คณิตศาสตร์สำหรับการสอนวิทยาศาสตร์
Mathematics for Science Instruction

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์
มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2565

SCC1306

คณิตศาสตร์สำหรับการสอนวิทยาศาสตร์

Mathematics for Science Instruction

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
เอกสารประกอบการสอนวิชาคณิตศาสตร์สำหรับการสอนวิทยาศาสตร์ ปีการศึกษา 1/2565

สารบัญ

บทที่ 1

พีชคณิตเบื้องต้น

1.1 เซต

เซต (Set) เป็นคำอนิยาม หมายถึงคำที่ต้องยอมรับกันในเบื้องต้นว่าไม่สามารถให้ความหมายที่รัดกุมได้ คำว่าเซตจึงหมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ เมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วจะสามารถบอกได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดอยู่นอกกลุ่ม เรียกสิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซตว่า **สมาชิก** (element) ถ้า a เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \in A$ และถ้า a ไม่เป็นสมาชิกของเซต A เขียนแทนด้วย $a \notin A$ เช่น $A = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า $1 \in A$ แต่ $4 \notin A$ เป็นต้น การเขียนเซตประกอบด้วย 2 วิธีคือ

1. **วิธีแจกแจงสมาชิก** (Tabular form) การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือการเขียนเซตโดยเขียนสมาชิกลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นต้น ข้อตกลงเกี่ยวกับการเขียนเซต

   (ก) ถ้าสมาชิกในเซตซ้ำกันจะเขียนสมาชิกตัวนั้นเพียงครั้งเดียว เช่น $\{1, 1, 2, 3\}$ เขียนแทนด้วย $\{1, 2, 3\}$

   (ข) สมาชิกในเซตเดียวกันสามารถเขียนลำดับแบบใดก็ได้ เช่น $\{1, 2, 3\}$ เขียนเป็น $\{3, 1, 2\}$ หรือ $\{2, 1, 3\}$ จะได้ว่าทั้ง 3 เซตเป็นเซตเดียวกัน

   (ค) สำหรับเซตที่ไม่มีสมาชิกจะเรียกว่า **เซตว่าง** (empty set) เขียนแทนด้วย $\{\}$ หรือ $\varnothing$

   (ง) เซตที่มีทราบสมาชิกแน่จัด สามารถละการเขียนทุกสมาชิกได้ด้วย ... เช่น $\{1, 2, 3, ..., 10\}$ หมายถึงเซต $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ เป็นต้น ทำนองเดียวกับสำหรับเซตที่มีสมาชิกไม่จำกัดตัว(นับได้) เช่น $\{1, 2, 3, ...\}$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก $1, 2, 3$ และลำดับถัดไปเรื่อย ๆ ไม่มีที่สิ้นสุด

2. **วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก** (Set builder form) การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกหมายถึงสมาชิก และส่วนที่สองคือเงื่อนไขของสมาชิก โดยมีเครื่องหมาย : หรือ | คั่นระหว่างสองส่วนนั้น อ่านว่า "โดยที่"

$$A = \{ \text{สมาชิก} \mid \text{เงื่อนไขของสมาชิก} \}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $5\}$ หมายถึง $A = \{1, 2, 3, 4\}$

สัญลักษณ์เซตของจำนวนต่าง ๆ ที่ควรรู้จัก

$\mathbb{C}$	แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน	$\mathbb{Q}^c$	แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{R}$	แทนเซตของจำนวนจริง	$\mathbb{Z}$	แทนเซตของจำนวนเต็ม
$\mathbb{Q}$	แทนเซตของจำนวนตรรกยะ	$\mathbb{N}$	แทนเซตของจำนวนนับ

เซตข้างต้นถ้าเราสนใจเฉพาะสมาชิกที่เป็นบวกเราจะเติมเครื่องหมายกำลัง + เช่น $\mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{R}^+$ แทนเซตจำนวนเต็มบวก จำนวนตรรกยะบวก และจำนวนจริงบวกตามลำดับ ในทำนองเดียวกัน $\mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{R}^-$ แทนเซตจำนวนเต็มลบ จำนวนตรรกยะลบ และจำนวนจริงลบตามลำดับ

ตัวอย่าง 1.1.1 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{x \in \mathbb{Z}^+ \mid x < 10$ และ 3 หาร x ไม่ลงตัว $\}$

2. $B = \{(x, y) \mid x$ และ y เป็นจำนวนนับซึ่ง $x + y = 5\}$

3. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ หารด้วย 2 ลงตัว $\}$

4. $D = \{$ ชื่อธาตุ | ชื่อธาตุมีพยัญชนะตัวเดียว $\}$

ตัวอย่าง 1.1.2 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบมีเงื่อนไข

1. $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

2. $B = \{1, 2, 6, 24, 120, ...\}$

พิจารณาจากจำนวนสมาชิกแบ่งออกได้ 2 ชนิดคือ

1. **เซตจำกัด** (Finite set)
   เซตจำกัดคือเซตว่างหรือเซตที่มีสมาชิกจำกัดตัว ถ้า A เป็นเซตจำกัด เราจะเขียน $n(A)$ หรือ $|A|$ แทนจำนวนสมาชิกของเซต A เช่น $A = \{1, 3, 4\}$ แล้ว $n(A) = 3$ หรือเซต A มีสมาชิกทั้งหมด 3 ตัว

2. **เซตอนันต์** (Infinite set)
   เซตอนันต์คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เช่น $\mathbb{N}$ และ $\mathbb{Z}$ เป็นต้น

พิจารณาจากการนับสมาชิกในเซตแบ่งออกได้ 2 ชนิดคือ

1. **เซตนับได้** (Countable set)
   เซตนับได้คือเซตที่สามารถนับจำนวนสมาชิกได้ เช่น $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{a, b, c\},$ เซตของจำนวนนับและเซตของจำนวนเต็ม เป็นต้น

2. **เซตนับไม่ได้** (Uncountable set)
   เซตนับไม่ได้คือเซตที่ไม่ใช่เซตนับได้ เช่น $\mathbb{R}$ และ $\mathbb{Q}^c$ เป็นต้น

ตัวอย่าง 1.1.3 จงบอกชนิดของเซตต่อไปนี้

1. $\{x \in \mathbb{Z}^+ \mid$ และ x หาร 12 ลงตัว $\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} \mid x + 0 = x\}$
3. $\{x \in \mathbb{Z} \mid x \cdot 1 = x\}$
4. $\{(x, y) \mid x$ และ y เป็นจำนวนนับ $\}$
5. เซตของรูปแบบ DNA ของมนุษย์ในโลก
6. เซตของดวงดาวในระบบสุริยะ

ตัวอย่าง 1.1.4 กำหนดให้ $C = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ และ $X = \{x \in C \mid \sqrt{x}$ เป็นจำนวนเต็ม $\}$ ถ้าเซต A สอดคล้อง

