท่านจะแบ่งมาลงทุนในกองทุนรวมหรือไม่เพราะเหตุใด
2. ถ้าท่านต้องการลงทุนในกองทุนรวม ท่านจะเลือกลงทุนในกองทุนประเภทใดเพราะเหตุใด
3. ท่านคิดว่าการจัดอันดับกองทุนของบริษัทจัดอันดับ มีผลต่อการตัดสินใจเลือกกองทุนของท่านหรือไม่ เพราะเหตุใด
4. ท่านเห็นด้วยหรือไม่ที่กองทุนเชิงรุกมีค่าธรรมเนียมมากกว่ากองทุนเชิงรับ

4.4 การลงทุนแบบถัวเฉลี่ย

สิ่งที่นักลงทุนต้องการคือ ผลตอบแทนสูงแต่ความเสี่ยงต่ำซึ่งมักจะไม่เกิดขึ้นพร้อมกัน เพราะสินทรัพย์ ความเสี่ยงต่ำผลตอบแทนจะต่ำ สินทรัพย์ที่ความเสี่ยงสูงผลตอบแทนก็สูงตามได้ด้วยคำที่ว่า high risk high return โดยหลักการลงทุนจึงต้องกระจายความเสี่ยงการลงทุนไปยังสินทรัพย์หลาย ๆ อย่างเพื่อให้ได้ผลตอบแทนไม่ต่ำมาก แต่ก็ไม่สูงเกินสุดเช่นกัน

นอกจากการกระจายสินทรัพย์การลงทุนแล้ว จังหวะการลงทุนยังเป็นสิ่งที่จำเป็นถ้าเราลงทุน ในช่วงสินทรัพย์ที่ราคาไม่แพงโอกาสที่เราจะได้ผลตอบแทนสูงก็มีโอกาสมากขึ้น แต่ในทางปฏิบัติ ทำได้ยาก วิธีหนึ่งที่นิยมกันมากในการลงทุนคือ การลงทุนแบบถัวเฉลี่ย (dollar-cost averaging investment) คือการลงทุนในสินทรัพย์ด้วยจำนวนเงินคงที่ในแต่ละงวดอย่างสม่ำเสมอ การลงทุนแบบนี้ทำให้ต้นทุนเฉลี่ยระยะยาวไม่สูง เหมาะสำหรับการลงทุนในสินทรัพย์ที่มีราคาผันผวน

ตัวอย่าง 4.4.1 นายแควอทซื้อหุ้น PTT ในปี 2563 ดังต่อไปนี้

(ข้อจำกัดเรื่องการซื้อจำนวนหุ้นต้องเป็นจำนวนเต็ม)

เดือน	ราคาต่อหุ้น	จำนวนเงินลงทุน	จำนวนหุ้นที่ได้
มกราคม	40	10,000	250
กุมภาพันธ์	32	10,016	312
มีนาคม	25	10,000	400
เมษายน	30	10,020	334
พฤษภาคม	35	10,010	286
มิถุนายน	36	10,008	278
กรกฎาคม	37	9,990	270
สิงหาคม	36	10,008	278

จงหาราคาต่อหุ้นโดยเฉลี่ย ณ เดือนสิงหาคม ถ้าราคาตลาดเดือนสิงหาคมคือ 36 บาท นายแควอท ได้กำไรหรือขาดทุนกี่เปอร์เซ็นต์

ตัวอย่าง 4.4.2 นาย ก ลงทุนในกองทุนรวมแบบถัวเฉลี่ยทุกวันที่ 1 ของทุกเดือน เดือนละ 5,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยราคาต่อหน่วยลงทุนกองทุนรวมดังนี้

วันที่	ราคาต่อหุ้น
1 มกราคม	20
1 กุมภาพันธ์	25
1 มีนาคม	50
1 เมษายน	40
1 พฤษภาคม	40
1 มิถุนายน	50

ถ้าวันที่ 1 กรกฎาคม นาย ก ขายหุ้นทั้งหมดในราคาหุ้นละ 55 บาท จงหาอัตราผลตอบแทนของการลงทุนของนาย ก

ตัวอย่าง 4.4.3 นาย ข ลงทุนในทองคำแบบถัวเฉลี่ยทุกวันที่ 1 ของทุกเดือน เดือนละ 50,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยราคาทองคำต่อบาทเป็นดังนี้

วันที่	ราคาทองคำ (ต่อบาท)
1 มกราคม	20,000
1 กุมภาพันธ์	20,500
1 มีนาคม	21,000
1 เมษายน	23,000
1 พฤษภาคม	25,000
1 มิถุนายน	27,000

ถ้าวันที่ 1 กรกฎาคม นาย ข ขายทองคำในราคา 26,000 บาทต่อบาททองคำ จงหาอัตราผลตอบแทนของการลงทุนของนาย ข

แบบฝึกหัด 4.4

จากตารางต่อไปนี้ใช้ตอบคำถามข้อ 1-4

วันที่	ราคาต่อหุ้น	ราคาทองคำ (ต่อบาท)
1 มกราคม 2520	40	4,000
1 มกราคม 2521	30	4,500
1 มกราคม 2522	20	3,000
1 มกราคม 2523	10	7,000
1 มกราคม 2524	20	10,000
1 มกราคม 2525	40	15,000
1 มกราคม 2526	80	12,000
1 มกราคม 2527	100	20,000

1. ถ้า นาย ก ลงทุนซื้อหุ้น 700,000 บาท ในวันที่ 1 มกราคม 2520 และขายในวันที่ 1 มกราคม 2527 จะได้รับผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์ต่อปี
2. ถ้า นาย ก ลงทุนซื้อทองคำ 700,000 บาท ในวันที่ 1 มกราคม 2520 และขายในวันที่ 1 มกราคม 2527 จะได้รับผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์ต่อปี
3. ถ้า นาย ก ลงทุนในหุ้นและทองคำอย่างละ 100,000 บาท เป็นเวลา 7 ปี ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2520 ถึง 1 มกราคม 2527 จงหาผลตอบแทนทบต้นของหุ้นและทองคำ
4. ถ้า นาย ก ลงทุนในหุ้นและทองคำอย่างละ 50,000 บาท เป็นเวลา 7 ปี ตั้งแต่วันที่ 1 มกราคม 2520 ถึง 1 มกราคม 2527 จะได้รับผลตอบแทนทบต้นกี่เปอร์เซ็นต์ต่อปี
5. นาย ก ลงทุนในกองทุนรวมแบบถัวเฉลี่ยทุกวันที่ 1 ของทุกเดือน เดือนละ 10,000 บาท เป็นเวลา 6 เดือน โดยราคาต่อหน่วยลงทุนกองทุนรวมดังนี้

วันที่	ราคาต่อหุ้น
1 มกราคม	10
1 กุมภาพันธ์	25
1 มีนาคม	40
1 เมษายน	50
1 พฤษภาคม	40
1 มิถุนายน	50

ถ้าวันที่ 1 กรกฎาคม นาย ก ขายหุ้นทั้งหมดในราคาหุ้นละ 45 บาท จงหาอัตราผลตอบแทนของการลงทุนของนาย ก

บทที่ 5

ความน่าจะเป็นเพื่อการลงทุน

5.1 ความน่าจะเป็น

ในการโยนเหรียญ 1 อัน ผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น (outcome) จาก การทดลอง (experiment) ดังกล่าว คือ หัวหรือก้อย ถ้าทำการทดลองเช่นนี้หลาย ๆ ครั้ง ผลลัพธ์ที่จดบันทึกจะเรียกว่าข้อมูลดิบ จะเห็นว่า การทดลองเช่นนี้ย่อมต้องรู้ขอบเขตของผลลัพธ์ที่เกิดขึ้นเสมอ เราจะเรียกว่าปริภูมิตัวอย่าง

บทนิยาม 5.1.1 เซตที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่งเรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่าง (sample space)** เขียนแทนด้วย S และสมาชิกที่อยู่ใน S เรียกว่า **จุดตัวอย่าง (sample point)**

ตัวอย่าง 5.1.2 จงเขียนปริภูมิตัวอย่างต่อไปนี้

1. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก ที่มีแต้ม 1, 2, 3, 4, 5, 6

2. ในการโยนเหรียญ 2 อันพร้อมกัน

บทนิยาม 5.1.3 เหตุการณ์ (event) คือเซตย่อยของปริภูมิตัวอย่าง

ตัวอย่าง 5.1.4 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก ที่มีแต้ม 1, 2, 3, 4, 5, 6 จงแจกแจงสมาชิกของ

1. ปริภูมิตัวอย่าง
2. เหตุการณ์ที่ผลรวมของแต้มมากกว่า 10

ตัวอย่าง 5.1.5 ในการตรวจสอบผลประกอบการกองทุนต่าง ๆ ของบริษัทแห่งหนึ่ง ได้เลือก 3 กองทุน โดยวิธีสุ่ม (random) แล้วดูผลประกอบการว่ากำไรหรือขาดทุน จงแจกแจงสมาชิกของ

1. ปริภูมิตัวอย่าง
2. เหตุการณ์ที่พบกองทุนที่ขาดทุนมากกว่า 1 กองทุน
3. เหตุการณ์ไม่พบกองทุนที่มีผลประกอบการขาดทุน

บทนิยาม 5.1.6 เหตุการณ์ A และ B เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน (mutually exclusive event) ถ้า

$$A \cap B = \emptyset$$

กรณีทั่วไป เหตุการณ์ E_1, E_2, \dots, E_n เป็นเหตุการณ์ที่ไม่เกิดร่วมกัน ก็ต่อเมื่อ

$$E_i \cap E_j = \emptyset \quad \text{ทุก } i, j = 1, 2, \dots, n \text{ ซึ่ง } i \neq j$$

ในปริภูมิตัวอย่างเราจะกำหนดค่าของ **น้ำหนัก (weight)** ให้แก่จุดตัวอย่าง ซึ่งผลบวกเหล่านี้เท่ากับ 1 ถ้าเรามีเหตุผลที่จะเชื่อได้ว่าจุดตัวอย่างใดมีโอกาสเกิดขึ้นได้แน่นอน นั่นแสดงว่าจุดตัวอย่างที่ไม่มีโอกาสเกิดขึ้นเลยจะให้น้ำหนักเท่ากับ 0