(ก) สมาชิกทุกตัวของเซต A มาจากสมาชิกในเซต X

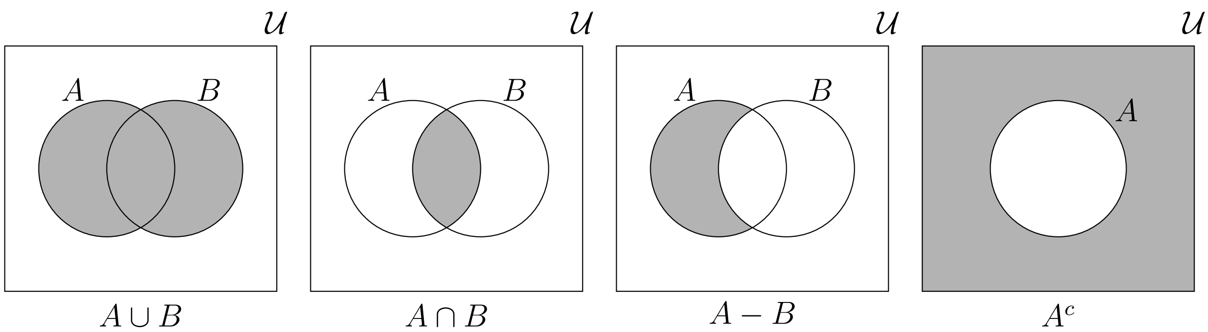
(ข) $n(A) = 3$

(ค) ผลบวกสมาชิกของเซต A ทั้งหมด 7 หารลงตัว

จงหาเซต A เป็นไปได้ทั้งหมด

เอกภพสัมพัทธ์ (universe) คือเซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์ เมื่อให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ นิยามการดำเนินการบนเซตดังต่อไปนี้

ยูเนียน (union)	$A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
อินเตอร์เซชัน (intersection)	$A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
ผลต่าง (difference)	$A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$
ส่วนเติมเต็ม (complement)	A' หรือ $A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$



ตัวอย่าง 1.1.5 กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

$$A = \{1, 3, 5, 6, 9\} \qquad B = \{1, 2, 5, 6, 7\} \qquad C = \{2, 3, 5, 6, 10\}$$

จงหาเซตต่อไปนี้

1. $A \cap B$ =
2. $A \cup B$ =
3. $A - B$ =
4. B^c =
5. $(B^c)^c$ =
6. $A \cap B^c$ =
7. $(A \cap B)^c$ =
8. $A^c \cap B^c$ =
9. $A \cap (B \cup C)$ =
10. $(A \cap B) \cup (A \cap C)$ =

ทฤษฎีบท 1.1.6 ให้ A, B และ C เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$

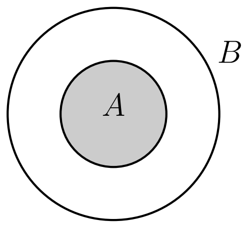
1. กฎนิจพล (Idempotent law)
   - **(S1)** $A \cap A = A$
   - **(S2)** $A \cup A = A$
2. กฎการสลับที่ (Commutative law)
   - **(S3)** $A \cap B = B \cap A$
   - **(S4)** $A \cup B = B \cup A$
3. กฎการจัดกลุ่ม (Associative law)
   - **(S5)** $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   - **(S6)** $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
4. กฎการแจกแจง (Distributive law)
   - **(S7)** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   - **(S8)** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
5. กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's law)
   - **(S9)** $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   - **(S10)** $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
6. กฎคอมพลีเมนต์ซ้อน (Double complement law)
   - **(S11)** $(A^c)^c = A$

ตัวอย่าง 1.1.7 ถ้า A และ B เป็นเซต จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือไม่

$$A - B = A \cap B^c$$

เซตมีจำนวนมากมายหลายแบบแตกต่างกันไป เมื่อนักคณิตศาสตร์สนใจเซต ๆ หนึ่ง แล้วสร้างเซตใหม่จากสมาชิกของเซตนี้เราจะเรียกว่า **สับเซต** (subset) และทำการศึกษาสมบัติต่าง ๆ ของเซตย่อยเหล่านั้น

บทนิยาม 1.1.8 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ เราจะกล่าวว่า A เป็น**สับเซต** ของ B ก็ต่อเมื่อ ทุก ๆ สมาชิกใน A เป็นสมาชิกใน B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$



ถ้า A ไม่เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $A \nsubseteq B$ นั้นคือมีสมาชิกใน A ที่ไม่เป็นสมาชิกใน B

จากนิยามเราจะกล่าวได้ว่า $A \subseteq A$ และ $\varnothing \subseteq A$ ทุกๆเซต A

ตัวอย่าง 1.1.9 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ เซตใดต่อไปนี้เป็นสับเซตของ A ให้

$$B = \{3, 4\},\ C = \{3, 4, 6\} \text{ และ } D = \{1, \{2\}\}$$

บทนิยาม 1.1.10 เราจะกล่าวว่าเซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$ ถ้า A ไม่เท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

บทนิยาม 1.1.11 เราจะกล่าวว่าเซต A เป็น**สับเซตแท้** (proper subset) ของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$

ตัวอย่าง 1.1.12 ให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ และ $D = \{3, 5, 7, 1\}$ จงบอกความสัมพันธ์ระหว่างเซตที่กำหนด

ตัวอย่าง 1.1.13 จงหาสับเซตทั้งหมดของ $A = \{1, 2, 3\}$

ทฤษฎีบท 1.1.14 ให้ A เป็นเซตจำกัด แล้วจำนวนสับเซตทั้งหมดของ A เท่ากับ $2^{n(A)}$ สับเซต และมีจำนวนสับเซตแท้ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)} - 1$ สับเซต

บทนิยาม 1.1.15 ให้ A เป็นเซตใด ๆ เราจะเรียกเซตของสับเซตทั้งหมดของ A ว่า**เซตกำลัง** (power set) เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(A)$ นั้นคือ

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

ตัวอย่าง 1.1.16 จงหาเซตกำลังของเซต $A = \{1, 2, 3\}$

ทฤษฎีบท 1.1.17 ให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แล้ว

1. $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$
2. จำนวนสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ เท่ากับ $2^{n(A)}$
3. $X \in \mathcal{P}(A)$ ก็ต่อเมื่อ $X \subset A$
4. $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$
5. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
6. $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

ทฤษฎีบท 1.1.18 ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด ในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แล้ว

1. $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
2. $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

แบบฝึกหัด 1.1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปแบบแจกแจงสมาชิก

   1.1 $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเต็มคี่ที่อยู่ระหว่าง 10 กับ $30\}$

   1.2 $\{x \mid x$ เป็นจำนวนเฉพาะบวกที่ไม่เกิน $40\}$

   1.3 $\{x \mid x = 2n - 1$ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ$\}$

   1.4 $\{(x, y) \mid x, y$ เป็นจำนวนนับซึ่ง $x + y < 5\}$

   1.5 $\{(x, y) \mid x, y$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $x^2 + y^2 = 9\}$

   1.6 $\{x \in \mathbb{R}^- \mid x^3 = x\}$

   1.7 $\{n \in \mathbb{N} \mid mn = m + n$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}\}$

2. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปแบบมีเงื่อนไข

   2.1 เซตของจำนวนเต็มคู่ที่มากกว่า 9

   2.2 เซตของประเทศที่มีชายแดนติดกับไทย

   2.3 เซตของจำนวนเฉพาะคู่

   2.4 $\{3, 6, 9, 12, 15\}$

   2.5 $\{1, 8, 27, 64, 125\}$

   2.6 $\{3, 8, 15, 24, 35, 48, 63, 80\}$

   2.7 $\{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$

   2.8 $\{111, 222, 333, ..., 999\}$

   2.9 $\{abc, acb, bac, bca, cab, cba\}$

   2.10 $\{0.1, 0.11, 0.111, 0.1111, ...\}$

3. จงแจกแจงสมาชิกของเซต $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}\}$

4. จงเขียนเซต $\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, \frac{9}{32}, ...\}$ ในรูปแบบมีเงื่อนไข

5. กำหนดให้ $X = \{x \in \mathbb{Z} \mid 100 \leq x \leq 999\}$ และ
   $A_i = \{x \in X \mid$ ตัวเลขตำแหน่งที่ i นับจากซ้ายมือของ x เท่ากับ $i\}$
   จงหา $n(A_1) + n(A_2) + n(A_3)$

6. กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{0, 1, 2, 3, ..., 14\}$, $A = \{1, 3, 4, 5, 9, 12\}$, $B = \{2, 3, 4, 7, 11\}$ และ $C = \{4, 5, 9, 13\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

   6.1 $A \cup B$

   6.2 $(A \cap B) - C$

   6.3 $(A \cup B^c) \cap C$

   6.4 $A - (B - C)$

   6.5 $(C - A) \cup B^c$

   6.6 $[(A - C') \cap B] - (C - A)$

   6.7 $(A \cap B^c \cap C) \cup (A \cap B \cap C^c)$

   6.8 $C - (A^c \cap B \cap C)^c$

   6.9 $[(A \cup B \cup C) \cap (A \cap B)^c]$

   6.10 $[(A \cup C^c) \cap B] \cup [(A^c - B^c) - C]$

7. จงเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์แทนเซตต่อไปนี้

   7.1 $(A \cup B) - (A \cap B)$

7.2 $A^c - (A \cup B^c)$

7.3 $[(A \cup B) \cap C] - B^c$

7.4 $B^c - [A^c - (C \cup B)]$

7.5 $(A \cup B \cup C^c) - (A - B)$

7.6 $(B \cup C^c) - (A \cap B^c)$

8. จงหาเซตกำลังของเซตต่อไปนี้

8.1 $\{a, b\}$

8.2 $\{0, \{0\}, \{\varnothing\}$

8.3 $\{1, 2, (1, 2)\}$

8.4 $\{A, \{A\}\}$

8.5 {ก, ข, ค}

8.6 $\{1, x, x^2\}$

9. ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ จงพิจารณา ถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้พร้อมให้เหตุผลประกอบ

9.1 $A \subset A \cup B$

9.2 $B \subset A \cup B$

9.3 $A \cap B \subset A \cup B$

9.4 $A^c \cap B^c \subset A$

9.5 ถ้า $A - B = \varnothing$ แล้ว $B^c \subset A^c$

9.6 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $A - B = A$

9.7 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $B - A = B$

9.8 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $B - A = B$

10. ให้ A และ B เป็นเซตใดๆจงพิจารณา ถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้พร้อมให้เหตุผลประกอบ

10.1 $P(A) \subset P(A \cup B)$

10.2 $P(A - B) = [P(A) - P(B)] \cup \{\varnothing\}$

10.3 $P(\{\varnothing\}) \cap \varnothing = P(\varnothing)$

10.4 $P(A \cap B) - P(A \cup B) = \varnothing$

10.5 ถ้า $A - B = B$ แล้ว $P(A) = P(B)$

11. ถ้าสับเซตแท้ทั้งหมดของ A คือ $\varnothing$, $\{\{\varnothing\}\}$ และ $\{1\}$ จงหาเซตของ $P(A) - A$

12. ถ้า $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $(P(A) - A) \cup (A - P(A))$ เท่ากับเท่าใด

13. ถ้า $A = \{\varnothing, 0, 1, \{1\}, \{1, 2\}, \{3\}\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $P(A) - A$ เท่ากับเท่าใด

14. ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ถ้า $n(A \cup B) = 92$, $n(A \cup C) = 79$, $n(B \cup C) = 75$, $n(A \cap B \cap C) = 32$, $n((A \cap B) - C) = 18$, $n((A \cap C) - B) = 6$ และ $n((B \cap C) - A) = 2$ แล้ว $n(A \cup B \cup C)$ เท่ากับเท่าใด

15. ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ถ้า $n(A \cup B \cup C) = 91$, $n(A \cap B' \cap C') = 11$, $n((B - A) \cap (B - C)) = 15$, $n(A \cap B \cap C) = 20$, $n((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) = 47$ และ $n(C) = 59$ แล้ว $n(A' \cap B' \cap C)$ เท่ากับเท่าใด

16. จากการสำรวจนักเรียนที่เรียนวิชาคณิตศาสตร์ เคมี และฟิสิกส์ 170 คน พบว่าทุกคนชอบเรียนอย่างน้อย 1 วิชา และ ชอบเรียนคณิตศาสตร์ 80 คน ชอบเรียนเคมี 92 คน ชอบเรียนฟิสิกส์ 115 คน ชอบเรียนทั้งคณิตศาสตร์และเคมี 52 คน ชอบเรียนทั้งเคมีและฟิสิกส์ 57 คน ชอบเรียนทั้งคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ 43 คน จำนวนนักเรียนที่ชอบเรียนทั้ง 3 วิชา เท่ากับเท่าใด

17. นักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งมี 400 คน ในจำนวนนี้มีผู้ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ 225 คน และลงทะเบียนเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 240 คน ถ้านักเรียนที่ไม่ลงทะเบียนเรียนวิชาคณิตศาสตร์ และไม่ลงทะเบียนเรียนวิชาภาษาอังกฤษ 50 คน แล้วจำนวนนักเรียนที่ลงทะเบียนวิชาคณิตศาสตร์และไม่ลงทะเบียนวิชาภาษาอังกฤษเท่ากับเท่าใด

18. กำหนดให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์และให้ A และ B เป็นสับเซตใน $\mathcal{U}$ ถ้า 20% ของสมาชิกในเซต A เป็นสมาชิกในเซต B 25% ของสมาชิกในเซต B เป็นสมาชิกในเซต A และจำนวนสมาชิกของเซต $(A - B) \cup (B - A)$ เท่ากับ 112 แล้วจำนวนสมาชิกของ $A \cup B$ เท่ากับเท่าใด

19. ในการสำรวจงานอดิเรกของนักเรียน 200 คน ปรากฏว่า 120 คนชอบอ่านหนังสือ 60 คนชอบอ่านหนังสือและดูภาพยนต์ 110 คนชอบดูภาพยนต์ 70 คนชอบอ่านหนังสือและเล่นกีฬา 130 คนชอบเล่นกีฬา 50 คนชอบดูภาพยนต์และเล่นกีฬา นักรียนที่ชอบเล่นกีฬาเพียงอย่างเดียวมีกี่คน

20. จากการสำรวจความชอบรับประทานไอศกรีมของนักเรียนจำนวน 180 คน พบว่า มี 60 คนชอบรสช็อคโกแลต มี 31 คนชอบรสช็อคโกแลตและวานิลลา มี 87 คนชอบรสวานิลลา มี 27 คนชอบรสช็อคโกแลตและวานิลลา มี 70 คนชอบรสสตรอเบอรี่ มี 22 คนชอบรสช็อคโกแลตและสตรอเบอรี่ และมี 5 คนไม่ชอบทั้งสามรส มีนักเรียนที่ชอบทั้งสามรสกี่คน

1.2 ตรรกศาสตร์เบื้องต้น

ในทางตรรกศาสตร์เราสนใจประโยคที่เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น เรียกประโยคเหล่านั้นว่า **ประพจน์** (proposition) **หรือข้อความ** (statement) ในตำราเล่มนี้เราจะใช้คำว่าประพจน์ซึ่งมีความหมายตามบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.1 **ประพจน์** คือประโยคที่มีค่าความจริง (truth value) เป็นจริง (true) หรือเป็นเท็จ (false) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 1.2.2 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่

1. พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
2. เขาเป็นคนอังกฤษ
3. กรุณา เปิดหน้าต่างให้ฉันหน่อย
4. คุณมาทำอะไรที่นี้
5. จังหวัดเลยไม่อยู่ในภาคเหนือของประเทศไทย
6. คุณพระช่วย !
7. พี่ต้องพาฉันไปดูหนังนะ
8. $x > 1$
9. $2 \neq 1$
10. จำนวนเฉพาะทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่