บทนิยาม 5.1.7 ให้ S เป็นปริภูมิตัวอย่าง และ A เป็นเหตุการณ์ใด ๆ **ความน่าจะเป็น (probability)** ของเหตุการณ์ A คือผลบวกของน้ำหนักทุก ๆ จุดตัวอย่างในเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย $P(A)$

$$P(A) = \text{ผลรวมของน้ำหนักของทุกจุดตัวอย่างใน } A$$

จากบทนิยามทำให้ได้ว่า $P(\emptyset) = 0$, $P(S) = 1$ และ $0 \leq P(A) \leq 1$

ตัวอย่าง 5.1.8 โยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง (เพียงตรง) จงหาความน่าจะเป็นที่เหรียญจะขึ้นหัวอย่างน้อยหนึ่งครั้ง

ตัวอย่าง 5.1.9 ลูกเต๋าลูกหนึ่งถูกถ่วงน้ำหนักโดยทำให้แต้มคู่มีโอกาสขึ้นเป็น 2 เท่าของแต้มคี่ จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าคือแต้มคู่จะขึ้นแต่มนน้อยกว่า 4

ในกรณีที่นำหน้าทุกจุดตัวอย่างเท่ากัน และปริภูมิตัวอย่าง S เป็นเซตจำกัด ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เท่ากับ

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

ตัวอย่าง 5.1.12 นาย ก ต้องการจะลงทุนในกองทุนรวม 5 กองทุน ในจำนวนนี้มีผลประกอบการกำไร 3 กองทุน และผลประกอบการขาดทุน 2 กองทุน จงหาความน่าจะเป็นที่นาย ก ลงทุนในกองทุนรวมแล้วมีกำไรอย่างน้อย 2 กองทุน

ตัวอย่าง 5.1.13 สมมติหุ้นในกลุ่มสื่อสารในตลาดหลักทรัพย์มีทั้งหมด 20 บริษัท พบว่ามีเพียง 5 บริษัทเท่านั้นที่มีผลประกอบการกำไร นอกนั้นผลประกอบการขาดทุนทั้งหมด จงหาความน่าจะเป็นที่นักลงทุนคนหนึ่งเลือกบริษัทมา 3 แห่งอย่างสุ่ม แล้วมีผลประกอบการกำไรทั้ง 3 แห่ง

ทฤษฎีบท 5.1.14 ถ้า A และ B เป็นเหตุการณ์สองเหตุการณ์ จะได้ว่า

1. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ เมื่อ A และ B เป็นเหตุการณ์ไม่เกิดร่วมกัน
3. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $P(A) \leq P(B)$
4. $P(A) = 1 - P(A^c)$

ตัวอย่าง 5.1.15 สมมติว่าความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้น A จะขึ้นมีค่าเท่ากับ 0.7 ความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้น B จะขึ้นมีค่าเท่ากับ 0.4 และความน่าจะเป็นที่ราคาหุ้น A และ B จะขึ้นมีค่าทั้งคู่เท่ากับ 0.2 จงหา จงหาความน่าจะเป็นที่บริษัทแห่งนี้จะจ่ายปันผล

1. โอกาสที่ราคาหุ้น A จะไม่ขึ้น
2. โอกาสที่ราคาหุ้น A หรือ B จะขึ้น
3. โอกาสที่ราคาหุ้น A และ B ไม่ขึ้นทั้งคู่

แบบฝึกหัด 5.1

1. ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก และโยนเหรียญ 1 อัน จงหา
 - 1.1 ปริภูมิตัวอย่าง
 - 1.2 โอกาสที่จะขึ้นหัวและแต้มลูกเต๋าเป็นจำนวนคู่
2. ในการโยนเหรียญ 1 เหรียญ 2 ครั้ง ที่ถ่วงน้ำหนักการเกิดน้อยกว่าการเกิดหัว 45% จงหาความน่าจะเป็นที่หัวทั้งสองครั้ง
3. ถ้าในตลาดหลักทรัพย์มีหุ้นพลังงานอยู่ 10 บริษัท โดยมีบริษัทที่มีกำไรมากกว่า 10% อยู่ 7 บริษัท นาย ก สุ่มซื้อหุ้นบริษัทพลังงาน 3 บริษัท จงหาโอกาสที่
 - 3.1 นาย ก จะซื้อหุ้นพลังงานที่มีผลกำไรมากกว่า 10% จำนวน 1 บริษัท
 - 3.2 นาย ก จะซื้อหุ้นพลังงานที่มีผลกำไรมากกว่า 10% มากกว่า 1 บริษัท
4. ข้อมูลการลงทุนในทองคำเป็นดังนี้

ผลตอบแทน (x%)	โอกาส
$x < 0$	0.30
$0 \leq x < 5$	0.20
$5 \leq x < 10$	0.10
$10 \leq x < 20$	0.35
$x \geq 20$	0.05

จงหาโอกาสที่การลงทุนทองคำจะได้ผลตอบแทน

- 4.1 ไม่ต่ำกว่า 10%
 - 4.2 น้อยกว่า 5%
5. ถ้าโอกาสที่ราคาทองคำจะขึ้นมีค่าเท่ากับ 0.4 ในขณะที่โอกาสที่หุ้นจะขึ้นมีค่าเท่ากับ 0.8 โดยโอกาสที่ทั้งหุ้นและทองคำจะมีราคาสูงพร้อมกันคือ 0.3 จงหาโอกาส
 - 5.1 ราคาทองคำขึ้นแต่ราคาหุ้นตก
 - 5.2 หุ้นขึ้นแต่ทองคำราคาตก
 - 5.3 หุ้นและทองคำราคาตก
 6. จากข้อมูลปีที่ผ่านมา ตลาดหุ้นเปิดทำการ 200 วัน โดยมีวันที่หุ้นตก 50 วัน และหุ้นขึ้น 150 วัน ถ้าสุ่มเลือกวันที่ตลาดเปิดทำการในปีที่แล้วมา 1 วัน โอกาสที่จะเป็นวันที่หุ้นขึ้นเป็นเท่าใด

5.2 ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

การทดลองสุ่ม (random trial) หมายถึงการกระทำที่ไม่สามารถทราบผลลัพธ์ล่วงหน้าจนกว่าจะได้ทำเสร็จสิ้นไปแล้ว เช่นการโยนเหรียญเราทราบเพียงว่าเกิดขึ้น 2 แบบคือ หัว และก้อย แต่ก่อนโดยไม่สามารถทราบแน่ชัดว่าจะเกิดอะไร สมมติว่าโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง จะได้ปริภูมิตัวอย่างคือ

$$S = \{TT, TH, TH, HH\}$$

ถ้าเราสนใจจำนวนหัวที่เกิดขึ้นในการทดลองครั้งนี้ นั่นคือจำนวนหัวเท่ากับ 0, 1 หรือ 2 ซึ่งเป็นผลที่เป็นไปได้ทั้งหมดที่จะเกิดขึ้น ถ้าให้ X เป็นจำนวนหัวที่เกิดขึ้น เมื่อโยนเหรียญ 1 อัน 2 ครั้ง ค่าของที่เป็นไปได้คือ 0, 1, 2 และจะเรียก X ว่าตัวแปรสุ่ม

- X มีค่าเท่ากับ 0 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น TT
- X มีค่าเท่ากับ 1 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น TH หรือ HT
- X มีค่าเท่ากับ 2 ก็ต่อเมื่อ ผลการทดลองเป็น HH

บทนิยาม 5.2.1 ตัวแปรสุ่ม (random variable) คือฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดยแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง

เรามักนิยมใช้ตัวแปร X, Y, Z แทนตัวแปรสุ่ม และ x, y, z แทนค่าของตัวแปรสุ่ม

ตัวอย่าง 5.2.2 หยิบลูกบอลอย่างสุ่มที่ละลูก 2 ครั้ง โดยหยิบแล้วไม่ใส่คืน จากกล่องที่ลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีขาว 3 ลูก ให้ X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ จงแสดงว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม

จากตัวอย่าง 5.2.2 จะเรียกตัวแปรสุ่มลักษณะนี้ว่า **ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง** (discrete random variable) ซึ่งหมายถึงจำนวนค่าของตัวแปรสุ่มมีจำนวนจำกัดหรือนับได้

บทนิยาม 5.2.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ด้วยความน่าจะเป็น $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$ ตามลำดับ ถ้าเหตุการณ์ A เป็นเซตย่อยของ $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ จะได้ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ

$$P(A) = \sum_x f(x) \quad \text{ทุกค่า } x \text{ ของเหตุการณ์ } A$$

บทนิยาม 5.2.4 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องใด ๆ กำหนดให้

$$f(x) = P(X = x)$$

โดยที่ $f(x) \geq 0$ และ $\sum_x f(x) = 1$ ทุกค่า x ของ X

เรียก f ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** (probability function) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X กำหนดให้

$$P(X \leq b) = \sum_{x \leq b} P(X = x)$$

ทำนองเดียวกัน

$$P(a \leq X \leq b) = \sum_{a \leq x \leq b} P(X = x)$$

จะได้ว่า

$$P(X \geq a) = 1 - P(X < a)$$

ตัวอย่าง 5.2.5 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 5 ครั้ง ให้ X แทนจำนวนหัวที่เกิดขึ้น จงสร้างตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง 5.2.6 โยนเหรียญเที่ยงตรง 1 อัน 5 ครั้ง ให้ X แทนจำนวนหัวที่เกิดขึ้น จงหา

1. $P(X = 0)$

3. $P(1 \leq X < 3)$

2. $P(1 < X \leq 4)$

4. $P(X > 3)$

ตัวอย่าง 5.2.7 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ของกำไรจากการซื้อหุ้นของบริษัทแห่งหนึ่งที่มีข้อมูลดังนี้