บทนิยาม 1.2.3 **ประโยคเปิด** (open sentence) คือประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร และเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ แล้วประโยคนั้นจะเป็นประพจน์

ในทางตรรกศาสตร์ **ตัวเชื่อมประพจน์** (connective) มี 4 ชนิดคือ

1. และ
2. หรือ
3. ถ้า...แล้ว
4. ก็ต่อเมื่อ

บทนิยาม 1.2.4 ให้ p, q เป็นประพจน์ แล้ว

1. **ข้อความร่วม** (conjunction) ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$$p \wedge q \quad \text{อ่านว่า} \quad p \ \textbf{และ} \ q$$

2. **ข้อความเลือก** (disjuction) ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$$p \vee q \quad \text{อ่านว่า} \quad p \ \textbf{หรือ} \ q$$

3. **ข้อความแบบเงื่อนไข** (conditional statement/implication) ของ p และ q

$$p \rightarrow q \quad \text{อ่านว่า} \quad \textbf{ถ้า} \ p \ \textbf{แล้ว} \ q$$

   เรียก p ว่า **เหตุ** (hypothesis) และเรียก q ว่า **ผล** (conclusion)

4. **ข้อความแบบผันกลับได้** (biconditional statement) ของ p และ q

$$p \leftrightarrow q \quad \text{อ่านว่า} \quad p \ \textbf{ก็ต่อเมื่อ} \ q$$

จะมีค่าความจริงในแต่ละกรณีตามตารางดังต่อไปนี้ซึ่งเรียกว่า **ตารางค่าความจริง** (truth table) เมื่อ p และ q เป็นประพจน์ และ T แทนค่าความจริงเป็นจริง F แทนค่าความจริงเป็นเท็จ

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	F
F	T	F	T	F	F
F	F	F	F	T	T

ตัวอย่าง 1.2.5 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. อังกฤษเป็นประเทศในทวีปยุโรปและไทยเป็นประเทศในอาเซียน
2. 2 เป็นจำนวนคู่ และ 1.2 เป็นจำนวนนับ
3. ประเทศไทยติดกับประเทศลาวหรือญี่ปุ่นเป็นประเทศในอาเซียน
4. $8 < 8$ หรือ $8 = 8$
5. ถ้า iPhone เป็นโทรศัพท์ แล้วนิวตันเป็นคนอังกฤษ
6. ถ้า $9 \cdot 0 = 9$ แล้วเชียงใหม่อยู่ภาคใต้ของประเทศไทย
7. สุนัขมีเขา ก็ต่อเมื่อ $1 + 1 = 2$
8. $2^{-2} = 1$ ก็ต่อเมื่อ $3 > 7$
9. $1 = 1$ ก็ต่อเมื่อ นกขมิ้นบินไม่ได้

จากบทนิยามของตัวเชื่อมทั้ง 3 ตัวจะได้ข้อสังเกตดังต่อไปนี้ เมื่อให้ p เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว

1. $F \wedge p$ มีค่าความจริงเป็น
2. $T \vee p$ มีค่าความจริงเป็น
3. $F \to p$ มีค่าความจริงเป็น
4. $p \to T$ มีค่าความจริงเป็น

ต่อไปจะกล่าวถึง **นิเสธของประพจน์** (negation of proposition) หมายถึงประพจน์มีค่าความจริงตรงกันข้ามกับประพจน์นั้น ดังนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.6 ให้ p เป็นประพจน์ แล้ว **นิเสธของประพจน์** ของ p เขียนแทนด้วย

$\sim p$ อ่านว่า **นิเสธ** p (not p)

จะมีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตัวอย่าง 1.2.7 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. อังกฤษเป็นประเทศในทวีปเอเชีย นิเสธคือ
2. $\varnothing$ เป็นเซตอนันต์ นิเสธคือ

ในทางตรรกศาสตร์ถ้าประพจน์มีการใช้ตัวเชื่อมหลายๆตัวอาจจะเกิดความสับสนของการพิจารณาค่าความจริง ดังนั้นเพื่อความสะดวกเราจึงนิยมกำหนดลำดับของตัวเชื่อมประพจน์จากน้อยไปหามากดังนี้

1. $\sim$
2. $\wedge,\ \vee$ (กรณีมีทั้งสองตัวเชื่อมต้องใส่วงเล็บคั่น)
3. $\to$
4. $\leftrightarrow$

เช่นถ้าเขียน $\sim p \wedge q \leftrightarrow r \to \sim p$ จะหมายถึง $[(\sim p) \wedge q] \leftrightarrow [r \to (\sim p)]$ ในกรณีที่พบตัวเชื่อม $\wedge,\ \vee$ ผู้เขียนมักต้องใส่วงเล็บเสมอเพื่อหลีกเลี่ยงการตีความหมายผิดไป เช่น $(p \vee q) \wedge r$ แต่จะไม่เขียน $p \vee q \wedge r$ เนื่องจาก $\sim$ เป็นตัวเชื่อมสำคัญอับดับแรกเรามักจะละวงเล็บในการเขียนเช่น $\sim p \to \sim q$ แทนประพจน์ $(\sim p) \to (\sim q)$

ต่อไปเราจะกล่าวถึงการสร้างตารางค่าความจริงเพื่อแสดงค่าความจริงทั้งหมดของประพจน์ต่างๆที่กำหนดให้ เริ่มต้นจากการนับจำนวนประพจน์ย่อย ๆ ทั้งหมด โดยใช้กฎการนับจะแสดงจำนวนดังตารางต่อไปนี้ เมื่อให้ n เป็นจำนวนนับ

จำนวนประพจน์ย่อย	1	2	3	4	5	6	7	...	n
จำนวนกรณี	2	4	8	16	32	64	128	...	2^n

ตัวอย่าง 1.2.8 จะเห็นได้ว่าประพจน์ $(p \to r) \vee (p \leftrightarrow q)$ มีประพจน์ย่อย 3 ประพจน์ ทำให้สร้างตารางค่าความจริงได้หมด 8 กรณี ดังนี้

p	q	r	$p \to r$	$p \leftrightarrow q$	$(p \to r) \vee (p \leftrightarrow q)$
T	T	T			
T	T	F			
T	F	T			
T	F	F			
F	T	T			
F	T	F			
F	F	T			
F	F	F			

สมมูลของประพจน์

สองประพจน์มีความหมายเดียวกันในทางตรรกศาสตร์หรือ **สมมูลกันเชิงตรรศาสตร์** (logically equivalent) ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.9 ประพจน์ P **สมมูล** (equivalence) กับ Q เขียนแทนด้วย $P \equiv Q$ ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันทุก ๆ กรณี

ตัวอย่าง 1.2.10 เราแสดงได้ว่าประพจน์ $p \to q$ สมมูลกับ $\sim q \to \sim p$ โดยสร้างตารางค่าความจริง

p	q	$p \to q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \to \sim p$
T	T				
T	F				
F	T				
F	F				

ตัวอย่าง 1.2.11 จงตรวจสอบว่าประพจน์ $p \vee q$ และ $\sim p \to q$ สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

p	q	$\sim q$	$p \vee q$	$\sim p \to q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

ทฤษฎีบท 1.2.12 ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ

1. กฎนิจพล (Idempotent law)

   (E1) $p \wedge p \equiv p$

   (E2) $p \vee q \equiv p$

2. กฎการสลับที่ (Commutative law)

   (E3) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

   (E4) $p \vee q \equiv q \vee p$

3. กฎการจัดกลุ่ม (Associative law)