ค่าของ X	ความน่าจะเป็น
-20%	0.1
-10%	0.2
10%	0.2
20%	0.4
30%	0.1

1. $P(X = 10\%)$

2. $P(X \leq 10\%)$

3. $P(X > 10\%)$

บทนิยาม 5.2.8 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง กำหนดให้

$$f(x, y) = P(X = x, Y = y)$$

โดยที่ $f(x, y) \geq 0$ และ $\sum_x \sum_y f(x, y) = 1$ ทุกค่า (x, y) ของ X

เรียก f ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็นร่วมกัน (joint probability function)** ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X และ Y ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A เขียนแทนด้วย $P[(x, y) \in A]$ นิยามโดย

$$P[(x, y) \in A] = \sum_{(x, y) \in A} P(X = x, Y = y)$$

ตัวอย่าง 5.2.9 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม ที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันดังตาราง (x คือแนวตั้ง และ y คือแนวนอน)

$f(x, y)$	2	4
1	0.10	0.15
3	0.20	0.30
5	0.10	0.15

จงหาค่าของ

1. $P(X = 1, Y = 4)$

4. $P(X > 1, Y > 1)$

2. $P(X = 3)$

5. $P(X < 3, Y > 2)$

3. $P(Y = 2)$

6. $P(X + Y = 5)$

แบบฝึกหัด 5.2

1. สมาร์ท TV จำนวน 6 เครื่อง มีเครื่องบกพร่อง 2 เครื่อง โรงแรมแห่งหนึ่งต้องการซื้อ 3 เครื่อง ถ้า X เป็นจำนวนเครื่องที่บกพร่องที่โรงแรมรับมา จงแจกแจงความน่าจะเป็นพร้อมแสดงเป็นตาราง และหา

1.1 $P(X = 1)$

1.2 $P(X > 1)$

1.3 $P(0 < X \leq 2)$

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ในการตอบคำถาม 2-4

นาย ก ซื้อหุ้น มาในราคาหุ้นละ 10 บาท จำนวน 1,000 หุ้น โอกาสที่หุ้นนี้จะมีราคา 12 บาท มีค่าเท่ากับ 0.4 โอกาสที่หุ้นจะมีราคา 9 บาท มีค่าเท่ากับ 0.3 และโอกาสที่หุ้นจะมีราคาเท่าเดิม มีค่าเท่ากับ 0.3

2. จงสร้างตัวแปรสุ่ม X ที่มีค่าเป็นราคาหุ้นของหุ้นนี้ พร้อมทั้งหา $P(X \leq 10)$
3. จงสร้างตัวแปรสุ่ม Y ที่มีค่าเป็นกำไรหุ้นของหุ้นนี้ พร้อมทั้งหา $P(Y = 2)$
4. จงสร้างตัวแปรสุ่ม Z ที่มีค่าเป็นกำไรจากการขายหุ้นทั้งหมดที่ซื้อมา พร้อมทั้งหา $P(Z \geq 500)$
5. ให้ตัวแปรสุ่ม X มีค่าเป็น x ด้วยความน่าจะเป็นต่อไปนี้

x	0	2	3
ความน่าจะเป็น	0.5	0.2	0.3

5.1 จงหา $P(X \leq 2.5)$

5.2 จงหา $P(X > 1.5)$

6. ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นผลตอบแทนในการลงทุนในกองทุน A และ B

กำไร	โอกาสของ X	โอกาสของ Y
-10%	0.1	0.3
10%	0.5	0.2
15%	0.4	0.5

6.1 จงหา $P(X \leq 10\%)$ และ $P(Y \geq 5\%)$

6.2 ถ้าท่านเลือกลงทุนเพียงกองทุนเดียว ท่านจะเลือกในกองทุน A หรือ B เพราะเหตุใด

7. จงหาค่าต่อไปนี้ เมื่อ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันดังตาราง

$f(x, y)$	-1	2	3
1	0.1	0.1	0.2
2	0.3	0.2	0.1

7.1 $P(X < 2, Y > 0)$

7.3 $P(Y > 1)$

7.5 $P(X^2 + Y^2 = 5)$

7.2 $P(X = 2)$

7.4 $P(X < 1.5)$

7.6 $P(XY < 0)$

5.3 ค่าคาดคะเน

บทนิยาม 5.3.1 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง **ค่าคาดคะเน (Expected value)** หรือ **ค่าคาดหวัง** หรือ **ค่าเฉลี่ย (Mean)** ของตัวแปรสุ่ม X เขียนแทนด้วย $E(X)$ นิยามโดย

$$E(X) = \sum_x xP(X = x)$$

ในกรณี $E(X) = 0$ หมายถึง **เกมยุติธรรม (fair game)** หรือไม่ได้เปรียบและไม่เสียเปรียบ ถ้าเป็นการลงทุนหมายถึงไม่กำไรและไม่ขาดทุน

ตัวอย่าง 5.3.2 ให้ตัวแปรสุ่ม X มีค่าเป็น x ด้วยความน่าจะเป็นต่อไปนี้

x	1	2	3
ความน่าจะเป็น	0.3	0.5	0.2

จงหาค่าคาดคะเนของ X

ตัวอย่าง 5.3.3 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก จะได้รับเงินเท่ากับจำนวนแต้มที่ขึ้น (หน่วยเป็นบาท) จงหาเงินที่คาดว่าจะได้รับ

ตัวอย่าง 5.3.4 พัชรี้ลงทุนกับบริษัท กข ปรากฏว่าใน 1 ปีข้างหน้ามีโอกาสที่เขาจะกำไร 20,000 บาท มีความน่าจะเป็น 0.6 และโอกาสที่จะขาดทุน 10,000 บาทมีความน่าจะเป็น 0.4 จงหาค่าเฉลี่ยของผลตอบแทนของการลงทุนของพัชรี้

ตัวอย่าง 5.3.5 ถ้าสลากชนิดหนึ่งแบ่งขายในราคา 5 บาทต่อฉบับเป็นจำนวน 8,000 ฉบับ และมีรางวัลเพียง 1 รางวัลเป็นเงิน 12,000 บาท นายแดงซื้อสลากมา 2 ฉบับ จงหาเงินที่คาดว่านายแดงจะได้รับ

ตัวอย่าง 5.3.6 ถ้านำรถยนต์ราคา 500,000 บาทไปทำประกันภัยในกรณีรพหายกับบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งซึ่งทุนประกัน 500,000 บาท ถ้าโอกาสที่รถจะถูกขโมยในปีที่ทำประกันเป็น 1% ทางบริษัทประกันภัยควรคิดเบี้ยประกันเท่าใด จึงจะได้กำไรเฉลี่ย 10,000 บาทต่อปี

ตัวอย่าง 5.3.7 บริษัทประกันชีวิตแห่งหนึ่งต้องการหาเบี้ยประกันชีวิตต่อปีที่จะเก็บลูกค้าที่มีทุนประกัน 100,000 บาท ของผู้เอาประกันชายที่มีอายุ 25 ปี ถ้าคุ้มครอง 1 ปี จากตารางชีพพบว่าชายอายุ 25 ปี จำนวน 10,000 คนจะตายก่อนครบอายุ 26 ปี จำนวน 3 คน จงหาเบี้ยประกันชีวิตต่อปีที่จะเก็บจากชายอายุ 25 ปี (โดยไม่พิจารณาค่าบริหารงานของบริษัท)

บทนิยาม 5.3.8 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง และ u เป็นฟังก์ชันของ X ค่าคาดคะเนของ $u(x)$ เขียนแทนด้วย $E[u(X)]$ นิยามโดย

$$E[u(X)] = \sum_x u(x)P(X = x)$$

ตัวอย่าง 5.3.9 ให้ X เป็นจำนวนหัวที่เกิดจากการโยนเหรียญที่เที่ยงตรง 2 อัน จงหา $E(X^2 + 1)$

บทนิยาม 5.3.10 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง ค่าคาดคะเนของฟังก์ชัน $u(X, Y)$ เขียนแทนด้วย $E[u(X, Y)]$ นิยามโดย

$$E[u(X, Y)] = \sum_x \sum_y u(x, y)P(X = x, Y = y)$$

ตัวอย่าง 5.3.11 การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y ดังตาราง

$f(x, y)$	0	1	2
0	0	0.3	0.1
1	0.1	0	0.2
2	0.1	0.2	0

จงหา $E(XY)$

ทฤษฎีบท 5.3.12 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม ถ้า a และ b เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

ทฤษฎีบท 5.3.13 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ u และ v เป็นฟังก์ชันของ X จะได้ว่า

$$E[u(X) \pm v(X)] = E[u(X)] \pm E[v(X)]$$

ตัวอย่าง 5.3.14 การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ดังตาราง

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

จงหา $E[(X - 1)^2]$ โดยใช้ทฤษฎีบท

ตัวอย่าง 5.3.15 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน A และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน B และพบว่า

$f(x, y)$	4%	10%	-5%
4%	0.1	0.2	0.1
5%	0.1	0.1	0.1
10%	0.2	0	0.1

1. จงหาผลตอบแทนของกองทุน A
2. จงหาผลตอบแทนของกองทุน B
3. จงหาผลตอบแทนรวมของกองทุน A และ B

ทฤษฎีบท 5.3.16 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ u และ v เป็นฟังก์ชันของ X และ Y จะได้ว่า

$$E[u(X, Y) \pm v(X, Y)] = E[u(X, Y)] \pm E[v(X, Y)]$$

ทฤษฎีบท 5.3.17 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

ตัวอย่าง 5.3.18 ข้อมูลผลตอบแทนของกองทุน A และ B ในภาวะเศรษฐกิจต่าง ๆ เป็นดังนี้

สภาพเศรษฐกิจ	โอกาส	ผลตอบแทนของกองทุน	ผลตอบแทนของกองทุน
ดีมาก	0.25	20%	5%
ปานกลาง	0.50	10%	10%
ถดถอย	0.25	5%	16%

จงหาผลตอบแทนรวมของกองทุน A และ B

บทนิยาม 5.3.19 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่ม **ความแปรปรวน (variance)** ของตัวแปรสุ่ม X เขียนแทนด้วย σ_X^2 หรือ $\text{var}(X)$ นิยามโดย

$$\text{var}(X) = E[(X - E(X))^2]$$

และเรียก $\sqrt{\text{var}(x)}$ ว่า **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation)** ของตัวแปรสุ่ม X