   (E5) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

   (E6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

4. กฎการแจกแจง (Distributive law)

   (E7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

   (E8) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5. กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's law)

   (E9) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

   (E10) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

6. กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)

   (E11) $\sim (\sim p) \equiv p$

ทฤษฎีบท 1.2.13 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว

(E12) $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

(E13) $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ กฎแย้งสลับที่ (contrapositive law)

(E14) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p) \equiv (q \leftrightarrow p)$

(E15) $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

(E16) $p \leftrightarrow q \equiv (\sim q \rightarrow \sim p) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$

(E17) $p \rightarrow (q \wedge r) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r)$

(E18) $p \rightarrow (q \vee r) \equiv (p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)$

(E19) $(p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$

(E20) $(p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

ทฤษฎีบท 1.2.14 ให้ p และ q เป็นประพจน์ใด ๆ แล้ว

1. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3. $\sim (p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
4. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

ตัวอย่าง 1.2.15 จงนิเสธของข้อความต่อไปนี้

1. ธาตุอยู่ในสถานะของเหลวและไม่มีสี

2. แสงเป็นคลื่นหรืออนุภาค

3. ถ้านายแดงกินผักแล้วนายแดงจะไม่เป็นหวัด

สัจนิรันดร์ (tautology)

เราอาจจะพบว่าประพจน์บางประพจน์มีค่าความจริงเป็นจริงเพียงอย่างเดียวเพราะรูปแบบของประพจน์นั้น เรียกประพจน์ลักษณะแบบนี้ว่า **สัจนิรันดร์** (tautology)

บทนิยาม 1.2.16 ประพจน์ที่มีรูปแบบที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอเราจะเรียกว่า **สัจนิรันดร์** และเรียกนิเสธของสัจนิรันดร์ว่า **ข้อความขัดแย้ง** (contradiction)

ตัวอย่าง 1.2.17 จงแสดงว่าประพจน์ $p \to (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
T	T		
T	F		
F	T		
F	F		

ตัวอย่าง 1.2.18 จงแสดงว่าประพจน์ $p \wedge \sim p$ เป็นข้อความขัดแย้ง

p	$\sim p$	$p \wedge \sim q$
T	F	
F	T	

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifiers)

ให้ p แทนประพจน์ $x > 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

x	$p:\ x > 2$	ค่าความจริง
1	$1 > 2$	
2	$2 > 2$	
3	$3 > 2$	
4	$4 > 2$	

จากตารางจะเห็นได้ว่าค่าความจริงของประพจน์ p เปลี่ยนไปตามค่า x เราใช้ $p(x)$ แทนประพจน์ p และเซต $\{1, 2, 3, 4\}$ เรียกว่า**เอกภพสัมพัทธ์** (universe) นิยมเขียนแทนด้วย $\mathcal{U}$ ถ้าเรากล่าวว่า

"มี x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$"

ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงเพราะว่ามี $x = 3$ ซึ่งทำให้ $p(3)$ มีค่าความจริงเป็นจริง เราจะเขียนแทนคำว่า "มี" ด้วย $\exists$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ ในทำนองเดียวกันถ้าเรากล่าวว่า

"ทุกๆ x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$"

ประพจน์นี้จะมีค่าความขริงเป็นเท็จเพราะว่ามี $x = 1$ ที่ทำให้ $p(1)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เราจะเขียนแทนคำว่า "ทุกๆ" ด้วย $\forall$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ เราเรียก 2 สัญลักษณ์ว่า **ตัวบ่งปริมาณ** (quantifier) และเรียกวิธีการนี้ว่า **วิธีบ่งปริมาณ** (quantification) ซึ่งมีได้ 2 แบบ ตามนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.19 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

แบบที่ 1 นำหน้าฟังก์ชันข้อความด้วยวลีบ่งปริมาณ

ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$

สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\forall x \in \mathcal{U}\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$$

เรียก $\forall$ ว่า**ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด** (universal quantifier)

แบบที่ 2 นำหน้าฟังก์ชันข้อความด้วยวลีบ่งปริมาณ

มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า

มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\exists x \in \mathcal{U}\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$$

เรียก $\exists$ ว่า**ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง** (existential quantifier) เรียกสั้นๆว่า **มี**

ตัวอย่าง 1.2.20 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 = x$ คำตอบคือ
2. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะได้ว่า $x > 0$ คำตอบคือ
3. จำนวนจริงทุกจำนวนมีค่าเป็นลบเสมอ คำตอบคือ
4. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่าเป็นลบ คำตอบคือ

ตัวอย่าง 1.2.21 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปข้อเขียน

1. $\forall n \in \mathbb{N},\, n > 1$
2. $\exists x \in \mathbb{Z},\, (x \neq 1) \to (x^2 > 1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\, (x < 1) \leftrightarrow (x^2 < x)$

บทนิยาม 1.2.22 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

- ข้อความ $\forall x \in \mathcal{U},\, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

  ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ $p(x)$ มีค่าความเป็น**จริง** นอกนั้นข้อความนี้เป็น**เท็จ**

- ข้อความ $\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

  มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็น**จริง** นอกนั้นข้อความนี้เป็น**เท็จ**

ตัวอย่าง 1.2.23 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของ

$\forall x \in \mathcal{U},\, x > 0$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1	$1 > 0$	
2	$2 > 0$	
3	$3 > 0$	
4	$4 > 0$	

$\exists x \in \mathcal{U},\, x < 2$

x	ข้อความ $x < 2$	ค่าความจริง
1	$1 < 2$	
2	$2 < 2$	
3	$3 < 2$	
4	$4 < 2$	

หลายครั้งที่เราพบประพจน์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเช่น "มีจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งซึ่งบวกกับทุกจำนวนเต็มแล้วเท่ากับศูนย์" เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z},\ x+y=0$$

ประพจน์ลักษณะนี้เรากล่าวได้ว่ามีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

ตัวอย่าง 1.2.24 จงแปลงประพจน์ต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y ซึ่ง $x+y=0$

2. สำหรับจำนวนนับ n และ m จะได้ว่า $n+m>1$

3. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x=y+1$ ทุกๆจำนวนเต็ม y

การตรวจสอบค่าความจริงประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัวขึ้นไปค่อนข้างซับซ้อนถ้าเอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตที่มีขนาดใหญ่ จึงขอยกตัวอย่างเอกภพสัมพัทธ์ที่มีสมาชิกไม่มากเพื่อความเข้าใจดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.25 ให้ $\mathcal{U}=\{-1,0,1\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความ $x+y=0$ โดยสร้างแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

x	y	$x+y=0$	ค่าความจริง
-1	-1	$-1+(-1)=0$	
	0	$-1+0=0$	
	1	$-1+1=0$	
0	-1	$0+(-1)=0$	
	0	$0+0=0$	
	1	$0+1=0$	
1	-1	$1+(-1)=0$	
	0	$1+0=0$	
	1	$1+1=0$	

ต่อมาเราจะกล่าวถึงการหานิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เช่น "ไม่มีจำนวนเต็ม x ใดเลยที่สอดคล้อง $x^2+x+1=0$" เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\sim \exists x \in \mathbb{Z},\, x^2+x+1=0$$

หมายถึง "ทุกจำนวนเต็ม x จะสอดคล้อง $x^2+x+1\neq 0$" เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in \mathbb{Z},\, x^2+x+1\neq 0$$

สรุปได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.2.26 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

- นิสเธของ $\forall x \in \mathcal{U},\, p(x)$ คือ $\sim \forall x \in \mathcal{U},\, p(x) \equiv \exists x \in \mathcal{U},\, \sim p(x)$
- นิสเธของ $\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)$ คือ $\sim \exists x \in \mathcal{U},\, p(x) \equiv \forall x \in \mathcal{U},\, \sim p(x)$

ตัวอย่าง 1.2.27 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\forall x \in \mathbb{R}\,, x = x+0$

2. $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z},\, xy>0 \rightarrow x+y>0$

ตัวอย่าง 1.2.28 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x>0$ แล้ว $x^2>0$

2. มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $xy=1$

ตัวอย่าง 1.2.29 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x \in \mathcal{U},\, p(x) \rightarrow q(x)$ นิเสธคือ

2. $\forall x \in \mathcal{U},\, p(x) \vee q(x)$ นิเสธคือ

3. $\exists x \in \mathcal{U}\, \forall y \in \mathcal{U},\, \sim p(x,y) \rightarrow q(x,y)$ นิเสธคือ

การให้เหตุผล (Reasoning)

การให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ที่สำคัญแบ่งออกเป็น 2 วิธีได้แก่

1. การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning)
2. การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning)

การให้เหตุผลแบบอุปนัย (Inductive Reasoning) คือวิธีการสรุปผลมาจากการค้นหาความจริงจากการสังเกตหรือการทดลองหลายครั้งจากกรณีย่อยๆ แล้วนำมาสรุปเป็นความรู้แบบทั่วไป
หมายเหตุ: การหาข้อสรุปหรือความจริงโดยใช้วิธีการให้เหตุผลแบบอุปนัยนั้น ไม่จำเป็นต้องถูกต้องทุกครั้ง เนื่องจากการให้เหตุผลแบบอุปนัยเป็นการสรุปผลเกิดจากหลักฐานข้อเท็จจริงที่มีอยู่ ดังนั้นข้อสรุปจะเชื่อถือได้มากน้อยเพียงใดนั้นขึ้นอยู่กับลักษณะของข้อมูล หลักฐานและข้อเท็จจริงที่นำมาอ้าง

ตัวอย่าง 1.2.30 จงใช้การเหตุผลแบบอุปนัย เพื่อหาคำตอบหรือสมการจากรูปแบบต่อไปนี้

1.

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} 9\times 9 &= 81 \\ 99\times 9 &= 891 \\ 999\times 9 &= 8991 \\ 9999\times 9 &= \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 1.2.31 จงใช้การเหตุผลแบบอุปนัย เพื่อหาคำตอบในรูปทั่วไปจากรูปแบบที่กำหนดต่อไปนี้ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ \vdots &= \vdots \\ 1+3+5+...+(2n-1) &= \end{aligned}$$

การให้เหตุผลแบบนิรนัย (Deductive Reasoning) คือการให้เหตุผลแบบนิรนัยเป็นการนำความรู้พื้นฐานซึ่งอาจเป็นความเชื่อ ข้อตกลง กฎ หรือบทนิยาม ซึ่งเป็นสิ่งที่รู้มาก่อน และยอมรับว่าเป็นความจริงเพื่อหาเหตุผลนำไปสู่ข้อสรุป เป็นการอ้างเหตุผลที่มีข้อสรุปตามเนื้อหาสาระที่อยู่ภายในขอบเขตของข้ออ้างที่กำหนด

ตัวอย่าง 1.2.32 จงหาข้อสรุปของการให้เหตุผลแบบนิรนัยต่อไปนี้

1. **เหตุ** (1) จำนวนเต็มที่ 2 หารลงตัวเป็นจำนวนคู่
   (2) 10 เป็นจำนวนเต็มที่ 2 หารลงตัว

   ผล

2. **เหตุ** (1) ดาราทุกคนหน้าตาดี
   (2) ณเดช เป็นดาราคนหนึ่ง

   ผล

สมเหตุสมผลโดยแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์

แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ที่ใช้แทนข้อความที่กำหนด

ตัวอย่าง 1.2.33 จงเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ที่ใช้แทนข้อความต่อไปนี้

1. (1) มีสัตว์ปีกบางตัวเป็นสัตว์น้ำ
   (2) มีสัตว์น้ำบางตัวเป็นสัตว์เลี้ยง
   (3) ไม่มีสัตว์น้ำที่เป็นสัตว์ปีก

2. (1) นักเรียนทุกคนเป็นคนขยัน
   (2) มีนักเรียนสอบได้เกรด A
   (3) นักเรียนทุกคนที่สอบได้เกรด A เป็นคนขยัน

นิยมใช้แผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ โดยเขียนแผนภาพแทนข้อความที่กำหนดให้
ถ้าทุกกรณีของแผนภาพแสดงตามที่กำหนด จะได้ว่าการสรุปผลนั้น**สมเหตุสมผล** (Valid)
ถ้ามีแผนภาพบางกรณีไม่สอดคล้องกับผลที่สรุป จะได้ว่าการสรุปผลนั้น**ไม่สมเหตุสมผล** (Invalid)

ตัวอย่าง 1.2.34 จงตรวจสอบการให้เหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

1. **เหตุ** (1) สัตว์เลี้ยงทุกตัวเป็นสัตว์ไม่ดุร้าย
   (2) แมวเป็นสัตว์เลี้ยง
   ผล แมวเป็นสัตว์ไม่ดุร้าย

2. **เหตุ** (1) เรือทุกลำลอยน้ำได้
   (2) ถังลอยน้ำได้
   ผล ถังเป็นเรือ

3. **เหตุ** (1) ชาวสวนทุกคนเป็นคนขยัน
   (2) คนขยันทุกคนเป็นคนรวย
   ผล คนขยันเป็นชาวสวน

4. **เหตุ** (1) ไม่มีนักการเมืองคนใดเป็นสุจริต
   (2) ข้าราชการทุกคนเป็นคนสุจริต
   (3) มานีเป็นข้าราชการ
   ผล มานีไม่เป็นนักการเมือง

แบบฝึกหัด 1.2

1. พิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็น (ก) ประพจน์ (ข) ประโยคเปิด หรือไม่เป็นทั้งสองอย่างนี้

   1.1 ห้ามเดินลัดสนาม

   1.2 ปีนี้เป็นปีระกา

   1.3 น่านเป็นจังหวัดในภาคใต้

   1.4 มีจำนวนนับที่น้อยกว่า 1

   1.5 ใครเป็นคนนัดพวกเราที่สยามพารากอน

   1.6 รถไฟมีสองหัว

2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   2.1 ถ้า $2^0 = 0^2$ แล้ว $2 = 0$

   2.2 ปูม้าไม่มีขาก็ต่อเมื่อลิงไม่มีหู

   2.3 จำนวนนับเป็นจำนวนเต็มหรือตรรกยะ

   2.4 ถ้าช้างเป็นสัตว์ปีกแล้วช้างเป็นตั๊กแตน

3. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   3.1 $(p \to \sim q) \vee (q \to p)$

   3.2 $p \wedge (\sim q \to r) \leftrightarrow (r \vee q)$

   3.3 $\sim [\sim p \wedge (q \to \sim r)] \to (p \wedge \sim r)$

   3.4 $\sim p \wedge (q \vee r) \to (p \to r \wedge s)$

4. ให้ประพจน์ p, q, r, s มีค่าความจริงเป็น T, F, F, T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

   4.1 $p \to (q \vee \sim (p \wedge r))$

   4.2 $\sim [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (q \to \sim r)] \to \sim s$

   4.3 $\sim (r \wedge \sim s) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$

5. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ จงตรวจสอบว่าสมมูลของประพจน์ต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าความจริง