ตัวอย่าง 5.3.20 ให้ตัวแปรสุ่ม X มีค่าเป็น x ด้วยความน่าจะเป็นต่อไปนี้

x	1	2	3
ความน่าจะเป็น	0.3	0.5	0.2

จงหาความแปรปรวนของ X

ตัวอย่าง 5.3.21 ในการโยนลูกเต๋า 1 ลูก จะได้รับเงินเท่ากับจำนวนแต้มที่ขึ้น (หน่วยเป็นบาท)
จงหาความแปรปรวนของเงินที่จะได้รับ

ตัวอย่าง 5.3.22 การลงทุนกับบริษัท ก และบริษัท ข โดยมีข้อมูลดังนี้

	ผลตอบแทน (บาท) โอกาส			ผลตอบแทน (บาท) โอกาส	
บริษัท ก	20,000	0.6	บริษัท ข	20,000	0.7
	-10,000	0.4		-20,000	0.3

1. จงหาความแปรปรวนของผลตอบแทนแต่ละบริษัท
2. ท่านจะตัดสินใจลงทุนกับบริษัทใด เพราะเหตุใด

ตัวอย่าง 5.3.23 จากตัวอย่าง 5.3.22 ถ้ามีทางเลือกลงทุนอีกคือบริษัท ค โดยมีข้อมูลดังนี้

ผลตอบแทน (บาท)	โอกาส
10,000	0.8
-20,000	0.2

ท่านควรเลือกลงทุนในบริษัทใด เพราะเหตุใด

ตัวอย่าง 5.3.24 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน A และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน B และพบว่า

$f(x, y)$	4%	10%	-5%
4%	0.1	0.2	0.1
5%	0.1	0.1	0.1
10%	0.2	0	0.1

จงหาความแปรปรวนของผลตอบแทนรวมของกองทุน A และ B หรือ $\text{var}(X + Y)$

ทฤษฎีบท 5.3.25 ถ้า X เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า

1. $\text{var}(X) = E(X^2) - [E(x)]^2$

2. $\text{var}(X + b) = \text{var}(X)$

3. $\text{var}(aX) = a^2\text{var}(X)$

4. $\text{var}(aX + b) = a^2\text{var}(X)$

5. $\text{var}(b) = 0$

แบบฝึกหัด 5.3

1. เล่นเกมโยนเหรียญ 3 อันครั้งหนึ่ง ผู้เล่นจะได้รับเงิน 5 บาท จากเจ้ามือถ้าปรากฏว่าเหรียญขึ้นหัวทั้งหมดหรือขึ้นก้อยทั้งหมด ในกรณีอื่น ๆ เขาจะต้องจ่ายให้เจ้ามือ 3 บาท จงหาค่าคาดคะเนของเงินที่ได้รับ
2. ในการลงทุนของชายคนหนึ่งปรากฏว่าใน 1 ปีเขามีกำไร 60,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.3 หรือขาดทุน 20,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.7 จงหาค่าคาดคะเนของการลงทุนนี้
3. การเล่นเกมพนันเกมหนึ่ง ถ้าชายคนหนึ่งดึงไพ่ออกจากสำรับซึ่งมีไพ่ 52 ใบ เป็น J หรือ Q เขาจะได้รับเงิน 2 บาท และถ้าดึงไพ่ออกมาเป็น K หรือ A เขาจะได้รับเงิน 5 บาท แต่ถ้าดึงไพ่ใบอื่น ๆ เขาจะไม่ได้เงินจากเจ้ามือ อยากทราบว่าเขาควรจ่ายเงินค่าเกมนี้เท่าใดจึงจะทำให้เกมยุติธรรม
4. บริษัทผู้ผลิตสินค้าชนิดหนึ่งออกจำหน่าย คาดว่าจะได้กำไร 10,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.4 กำไร 30,000 บาท และขาดทุน 5,000 บาท ด้วยความน่าจะเป็น 0.3 เท่ากัน ผู้จัดการบริษัทคิดว่าถ้ากำไรเฉลี่ยมากกว่า 10,000 บาท จึงจะทำการผลิตผลิตสินค้าออกจำหน่าย เขาควรตัดสินใจอย่างไร
5. ถ้าบริษัทประกันภัยแห่งหนึ่งเก็บเบี้ยประกันต่อปีเป็นเงิน 29,000 บาท สำหรับผู้เอาประกันชีวิตที่มีเบี้ยประกันตลอดชีวิตที่มีทุนประกัน 1 ล้านบาท ถ้าตารางชีพแสดงโอกาสที่ผู้เอาประกันที่ทำประกันข้างต้นจะเสียชีวิตในปีหน้าเป็น 0.001 จงหากำไรที่คาดว่าจะได้เงินจากกรมธรรม์ดังกล่าว
6. ในการแข่งขันครั้งหนึ่ง นักขับรถแข่งจะประกันรถของเขาเป็นจำนวนเงิน 200,000 บาท บริษัทประกันประมาณว่า ความน่าจะเป็นที่จะจ่ายเงินทั้งหมดคือ 0.002 ความน่าจะเป็นที่จะจ่ายเงิน 50% คือ 0.010 และความน่าจะเป็นที่จะจ่ายเงินเพียง 25% คือ 0.100 หากไม่คิดค่าใช้จ่ายปลีกย่อยอื่น ๆ บริษัทประกันควรเก็บเบี้ยประกันจากผู้เอาประกันจำนวนเท่าไรจึงจะได้กำไร 2,000 บาท
7. การแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม X ดังตาราง

x	-3	0	6	9
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$

7.1 $E(X)$

7.3 $E[(2X - 1)^2]$

7.2 $E(X^2)$

7.4 $\text{var}(X)$

8. การแจกแจงความน่าจะเป็นร่วมกันของ X และ Y ดังตาราง

$f(x, y)$	1	2	3
-1	0.1	0.1	0.1
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.2	0

จงหา

8.1 $E(X)$ และ $E(Y)$

8.3 $E(XY)$

8.2 $E(X + Y)$ และ $E(X - Y)$

8.4 $\text{var}(X + Y)$

9. ในการลงทุนในหุ้นและพันธบัตรมีข้อมูลดังนี้

ผลตอบแทน (บาท) โอกาส		ผลตอบแทน (บาท) โอกาส			
หุ้น	5,000	0.3	พันธบัตร	10,000	0.8
	100,000	0.2		5,000	0.2
	-60,000	0.5			

9.1 จงหาผลตอบแทนเฉลี่ยของการลงทุนในหุ้นและการลงทุนในพันธบัตร

9.2 ความแปรปรวนของผลตอบแทนในการลงทุนในหุ้นและความแปรปรวนของผลตอบแทนในการลงทุนในพันธบัตร

9.3 เราควรลงทุนในหุ้นหรือพันธบัตรมากกว่ากัน เพราะเหตุใด

10. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในหุ้น และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในทองคำ และพบว่า

$f(x, y)$	-30	20
-10	0.2	0.3
10	0.4	0.1

จงหาผลตอบแทนเฉลี่ยของการลงทุนในหุ้นและการลงทุนในทองคำ และความแปรปรวนของ X และ Y

11. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในบริษัทขายน้ำมัน และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในบริษัทรับส่งสินค้า และพบว่า

$f(x, y)$	10	20
-5	0.2	0.3
5	0.1	0.4

จงหาผลตอบแทนเฉลี่ยของการลงทุนในบริษัทขายน้ำมันและบริษัทรับส่งสินค้า และความแปรปรวนของ X และ Y

12. ข้อมูลผลตอบแทนของกองทุน A และ B ในภาวะเศรษฐกิจต่าง ๆ เป็นดังนี้

สภาพเศรษฐกิจ	โอกาส	ผลตอบแทนของกองทุน A	ผลตอบแทนของกองทุน B
เติบโตสูงมาก	0.25	20%	8%
เติบโตปานกลาง	0.50	12%	-2%
เติบโตต่ำ	0.25	6%	14%

จงหาผลตอบแทนรวมของกองทุน A และ B ตามลำดับ

13. จากข้อ 12 ถ้าท่านลงทุนในกองทุน A 30% และ กองทุน B 70 จะได้ผลตอบแทนเฉลี่ยเท่าใด

5.4 ความแปรปรวนร่วม

บทนิยาม 5.4.1 ความแปรปรวนร่วม (covariance) ของตัวแปรสุ่ม X และ Y เขียนแทนด้วย σ_{XY} หรือ $\text{cov}(X, Y)$ นิยามโดย

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

จะเห็นว่า

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_x \sum_y (x - E(x))(y - E(Y))P(X = x, Y = y)$$

จงพิจารณาว่าค่า $\text{cov}(X, Y) > 0$ และ $\text{cov}(X, Y) < 0$ เมื่อ x และ y มีลักษณะเช่นใด

ตัวอย่าง 5.4.2 ตัวแปรสุ่ม X และ Y แสดงความน่าจะเป็นดังตาราง

$f(x, y)$	0	1	2
0	0	0.2	0.1
1	0.1	0.1	0.2
2	0.1	0.2	0

จงหาความแปรปรวนร่วมของ X และ Y

ตัวอย่าง 5.4.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นยอดจำหน่ายรถยนต์ (แสนคัน) และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นอัตราการชำรุดยนต์ (เปอร์เซ็นต์) ที่มีโอกาสขึ้นดังตาราง

$f(x, y)$	5	40
5	0.1	0.3
20	0.5	0.1

1. จงหาค่าเฉลี่ยของจำนวนรถยนต์ที่จำหน่ายได้
2. จงหาค่าเฉลี่ยของอัตราการชำรุด
3. จงหา $\text{cov}(X, Y)$ และความสัมพันธ์ของยอดขายกับอัตราการชำรุด

ตัวอย่าง 5.4.4 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นยอดจำหน่ายรถยนต์ (แสนคัน) และ Z เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นยอดผลิตสีฟันทรงยนต์ (ล้านแกลลอน) ที่มีโอกาสขึ้นดังตาราง

$f(x, z)$	1	8
5	0.4	0.1
20	0.2	0.3

ยอดจำหน่ายรถยนต์และยอดผลิตสีฟันทรงยนต์สัมพันธ์กันอย่างไร

ทฤษฎีบท 5.4.5 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า

1. $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
2. $\text{cov}(aX, bY) = abcov(X, Y)$
3. $\text{cov}(X, X) = \text{var}(X)$
4. $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$
5. $\text{cov}(X, Y) = 0$ ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน

ทฤษฎีบท 5.4.6 ถ้า X_1, X_2, Y เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ a และ b จะได้ว่า

$$\text{cov}(aX_1 + bX_2, Y) = a\text{cov}(X_1, Y) + b\text{cov}(X_2, Y)$$

ทฤษฎีบท 5.4.7 ถ้า X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม โดยที่ a และ b เป็นค่าคงตัวจะได้ว่า

$$\text{var}(aX + bY) = a^2\text{var}(X) + b^2\text{var}(Y) + 2abcov(X, Y)$$

ในกรณี X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า

$$\text{var}(aX + bY) = a^2\text{var}(X) + b^2\text{var}(Y)$$

ในกรณีทั่วไปเราจะพิสูจน์ได้ว่า

$$\text{var}(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{cov}(X_i, X_j)$$

บทนิยาม 5.4.8 กำหนดให้ X_1, X_2, \dots, X_n เป็นตัวแปรสุ่ม จะเรียกเมทริกซ์

$$C = [\sigma_{ij}], i, j = 1, 2, \dots, n \text{ เมื่อ } \sigma_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j)$$

ว่า **เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covarian matrix)**

ในกรณี X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม จะได้

ตัวอย่าง 5.4.9 ตัวแปรสุ่ม X และ Y แสดงความน่าจะเป็นดังตาราง

$f(x, y)$	0	1	2	3
1	0.10	0.10	0.10	0.01
2	0.20	0.09	0.20	0.20

จงหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

นอกจากความแปรปรวนร่วมที่วัดความสัมพันธ์ของตัวแปรสุ่ม X และ Y เรายังมีอีกตัวที่วัดคือสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ซึ่งจะนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 5.4.10 ให้ X และ Y เป็นตัวแปรสุ่ม จะเรียกว่า

$$\rho_{XY} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}$$

ว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ (correlation coefficient) ของ X และ Y

หมายเหตุ สูตรในการคำนวณสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์มีหลายสูตร แต่จากบทนิยามนี้เรียกว่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์เพียสัน (Pearson's correlation coefficient)

ข้อสังเกต

1. $|\rho_{XY}| \leq 1$

2. ถ้า X และ Y เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่า $\rho_{XY} = 0$ หรือกล่าวได้ว่า X และ Y ไม่สัมพันธ์กัน

3. ถ้า $\rho_{XY} > 0$ หรือกล่าวได้ว่า X และ Y สัมพันธ์ทางเดียวกัน โดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่ $\rho_{XY} = 1$ เราจะกล่าวว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงบวกอย่างสมบูรณ์ (perfectly positive correlated)

4. ถ้า $\rho_{XY} < 0$ หรือกล่าวได้ว่า X และ Y สัมพันธ์ทางตรงกันข้าม โดยเฉพาะอย่างยิ่งกรณีที่ $\rho_{XY} = -1$ เราจะกล่าวว่า X และ Y มีความสัมพันธ์เชิงลบอย่างสมบูรณ์ (perfectly negative correlated)

ตัวอย่าง 5.4.11 ถ้าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของตัวแปรสุ่ม X และ Y คือ

$$C = \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 10 & 40 \end{bmatrix}$$

จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X และ Y

ตัวอย่าง 5.4.12 ตัวแปรสุ่ม X และ Y แสดงความน่าจะเป็นดังตาราง

$f(x, y)$	1	2	3	4
2	0.15	0.10	0.10	0.05
4	0.20	0.20	0.05	0.15

จงหาสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X และ Y

แบบฝึกหัด 5.4

1. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนของหุ้น และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ของผลตอบแทนของทองคำ ที่มีโอกาสขึ้นดังตาราง

$f(x, y)$	-30	20
-10	0.2	0.3
10	0.4	0.1

1.1 จงหา $\text{cov}(X, Y)$ และ σ_{XY}

1.2 จงหา $\text{var}(X + Y)$

1.3 ผลตอบแทนในการลงทุนในหุ้นและทองคำเป็นไปได้ทิศทางเดียวกันหรือไม่

2. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนของบริษัทขายน้ำมัน และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นเปอร์เซ็นต์ของผลตอบแทนของบริษัทรับส่งสินค้า ที่มีโอกาสขึ้นดังตาราง

$f(x, y)$	10	20
-5	0.3	0.2
5	0.4	0.1

จงหา $\text{cov}(X, Y)$ และ σ_{XY}

3. ตัวแปรสุ่ม X และ Y แสดงความน่าจะเป็นดังตาราง

$f(x, y)$	1	2	3
-1	0.10	0	0
0	0	0.10	0.20
1	0.10	0.20	0.30

3.1 จงหา $\text{var}(X + Y)$

3.2 จงหาเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ X และ Y

3.3 ตัวแปรสุ่ม X และ Y สัมพันธ์กันอย่างไร

4. ตัวแปรสุ่ม X , Y และ Z แสดงความน่าจะเป็นดังตาราง

$$\begin{aligned}
 P(X = 1, Y = 2, Z = 0) &= 0.1 & P(X = 1, Y = 2, Z = 1) &= 0.2 \\
 P(X = 1, Y = 1, Z = 0) &= 0.1 & P(X = 1, Y = 1, Z = 1) &= 0.1 \\
 P(X = 0, Y = 2, Z = 0) &= 0.2 & P(X = 0, Y = 2, Z = 1) &= 0.1 \\
 P(X = 0, Y = 1, Z = 0) &= 0.1 & P(X = 0, Y = 1, Z = 1) &= 0.1
 \end{aligned}$$

4.1 จงหา $\text{cov}(X, Y)$, $\text{cov}(X, Z)$ และ $\text{cov}(Y, Z)$

4.2 จงหา ρ_{XY} , ρ_{XZ} และ ρ_{YZ}

4.3 จงหา $\text{cov}(X + Y + Z)$

4.4 จงหาความแปรปรวนร่วมของ X , Y และ Z

บทที่ 6

การจัดพอร์ตการลงทุนเบื้องต้น

6.1 ผลตอบแทนและความเสี่ยงของการลงทุน

บทนิยาม 6.1.1 สินทรัพย์ (Asset)

สินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง (risk-free asset) คือสินทรัพย์ที่มีผลตอบแทนแน่นอน

สินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (risk asset) คือสินทรัพย์ที่มีผลตอบแทนไม่แน่นอน

ตัวอย่าง 6.1.2 จงยกตัวอย่างสินทรัพย์ที่ไม่มีความเสี่ยง และสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง

ตัวอย่าง 6.1.3 ในการซื้อหุ้นของบริษัทปิโตรเคมีแห่งหนึ่ง มีข้อมูลดังนี้

สถานการณ์	โอกาสที่สถานการณ์จะเกิด	อัตราผลตอบแทนของแต่ละสถานการณ์
หุ้นขึ้น	0.7	15%
หุ้นลง	0.3	-3%

จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังของการลงทุน

บทนิยาม 6.1.4 ให้ R เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นผลตอบแทนในการลงทุนในสินทรัพย์ อัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง (rate of expected return) คือ $E(R)$

ตัวอย่าง 6.1.5 ในการลงทุนในหุ้นและทองคำ มีข้อมูลดังนี้

สถานการณ์เงินเพื่อ	โอกาส	อัตราผลตอบแทน	
		หุ้น	ทองคำ
น้อยกว่า 3%	0.7	20%	5%
ไม่น้อยกว่า 3%	0.3	5%	25%

1. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังของการลงทุนในหุ้น

2. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังของการลงทุนในทองคำ

บทนิยาม 6.1.6 กำหนดให้ R เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นผลตอบแทนในการลงทุน **ความเสี่ยง (risk)** ของการลงทุนในสินทรัพย์นิยามโดย

$$\text{ความเสี่ยง} = \sigma_R = \sqrt{\text{var}(R)}$$

นั่นคือ ความเสี่ยงคือส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของ R

ตัวอย่าง 6.1.7 ในการซื้อหุ้นบริษัทผลิตรถยนต์และบริษัทโรงกลั่นน้ำมัน มีข้อมูลดังนี้

สถานการณ์เงินเฟ้อ	โอกาส	อัตราผลตอบแทน	
		บริษัทผลิตรถยนต์	บริษัทโรงกลั่นน้ำมัน
ไม่เกิน 5%	0.7	20%	-10%
มากกว่า 5%	0.3	-20%	50%

1. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนในบริษัทผลิตรถยนต์
2. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนในบริษัทโรงกลั่นน้ำมัน
3. นักลงทุนควรเลือกลงทุนในบริษัทใด เพราะเหตุใด

ตัวอย่าง 6.1.8 ในการซื้อหุ้นบริษัทเดินเรือและบริษัทสายการบิน มีข้อมูลดังนี้

สถานการณ์	ความน่าจะเป็น	อัตราผลตอบแทน	
		บริษัทเดินเรือ	บริษัทสายการบิน
หุ้นลง	0.4	-10%	-15%
หุ้นขึ้น	0.6	20%	15%

1. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนในบริษัทเดินเรือ
2. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนในบริษัทสายการบิน
3. เราควรควรเลือกลงทุนอย่างไร