   5.1 q และ $\sim p \vee (p \wedge q)$

   5.2 $\sim p \to q$ และ $\sim q \to p$

   5.3 $(p \vee r) \to q$ และ $p \to (q \vee r)$

   5.4 $p \leftrightarrow (q \vee r)$ และ $(p \vee r) \leftrightarrow q$

6. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกัน ถ้าสมมูลกันจงแสดงโดยใช้ทฤษฎีบท ถ้าไม่สมมูลจงยกตัวอย่างค้าน

   6.1 $\sim (p \to \sim q)$ และ $p \wedge (p \to q)$

   6.2 $p \to (q \leftrightarrow r)$ และ $(p \to q) \leftrightarrow r$

   6.3 $p \wedge (q \vee r)$ และ $(p \wedge q) \vee r$

   6.4 $p \leftrightarrow \sim q$ และ $\sim p \leftrightarrow q$

   6.5 $p \to (q \vee r)$ และ $\sim (\sim r \to q) \to \sim p$

   6.6 $\sim (p \wedge \sim q)$ และ $\sim q \to \sim p$

   6.7 $\sim p \to q$ และ $(\sim p \to q) \wedge (q \to \sim p)$

   6.8 $p \to (q \to r)$ และ $(p \to q) \to r$

7. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

   7.1 ถ้าแดงไปโรงเรียน แล้วดำจะไม่ทำการบ้าน

   7.2 $x+1=3$ หรือ π เป็นจำนวนตรรกยะ

   7.3 ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนเฉพาะ

   7.4 $ab=0$ ก็ต่อเมื่อ $a=0$ หรือ $b=0$

   7.5 ถ้า $xy>0$ แล้ว ($x>0$ และ $y>0$) หรือ ($x<0$ และ $y<0$)

   7.6 $x+y=0$ ก็ต่อเมื่อ $x=-y$ หรือ $y=-x$

8. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์โดยใช้ตารางค่าความจริง

   8.1 $(p\vee q)\vee\sim(p\wedge q)$

   8.2 $(p\rightarrow\sim q)\rightarrow(p\wedge q)$

   8.3 $(\sim p\rightarrow\sim q)\vee(p\leftrightarrow q)$

   8.4 $(\sim p\rightarrow q)\leftrightarrow\sim(p\vee q)$

9. จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

   9.1 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามจะได้ $x^2>0$

   9.2 จำนวนนับทุกจำนวนมีค่ามากกว่า 1

   9.3 ไม่มีจำนวนตรรกยะใดเลยที่เป็นจำนวนบวก

   9.4 มีจำนวนจริง x และ y ซึ่ง $x+y>0$

   9.5 มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m>n$ ทุกๆจำนวนเต็ม n

10. ให้ $A=\{-1,0,1\}$, $B=\{-2,-1,0,1,2\}$ และ $C=\{1,2,3,4\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความ

    10.1 $\forall x\in A\;[\,x+1\geq x\,]$

    10.2 $\exists x\in C\;[\,x(x+1)=x\,]$

    10.3 $\forall x\in B\;[\,x>0\rightarrow x^2>x\,]$

    10.4 $\forall x\in A\,\forall y\in A\;[\,x\neq y\rightarrow x>y\,]$

    10.5 $\forall x\in B\,\exists y\in B\;[\,xy=1\,]$

    10.6 $\exists x\in C\,\exists y\in C\;[\,x+y<xy\,]$

11. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้

    11.1 $\forall x\;[\,\sqrt{x}\geq 0\,]$

    11.2 $\forall x\;[\,x=1\rightarrow |x|>2\,]$

    11.3 $\exists x\;[\,(x<3)\wedge(x>3)\,]$

    11.4 $\forall x\,\forall y\;[\,xy>0\rightarrow \frac{x}{y}>0\,]$

    11.5 $\exists x\,\forall y\;[\,x=y\leftrightarrow x^2=y^2\,]$

    11.6 $\exists x\,\exists y\;[\,(xy=10\wedge x>5)\rightarrow y>2\,]$

12. จงใช้การเหตุผลแบบอุปนัย เพื่อหา a และ b จากรูปแบบที่กำหนดต่อไปนี้

    12.1 $16,28,40,52,a,b$

    12.2 $1,4,9,16,25,a,b$

    12.3 $9,98,987,9876,a,b$

    12.4 $20,19,17,14,a,b$

13. จงใช้การเหตุผลแบบอุปนัย เพื่อหาคำตอบในรูปทั่วไปจากรูปแบบที่กำหนดต่อไปนี้ เมื่อ n เป็นจำนวนนับ

$$\begin{aligned}
1^3 &= 1^2 \\
1^3+2^3 &= (1+2)^2 \\
1^3+2^3+3^3 &= (1+2+3)^2 \\
1^3+2^3+3^3+...+n^3 &=
\end{aligned}$$

14. จงเขียนแผนภาพเวนน์-ออยเลอร์ ที่ใช้แทนข้อความต่อไปนี้

14.1 (1) คนมีความสุขทุกคนมีสุขภาพดี
(2) คนเครียดบางคนมีสุขภาพดี
(3) แดงเป็นคนเครียด

14.2 (1) ไม่มีนักการเมืองคนใดเปนคนมีอุดมคติ
(2) ผู้ที่เสียสละทุกคนเป็นผู้ที่มี่อุดมคติ
(3) ไม่มีนักการเมืองคนใดเสียสละ

14.3 (1) นักกีฬาทุกคนมีสุขภาพดี
(2) คนที่มีสุขภาพดีบางคนเป็นคนดี
(3) น้องนกเป็นนักกีฬาและเป็นคนดี

14.4 (1) นักเรียนทกคนต้องเรียนพลศึกษา
(2) คนที่เรียนพลศึกษาบางคนอ่อนแอ
(3) มีนักเรียนบางคนอ่อนแอ

15. จงตรวจสอบการให้เหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

15.1 **เหตุ** (1) คนที่กินข้าวอิ่มทุกคนชอบหัวเราะ
(2) อ้วนไม่ชอบหัวเราะ
ผล อ้วนยังกินข้าวไม่อิ่ม

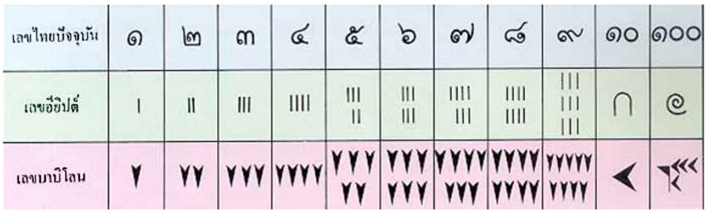
15.2 **เหตุ** (1) นกทุกตัวเป็นสัตว์มีปีก
(2) เป็ดทุกตัวเป็นสัตว์มีปีก
ผล นกทุกตัวเป็นเป็ดชนิดหนึ่ง

15.3 **เหตุ** (1) รถยนต์ทุกคันเป็นรถไฟ
(2) BMW เป็นรถไฟไม่ใช่รถยนต์
(3) รถแทกซี่บางคันเป็นรถไผ
ผล BMW บางคันเป็นรถแท็กซี่

15.4 **เหตุ** (1) นักยิมนาสติกทุกคนอายุไม่เกิน 25 ปี
(2) ดวงเดือนมีอายุ 26 ปี
ผล ดวงเดือนอาจเป็นนักยินนาสติก

1.3 ระบบจำนวน

มนุษย์รู้จักการใช้จำนวนมาตั้งแต่ดึกดำบรรพ์โดยใช้ก้อนหิน เศษไม้ หรือรอยบากบนต้นไม้แทนจำนวนสัตว์เลี้ยง กล่าวได้ว่าจำนวนแรกที่มนุษย์รู้จักคือจำนวนนับ ภายหลังต่อมาจึงเมื่อมีการพัฒนาขึ้นจากการใช้ตัวเลขแทนปริมาณต่างๆ เช่นน้ำหนัก ส่วนสูง อุณหภูมิ เป็นต้น จำนวนที่ใช้แทนสิ่งเหล่านี้ได้เรียกว่า **จำนวนจริง** (Real numbers)