ในการลงทุน n ทางเลือก ถ้ากำหนดให้ R_i ค่ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นผลตอบแทนของทางเลือกที่ i โดยให้การลงทุนในทางเลือก i ในสัดส่วน w_i โดยที่ $w_1 + w_2 + \dots + w_n = 1$ อัตราผลตอบแทนรวมของพอร์ตการลงทุนคือ

$$R_p = w_1R_1 + w_2R_2 + \dots + w_nR_n$$

ทฤษฎีบท 6.1.9 สำหรับสัดส่วนการลงทุน w_1, w_2, \dots, w_n ผลตอบแทนที่คาดหวัง

$$E(R_p) = w_1E(R_1) + w_2E(R_2) + \dots + w_nE(R_n)$$

ความเสี่ยง σ_p ของพอร์ตคำนวณได้จาก

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \text{COV}(R_i, R_j)$$

ในกรณีลงทุนใน 2 สินทรัพย์

บทแทรก 6.1.10 สำหรับสัดส่วนการลงทุน $w, 1 - w$ ผลตอบแทนที่คาดหวัง

$$E(R_p) = wE(R_1) + (1 - w)E(R_2)$$

ความเสี่ยง σ_p ของพอร์ตคำนวณได้จาก

$$\sigma_p^2 = w^2 \text{var}(R_1) + (1 - w)^2 \text{var}(R_2) + 2w(1 - w) \text{cov}(R_1, R_2)$$

ตัวอย่าง 6.1.11 ในการลงทุนในหุ้นและทองคำ มีข้อมูลดังนี้

สถานการณ์เงินเฟ้อ	ความน่าจะเป็น	พันธบัตร	หุ้น	ทองคำ
น้อยกว่า 3%	0.2	5%	10%	8%
3% - 6%	0.4	7%	15%	12%
ไม่น้อยกว่า 6%	0.4	12%	20%	15%

ถ้าสัดส่วนการลงทุนในพันธบัตร หุ้น และทองคำ เป็น 20%, 50% และ 30% ตามลำดับ จงหา

1. ผลตอบแทนเฉลี่ยของการลงทุน

2. ถ้าลงทุน 10,000,000 บาท ควรคาดหวังผลตอบแทนเท่าใด

ตัวอย่าง 6.1.12 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน A และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน B และพบว่า

$f(x, y)$	4%	10%	-5%
4%	0.1	0.2	0.1
5%	0.1	0.1	0.1
10%	0.2	0	0.1

ถ้านายชิตลงทุน 70% ในกองทุน A และ 30% ในกองทุน B จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง และ ความเสี่ยงของการลงทุนของนายชิต

ทฤษฎีบท 6.1.13 ความเสี่ยงของพอร์ตจะไม่เกินความเสี่ยงสูงสุดของการลงทุน

ทฤษฎีบท 6.1.14 ให้ $w = (w_1, w_2, \dots, w_n)$ เป็นน้ำหนักของการลงทุนใน R_1, R_2, \dots, R_n และ $m = (E(R_1), E(R_2), \dots, E(R_n))$ เป็นเมทริกซ์ของผลตอบแทนที่คาดหวังในการลงทุน และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของ R_1, R_2, \dots, R_n คือ

$$C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix}$$

เมื่อ $\sigma_{ij} = \text{cov}(R_i, R_j)$ เราจะได้ว่าการลงทุน $R = w_1R_1 + w_2R_2 + \cdots + w_nR_n$ มีผลตอบแทนที่คาดหวังและความแปรปรวนดังนี้

$$E(R) = mw^T \quad \text{และ} \quad \text{var}(R) = wCw^T$$

ตัวอย่าง 6.1.15 ในการลงทุนซื้อหุ้นของบริษัท A, B และ C ซึ่งมีค่าเฉลี่ยผลตอบแทนของการลงทุน 15%, 22% และ 14.5% ตามลำดับ และมีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทนของบริษัท A, B และ C คือ

$$C = \begin{bmatrix} 0.0075 & 0.018 & 0.003 \\ 0.018 & 0.0496 & 0.0076 \\ 0.003 & 0.0076 & 0.001225 \end{bmatrix}$$

ถ้าสัดส่วนการลงทุนในบริษัท A, B และ C เป็น 30%, 50% และ 20% ตามลำดับ จงหา

1. อัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของการลงทุน
2. ความเสี่ยงของการลงทุนของการลงทุน

แบบฝึกหัด 6.1

1. นาย ก ลงทุนซื้อทองคำราคาบาทละ 25,000 บาท ต่อมาพบว่าข้อมูลการลงทุนเป็นดังนี้

สถานการณ์ราคาทองคำ (บาท)	โอกาส
28,000	0.8
22,000	0.2

จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนในทองคำ

2. ในการลงทุนในกองทุน A และ B ได้ผลตอบแทนตามตารางดังต่อไปนี้

สภาพเศรษฐกิจ	โอกาส	ผลตอบแทน A	ผลตอบแทน B
เติบโตสูง	0.5	20%	8%
เติบโตปกติ	0.3	15%	8%
เติบโตต่ำ	0.2	10%	15%

2.1 จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของกองทุน A และ B

2.2 จงหาความเสี่ยงของการลงทุนในกองทุน A และ B

2.3 ถ้าคุณมีเงิน 1,000,000 บาท และลงทุนในกองทุน A และ B อย่างละครึ่ง จะได้ผลตอบแทนที่คาดหวังเท่าใด

2.4 ถ้าคุณเลือกลงทุนได้เพียงกองทุนเดียว ท่านจะเลือกลงทุนในกองทุนใด เพราะเหตุใด

3. ในการลงทุนในหุ้นและทองคำ ได้ผลตอบแทนตามตารางดังต่อไปนี้

เงินเฟ้อ (เปอร์เซ็นต์)	โอกาส	ผลตอบแทนหุ้น	ผลตอบแทนทองคำ
ไม่เกิน 3%	0.6	20%	3%
มากกว่า 3% แต่ไม่เกิน 5%	0.4	5%	10%

ถ้านาย ก นาย ก ลงทุนในหุ้น 40% และทองคำ 60%

3.1 จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง

3.2 ถ้านาย ก ลงทุน 1 ล้านบาท ควรคาดหวังผลตอบแทนเท่าใด

3.3 จงหาความเสี่ยงของการลงทุนของนาย ก เมื่อความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทนในหุ้นและทองคำเท่ากับ 0.2

4. ในการลงทุนในสินทรัพย์ A และ B ในสัดส่วน 40% และ 60% ตามลำดับ ถ้า $E(A) = 5%$, $E(B) = 10%$, $\text{var}(A) = 0.1$, $\text{var}(B) = 0.5$ และ $\text{cov}(A, B) = 0.001$ จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนครั้งนี้

5. ข้อมูลผลตอบแทนของกองทุน A, B และ C เป็นดังนี้

สภาพเศรษฐกิจ	โอกาส	ผลตอบแทน A	ผลตอบแทน B	ผลตอบแทน C
ดีมาก	0.25	16%	20%	4%
ปานกลาง	0.50	12%	14%	6%
ถดถอย	0.25	8%	8%	8%

จงหาผลตอบแทนที่คาดหวัง ถ้าลงทุนใน A, B และ C ในสัดส่วน 20%, 30% และ 50% ตามลำดับ

6. ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในหุ้น และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในทองคำ และพบว่า

$f(x, y)$	-30%	20%
-10%	0.2	0.3
10%	0.4	0.1

ถ้า นาย ก ลงทุน 80% ในหุ้น และ 20% ในทองคำ จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง และความเสี่ยงของการลงทุนของนาย ก

7. การลงทุนใน I_1 , I_2 และ I_3 มีเมทริกซ์ผลตอบแทนที่คาดหวัง $m = (0.2, 0.3, 0.5)$ และเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม

$$C = \begin{bmatrix} 0.0001 & 0.0056 & 0.0003 \\ 0.0056 & 0.0004 & 0.0004 \\ 0.0003 & 0.0064 & 0.0009 \end{bmatrix}$$

กำหนดให้นำหนักการลงทุนทั้ง 3 แบบ ดังต่อไปนี้

	I_1	I_2	I_3
แบบที่ 1	50%	50%	0%
แบบที่ 2	25%	25%	50%
แบบที่ 3	0%	50%	50%

7.1 จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังของแต่ละแบบ

7.2 จงหาความเสี่ยงของการลงทุนแต่ละแบบ

6.2 พอร์ตที่มีความเสี่ยงต่ำ

ในหัวข้อนี้เราจะศึกษาสัดส่วนการลงทุนใน 2 สินทรัพย์ ที่ทำให้ความเสี่ยงต่ำที่สุด สมมติเราลงทุนในสินทรัพย์ A และ B ในสัดส่วน $(w, 1 - w)$ จะได้ผลตอบแทน $E(R_p)$ และความเสี่ยง σ_p จากบทแทรก 6.1.10 จะได้ว่า

$$E(R_p) = wE(R_A) + (1 - w)E(R_B)$$

ความเสี่ยง σ_p ของพอร์ตคำนวณได้จาก

$$\sigma_p^2 = w^2 \text{var}(R_A) + (1 - w)^2 \text{var}(R_B) + 2w(1 - w) \text{cov}(R_A, R_B)$$

$$\sigma_p^2 = w^2 \sigma_A^2 + (1 - w)^2 \sigma_B^2 + 2w(1 - w) \sigma_{AB}$$

$$\sigma_p^2 = (\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2)w^2 + 2(\sigma_{AB} - \sigma_B^2)w + \sigma_B^2$$

จะเห็นว่า σ_p^2 เป็นฟังก์ชันกำลังสอง (ให้กราฟพาราโบลา) ที่ขึ้นกับ w เราจะพิจารณา

$$f(w) = aw^2 + bw + c$$

เมื่อ $f(w) = \sigma_p^2$, $a = \sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2$, $b = 2(\sigma_{AB} - \sigma_B^2)$ และ $c = \sigma_B^2$

จากความจริงที่ว่า $\sigma_{AB} \leq \sigma_A \sigma_B$ จะได้ว่า

$$a = \sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2 \geq \sigma_A^2 - 2\sigma_A \sigma_B + \sigma_B^2 = (\sigma_A - \sigma_B)^2 \geq 0$$

กรณี $a = 0$

กรณี $a > 0$ เป็นพาราโบลาหงาย จะได้ว่าจุดยอดให้ค่าต่ำสุด จาก

$$f'(w) = 2aw + b = 0 \quad \rightarrow \quad w = -\frac{b}{2a}$$

ดังนั้นจุดต่ำสุดคือ $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ ความเสี่ยงต่ำสุดคือ

$$\sigma_p^2 = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{\sigma_A^2\sigma_B^2 - \sigma_{AB}^2}{\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2}$$

และทุนด้วยสัดส่วน $(w, 1 - w)$ เมื่อ

$$w = -\frac{b}{2a} = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2}$$

ตัวอย่าง 6.2.1 ในการลงทุนในหุ้นและทองคำมีค่าความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทนคือ $0.10(\%)^2$ และมีค่าอื่น ๆ ดังตาราง

	หุ้น	ทองคำ
ผลตอบแทนที่คาดหวัง	10%	0.5%
ความเสี่ยง ²	8%	0.6%

1. จงหาสัดส่วนการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุดและความเสี่ยงต่ำสุด
2. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุน 1 ล้าน เมื่อมีความเสี่ยงต่ำที่สุด

ตัวอย่าง 6.2.2 ในการลงทุนในกองทุน A และ B มีค่าความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทนคือ $0.02(\%)^2$ และมีค่าอื่น ๆ ดังตาราง

	กองทุน A	กองทุน B
ผลตอบแทนที่คาดหวัง	4%	0.1%
ความเสี่ยง ²	6%	0.4%

1. จงหาสัดส่วนการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุดและความเสี่ยงต่ำสุด
2. จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังเมื่อความเสี่ยงต่ำที่สุด

ตัวอย่าง 6.2.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน A และ Y เป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเปอร์เซ็นต์ผลตอบแทนจากการลงทุนในกองทุน B และพบว่า

$f(x, y)$	4%	10%	-5%
4%	0.1	0.2	0.1
5%	0.1	0.1	0.1
10%	0.2	0	0.1

1. จงหาสัดส่วนการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุด
2. จงหาความเสี่ยงต่ำสุด
3. จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุน 1 ล้านบาท เมื่อมีความเสี่ยงต่ำที่สุด

ทฤษฎีบท 6.2.4 กำหนดให้ $w_0 = \frac{\sigma_B^2 - \sigma_{AB}}{\sigma_A^2 - 2\sigma_{AB} + \sigma_B^2}$ เราจะได้ว่า ถ้าไม่มี การยืมขาย (short sale) จะได้ว่าสัดส่วนการลงทุน $(w, 1 - w)$ ที่ทำให้การลงทุนมีความเสี่ยงต่ำสุดคือ

$$w = \begin{cases} 0 & \text{เมื่อ } w_0 < 0 \\ w_0 & \text{เมื่อ } 0 \leq w_0 \leq 1 \\ 1 & \text{เมื่อ } w_0 > 1 \end{cases}$$

การยืมขาย หมายถึงการกู้ยืมเงินหรือการยืมหุ้นจากคนอื่นมาขายเพื่อเอาเงินที่ได้ไปลงทุนในสินทรัพย์อื่น ทำให้สัดส่วนการลงทุนติดลบ ($w < 0$) เช่นสัดส่วนการลงทุน (1.1%, -0.1%) ถ้าเรามีเงิน 100,000 บาท เราจะยืมหุ้น B จากนักลงทุนอื่น จำนวน 10% เป็นเงิน 10,000 บาทมาขาย แล้วนำเงินดังกล่าวมารวมกับต้นทุนเดิมคือ 100,000 บาท จะกลายเป็น 110,000 บาท เพื่อนำไปลงทุนในหุ้น A

ตัวอย่าง 6.2.5 จากตัวอย่าง 6.2.2 ถ้าผู้ลงทุนมีความต้องการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุดโดยไม่มี การยืมขาย นักลงทุนจะต้องลงทุนอย่างไรและมีความเสี่ยงและผลตอบแทนที่คาดหวังเท่าใด

แบบฝึกหัด 6.2

1. ในการลงทุนในสินทรัพย์ A และ B มีค่าความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทนคือ $-2(\%)^2$ และมีค่าอื่น ๆ ดังตาราง

	สินทรัพย์ A	สินทรัพย์ B
ผลตอบแทนที่คาดหวัง	5%	1%
ความเสี่ยง ²	10%	4%

จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวัง ณ ระดับความเสี่ยงต่ำสุด

2. จากข้อ 1 ถ้าต้องการผลตอบแทนที่คาดหวัง 6% จะมีความเสี่ยงในการลงทุนกี่เปอร์เซ็นต์
3. โอกาสที่หุ้น A และ B จะมีกำไรเป็นดังนี้

$$P(A = 20\%) = P(B = 3\%) = 0.6 \text{ และ } P(A = 5\%) = P(B = 10\%) = 0.4$$

ถ้า $\rho_{AB} = -1$ จงหาน้ำหนักการลงทุนที่มีความเสี่ยงน้อยที่สุด

4. จากข้อ 3 น้ำหนักการลงทุนที่มีความเสี่ยงน้อยที่สุดนั้นให้ผลตอบแทนกี่เปอร์เซ็นต์ และมีความเสี่ยงเท่าใด
5. จงหาน้ำหนักการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุด ถ้า $\sigma_{AB}^2 = -1(\%)^2$
6. จากข้อ 5 จงหาผลตอบแทนที่คาดหวังจากการลงทุน 1 ล้านบาท ตามน้ำหนักการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุด
7. ในการลงทุนในกองทุน A และ B มีค่าความแปรปรวนร่วมของผลตอบแทนคือ $0.02(\%)^2$ และมีค่าอื่น ๆ ดังตาราง

	กองทุน A	กองทุน B
ผลตอบแทนที่คาดหวัง	4%	0.1%
ความเสี่ยง ²	6%	0.4%

7.1 จงหาสัดส่วนการลงทุนที่มีความเสี่ยงต่ำสุดในกรณีที่มีการยืมขายและไม่มีการขาย

7.2 จงหาอัตราผลตอบแทนที่คาดหวังและความเสี่ยงของการลงทุนในข้อ 7.1

8. จงแสดงว่าถ้าสินทรัพย์ A และ B เป็นอิสระต่อกัน จะได้ว่าสัดส่วนการลงทุนที่ทำให้มีความเสี่ยงต่ำสุด $w = \frac{\sigma_A^2}{\sigma_A^2 + \sigma_B^2}$ และไม่มีการขาย

6.3 การจัดการพอร์ตโดยใช้ข้อมูลอดีต

ในหัวข้อนี้จะนำเสนอวิธีการคำนวณค่าต่าง ๆ จากตัวอย่างสุ่มของข้อมูลในอดีต สิ่งที่น่าสนใจทั้งหมดจะเรียกว่า **ประชากร (population)** และเรียกส่วนหนึ่งของประชากรที่สุ่มมาว่า **ตัวอย่าง (sample)** เนื่องจากบางครั้งประชากรมีขนาดใหญ่อาจทำได้ลำบากและใช้งบประมาณมากในการเก็บข้อมูล เราจึงนิยามสุ่มตัวอย่างมาเพื่อคำนวณค่าที่ต้องการ แล้วปรับปรุงให้เป็นค่าประชากร เรียกค่าที่คำนวณได้จากประชากรว่า **พารามิเตอร์ (parameter)** และค่าที่คำนวณได้จากตัวอย่างว่า **สถิติ (statistics)**

ตัวอย่าง 6.3.1 กองทุน A มีการจัดตั้งมา 20 ปี มีการจ่ายปันผลตอบแทนทุกปีดังต่อไปนี้

ปีที่	ผลตอบแทน (%)	ปีที่	ผลตอบแทน (%)
1	8	11	15
2	8	12	12
3	5	13	8
4	0	14	5
5	5	15	0
6	6	16	5
7	10	17	10
8	15	18	9
9	10	19	-2
10	20	20	16

1. จงหาผลตอบแทนเฉลี่ยของกองทุน A
2. ถ้าผลตอบแทนเฉลี่ยจากการสุ่มตัวอย่างปีที่เลขคู่
3. ถ้าผลตอบแทนเฉลี่ยจากการสุ่มตัวอย่าง 5 ปีสุดท้าย

การสุ่มตัวอย่างเมื่อคำนวณสถิติ ค่าเหล่านั้นจะเป็นตัวแทนที่แท้จริงหรือไม่ นักสถิติได้ตัวประมาณค่าต่าง ๆ ไว้ดังนี้

ทฤษฎีบท 6.3.2 ในการสุ่มตัวอย่าง x_1, x_2, \dots, x_n เราจะใช้

$$1. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad \text{เป็นตัวประมาณค่าเฉลี่ยของประชากร}$$

$$2. s_X^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n - 1} \quad \text{เป็นตัวประมาณค่าความแปรปรวนของประชากร}$$

ทฤษฎีบท 6.3.3 ในการสุ่มตัวอย่าง x_1, x_2, \dots, x_n และ y_1, y_2, \dots, y_n เราจะใช้

$$1. s_{XY}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1} \quad \text{เป็นตัวประมาณค่าความแปรปรวนร่วมของ X และ Y}$$

$$2. \hat{\rho}_{XY} = \frac{s_{XY}}{s_X s_Y} \quad \text{เป็นตัวประมาณค่าสัมประสิทธิ์สหสัมพันธ์ของ X และ Y}$$

ตัวอย่าง 6.3.4 นายณัฐต้องการลงทุนในหุ้น JAS จึงสุ่มข้อมูลอัตราปันผลในอดีตมา 5 ปี และพบข้อมูลดังนี้

พ.ศ.	อัตราส่วนเงินปันผลตอบแทน (%)
2559	28.45
2560	7.06
2561	10.62
2562	11.24
2563*	58.81

*อัตราผลปันผลไตรมาสที่ 3 ของปี

จงประมาณค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยและความแปรปรวนของ JAS

ตัวอย่าง 6.3.5 วัชระพลต้องการลงทุนในหุ้น PTT และ SCB จึงสุ่มข้อมูลอัตราปันผลในอดีตมา 5 ปี และพบข้อมูลดังนี้

พ.ศ.	อัตราปันผล (%)	
	PTT	SCB
2550	4.55	3.14
2552	4.01	2.88
2554	4.51	5.02
2556	2.69	3.61
2560	4.34	3.58

1. จงประมาณค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยและความแปรปรวนของ PTT
2. จงประมาณค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยและความแปรปรวนของ SCB
3. จงหาความแปรปรวนร่วมของอัตราผลปันผล PTT และ SCB

แบบฝึกหัด 6.3

1. นาย ก ต้องการลงทุนในหุ้น BTS จึงสุ่มข้อมูลอัตราปันผลในอดีตมา 5 ปี และพบข้อมูลดังนี้

พ.ศ.	อัตราส่วนเงินปันผลต่อผลตอบแทน (%)
2559	7.95
2560	4.10
2561	3.66
2562	2.97
2563*	4.57

*อัตราผลปันผลไตรมาสที่ 2 ของปี

จงประมาณค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยและความแปรปรวนของ BTS

2. สุ่มข้อมูลอัตราปันผลในอดีตมา 5 ปี ของหุ้น A และ B และพบข้อมูลดังนี้

พ.ศ.	อัตราปันผลหุ้น A (%)	อัตราปันผลหุ้น B (%)
2540	3	7
2545	4	6
2550	4	5
2555	5	6
2560	4	8

2.1 จงหาอัตราปันผลที่คาดหวังหุ้น A และ B

2.2 จงหาความเสี่ยงของอัตราปันผลที่คาดหวังของหุ้น A และ B

2.3 จงหาความแปรปรวนร่วมของหุ้น A และ B

2.4 จงหาอัตราปันผลที่คาดหวังและความเสี่ยงของพอร์ตที่ลงทุนในหุ้น A และ B ในสัดส่วนที่เท่ากัน

2.5 จงหาอัตราปันผลที่คาดหวังและความเสี่ยงของพอร์ตที่ลงทุนในหุ้น A และ B ในสัดส่วน 40% และ 60% ตามลำดับ

3. สุ่มข้อมูลอัตราปันผลในอดีตมา 5 ปี ของหุ้น ADVANC และ SCC พบข้อมูลดังนี้

พ.ศ.	อัตราปันผล (%)	
	ADVANC	SCC
2559	8.84	3.23
2560	5.28	3.93
2561	4.10	4.36
2562	3.32	4.59
2563*	4.18	3.85

*อัตราผลปันผลไตรมาสที่ 3 ของปี

- 3.1 จงประมาณค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยและความแปรปรวนของ ADVANC
- 3.2 จงประมาณค่าอัตราผลตอบแทนเฉลี่ยและความแปรปรวนของ SCC
- 3.3 จงหาความแปรปรวนร่วมของอัตราผลปันผล ADVANC และ SCC
- 3.4 จงหาอัตราปันผลที่คาดหวังและความเสี่ยงของพอร์ตที่ลงทุนในหุ้น ADVANC และ SCC ในสัดส่วนที่เท่ากัน

4. สุ่มข้อมูลอัตราปันผลในอดีตมา 5 ปี ของหุ้น PTTEP, MAJOR และ CBG พบข้อมูลดังนี้

พ.ศ.	อัตราปันผล (%)	อัตราปันผล (%)	อัตราปันผล (%)
	PTTEP	MAJOR	CBG
2559	3.12	3.50	1.17
2560	3.25	4.14	1.24
2561	3.74	6.07	2.76
2562	4.02	5.35	0.95
2563*	6.40	5.62	1.38

*อัตราผลปันผลไตรมาสที่ 3 ของปี

- 4.1 จงหาความแปรปรวนร่วมของอัตราผลปันผล PTTEP และ MAJOR
- 4.2 จงหาอัตราปันผลที่คาดหวังของพอร์ตที่ลงทุนในหุ้น PTTEP, MAJOR และ CBG ในสัดส่วนที่ 50%, 30% และ 20%

6.4 อัตราดอกเบี้ยที่คาดหวัง

ในหัวข้อนี้เราจะพิจารณาตัวแบบการคาดการณ์ดอกเบี้ยในอนาคต โดยใช้ความน่าจะเป็น สมมติว่าอัตราดอกเบี้ย (I) ในอีก 1 ปีข้างหน้า มีโอกาสเป็น

4% ด้วยความน่าจะเป็น 0.50

5% ด้วยความน่าจะเป็น 0.25

6% ด้วยความน่าจะเป็น 0.25

จะได้ว่า

$$E(I) = 4\%(0.50) + 5\%(0.25) + 6\%(0.25) = 4.75\%$$

จะเรียก $E(I)$ ว่า **อัตราดอกเบี้ยที่คาดหวัง** (expected interest rate) และเงินรวมที่คำนวณได้จากอัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังเรียกว่า **เงินรวมที่คาดหวัง** (expected total return)

ในกรณีที่คาดหวังดอกเบี้ยหลายปีข้างหน้าก็จะใช้แนวคิดเดียวกันในการคำนวณ

ตัวอย่าง 6.4.1 อัตราดอกเบี้ยของธนาคารแห่งหนึ่งในอีก 5 ปี ข้างหน้าเป็นดังนี้

ดอกเบี้ย	2%	3%	5%	6%	7%
โอกาส	0.2	0.2	0.4	0.1	0.1

1. จงหาอัตราดอกเบี้ยที่คาดหวัง
2. จงหาเงินรวมที่คาดหวังของเงินฝาก 100,000 บาท ในปีแรกโดยไม่ถอนเงินจนครบ 5 ปี คิดดอกเบี้ยทบต้นทุกปี

ตัวอย่าง 6.4.2 ให้อัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีในอีก 10 ปีข้างหน้าเป็นตัวแปรสุ่มที่มีค่าเฉลี่ย 0.08 และความแปรปรวน 0.0001 สมมติให้อัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็นอิสระต่อกัน จงหา

1. เงินรวมที่คาดหวังของเงินฝาก 100 บาทในอีก 10 ปีข้างหน้า
2. ความแปรปรวนของเงินที่คาดหวัง

ตัวอย่าง 6.4.3 ผู้จัดการกองทุนซื้อพันธบัตร 5 ปี ราคาหน้าพันธบัตร 100 บาท จ่ายดอกเบี้ย 10 บาททุกสิ้นปี เพื่อให้ได้ผลตอบแทนสูงสุดผู้จัดการกองทุนจึงนำดอกเบี้ยจากะพันธบัตรไปฝากกับธนาคารในทุกครั้งที่ได้รับจนครบกำหนดไถ่ถอนพันธบัตร อัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็นอิสระต่อกัน จงหาเงินรวมที่คาดหวังเมื่อครบ 5 ปี ในกรณีต่อไปนี้

1. อัตราดอกเบี้ยธนาคารมีค่า 5% ทุกปี
2. อัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังของธนาคารในปีที่ 2, 3, 4 และ 5 คือ 4%, 5%, 6% และ 3% ตามลำดับ

แบบฝึกหัด 6.4

1. นาย ก ฝากเงินทบต้นเป็นเวลา 2 ปี โดยอัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็นตัวแปรสุ่มที่อิสระต่อกัน โดยมีค่าเฉลี่ย 4% และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.05% จงหา
 - 1.1 เงินรวมที่คาดหวังของเงินต้น 100,000 บาท เมื่อสิ้นปีที่ 2
 - 1.2 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของเงินรวม
2. ดิลกฝากเงิน 50,000 บาท เป็นเวลา 3 ปี โดยคิดดอกเบี้ยทบต้นปีละครั้ง โดยอัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังในปีที่ 1, 2 และ 3 คือ 4%, 5% และ 6% ตามลำดับ อัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังในแต่ละปีเป็นอิสระต่อกัน และมีความแปรปรวนของอัตราดอกเบี้ยในปีที่ 1, 2 และ 3 คือ 0.0001, 0.0004 และ 0.0001 ตามลำดับ
 - 2.1 จงหาเงินรวมที่คาดหวัง
 - 2.2 จงหาความแปรปรวนของเงินรวม
3. รัศมีฝากเงินทุกต้นปี ปีละ 100,000 บาท เป็นเวลา 10 ปี โดยไม่ถอนดอกเบี้ยออกมาเลย ถ้าอัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็นอิสระต่อกัน และมีค่าคาดหวังที่ 5% ทุกปี จงหาเงินรวมที่รัศมีควรได้รับเมื่อสิ้นปีที่ 10
4. จากข้อ 3 ถ้าอัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังใน 5 ปีแรกคือ 5% และ 5 ปีหลังคือ 4% จงหาเงินรวมที่คาดว่าจะได้รับของรัศมี
5. วรณลีฝากประจำ 100,000 บาท เป็นเวลา 2 ปี โดยอัตราดอกเบี้ยปีที่ 1 และปีที่ 2 มีอัตราดอกเบี้ยที่คาดหวังปีละ 5% และความแปรปรวนของอัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีมีค่าเท่ากับ 0.0001 ถ้าอัตราดอกเบี้ยในแต่ละปีเป็นอิสระต่อกัน จงหาเงินรวมของวรณลีที่จะได้รับเมื่อสิ้นปีที่ 2
6. พันธบัตร 3 ปี ราคา 10,000 บาท จ่ายดอกเบี้ย 5% ทุกสิ้นปี ถ้าหนี้รัฐนำดอกเบี้ยที่ได้ไปฝากธนาคาร โดยคาดหวังอัตราดอกเบี้ยที่จะได้รับจากธนาคารคือ 4% ทุก ๆ ปี ถ้าอัตราดอกเบี้ยธนาคารเป็นอิสระต่อกัน จงหาเงินรวมของหนี้รัฐที่คาดว่าจะได้รับในปีที่ 3

บรรณานุกรม

กฤษณะ เนียมมณี. (2562). **คณิตศาสตร์การเงินในชีวิตประจำวัน**. (พิมพ์ครั้งที่ 1).
สืบค้นจาก <https://www.mebmarket.com>

ประวัติผู้เขียน



ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธัญยศ จำปาวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตรมหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตรบัณฑิต (คณิตศาสตร์, เกียรตินิยมอันดับสอง),
จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours), Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod_ja@ssru.ac.th

Office: 1145

Facebook: www.facebook.com/Jampawai

Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีเซต, 2561
2. เอกสารประกอบการสอนวิชาสมการเชิงอนุพันธ์สำหรับครู, 2560
3. หนังสือความจริงที่ต้องพิสูจน์, 2560
4. เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู, 2559
5. ตำราวิชาทฤษฎีจำนวน, 2559