ระบบตัวเลขที่นิยมใช้เป็นสากลในปัจจุบัน

ตัวเลขโรมัน	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	L	C	D	M
ตัวเลขฮินดูอารบิก	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	50	100	500	$1,000$

จำนวนธรรมชาติ (Natural numbers) หรือจำนวนนับหรือจำนวนเต็มบวก เป็นจำนวนแรกที่มนุษย์นำมาใช้ประโยชน์ในการบอกปริมาณของสิ่งๆหนึ่งเช่น จำนวนสัตว์เลี้ยง จำนวนต้นไม้ เป็นต้น จำนวนนับประกอบด้วย $1, 2, 3, 4, ...$ และใช้สัญญาลักษณ์ $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

ตัวอย่าง 1.3.1 จงพิจารณา ✓ หรือ $\times$ ของข้อความต่อไปนี้

1. ☐ จำนวนนับที่น้อยที่สุดคือ 0
2. ☐ ถ้า a เป็นจำนวนนับใดๆ แล้วเราสามารถหาจำนวนนับที่น้อยกว่า a ได้เสมอ
3. ☐ เซตของจำนวนนับมีสมบัติปิดภายใต้การลบ
4. ☐ เซตของจำนวนนับมีสมบัติปิดภายใต้การบวก
5. ☐ เซตของจำนวนนับมีสมบัติปิดภายใต้การคูณ

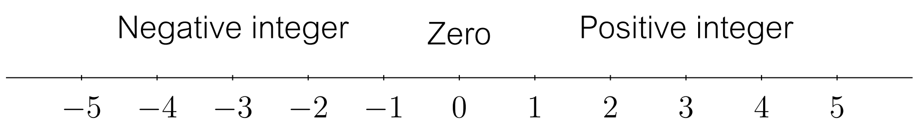
จำนวนเต็ม (Integers) คือจำนวนนับรวมไปถึงจำนวนตรงข้ามของจำนวนนับและรวมถึงศูนย์ด้วย ดังนั้นจำนวนเต็มประกอบไปด้วย $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...$ เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}$ (มาจากภาษาเยอรมัน คือ Zahlen)

$$\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ..\}$$

จำนวนเต็มแบ่งออกเป็น 3 ชนิด คือ

- **จำนวนเต็มบวก** (Positive integer) เขียนเซตแทนจำนวนเต็มบวกด้วย $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, ...\}$
- **จำนวนเต็มลบ** (Negative integer) เขียนเซตแทนจำนวนเต็มลบด้วย $\mathbb{Z}^-$; $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, ...\}$
- **จำนวนเต็มศูนย์** (Zero) คือจำนวน 0

ดังนั้น $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$



บทนิยาม 1.3.2 ชนิดของจำนวนเต็มแบบอื่นๆที่ควรทราบ

- **จำนวนคู่** (Even number) คือจำนวนเต็มที่สองหารลงตัว
- **จำนวนคี่** (Odd number) คือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนคู่
- **จำนวนเฉพาะ** (Prime) คือจำนวนเต็มที่มากกว่า 1 ที่มี 1 และตัวมันเองเท่านั้นที่หารมันลงตัว

ตัวอย่าง 1.3.3 จงพิจารณา ✓ หรือ $\times$ ของข้อความต่อไปนี้

1. ☐ มีจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด
2. ☐ มีจำนวนเฉพาะที่เป็นจำนวนคู่
3. ☐ จำนวนเต็มมีสมบัติภายใต้การบวก และการคูณ
4. ☐ จำนวนเต็มมีสมบัติภายใต้การลบ
5. ☐ ถ้า a ไม่เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a ต้องเป็นจำนวนเต็มคี่
6. ☐ ถ้า a ไม่เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว a ต้องเป็นจำนวนเต็มลบ
7. ☐ จำนวนนับทุกจำนวนเป็นจำนวนเต็ม และจำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนนับ
8. ☐ มีจำนวนเต็ม a เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $\frac{1}{a}$ เป็นจำนวนเต็ม

ในสมัยแรกๆที่มนุษย์ดำรงชีวิตอยู่กันเป็นกลุ่ม มีการออกไปล่าสัตว์เก็บของป่ามาเพื่อดำรงชีวิต จึงเริ่มพัฒนาการใช้จำนวนที่เกิดจากการแบ่งสิ่งของออกเป็นส่วนๆให้เท่าๆกัน จึงทำให้เกิด**จำนวนอัตราส่วนหรือจำนวนตรรกยะ** (Rational number) จำนวนที่แบ่งกันลงตัวก็ไม่มีเศษ จำนวนที่แบ่งกันไม่ลงตัวก็จะมีเศษเกิดขึ้น

บทนิยาม 1.3.4 จำนวนตรรกยะคือจำนวนที่เขียนในรูปอัตราส่วนของจำนวนเต็มส่วนจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ได้ เซตของจำนวนตรรกยะเขียนแทนด้วย $\mathbb{Q}$ (มาจากคำว่า Quotient)

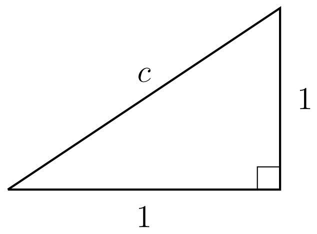
$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

ข้อสังเกต จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนตรรกยะ นั่นคือ $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$

ตัวอย่าง 1.3.5 จงพิจารณา ✓ หรือ $\times$ ของข้อความต่อไปนี้

1. ☐ มีจำนวนตรรกยะที่อยู่ระหว่าง 0.12 และ 0.13
2. ☐ จำนวนตรรกยะมีสมบัติภายใต้การบวกและการคูณ
3. ☐ ถ้า $\frac{a}{b}$ เป็นจำนวนเต็มตรรกยะ แล้ว $\frac{b}{a}$ เป็นจำนวนตรรกยะ
4. ☐ $1.3333...$ เป็นจำนวนตรรรกยะ
5. ☐ $5.9999...$ เป็นจำนวนตรรรกยะที่เป็นจำนวนเต็ม

สมัยพีทาโกรัสมีความเชื่อที่ว่าทุก ๆ อย่างเกิดจากจำนวน (จำนวนเต็ม) แต่มีข้อสังเกตในทฤษฎีพีทาโกรัส (Pythagoras' theorem) ที่บอกความสัมพันธ์ของด้านสามเหลี่ยมมุมฉาก $c^2 = a^2 + b^2$ เมื่อด้านประกอบมุมฉากเป็น 1 และ 1 แล้วจะได้ว่า $c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ พีทาโกรัสยังไม่สามารถอธิบายได้ว่าความยาวด้านตรงข้ามมุมฉากเขียนในรูปจำนวนเต็มได้หรือไม่



ต่อมานักคณิตศาสตร์พยายามหาว่า c คือจำนวนใดกันแน่ซึ่งรู้เพียงค่าประมาณของมันเท่านั้น จึงใช้สัญญาลักษณ์แทนด้วย $c = \sqrt{2}$ แทน $c^2 = 2$ หลังจากนั้นได้พิสูจน์ว่า จำนวนนี้ไม่สามารถเขียนในรูปอัตราส่วนได้ จึงเรียกจำนวนนี้ว่าจำนวน**อตรรกยะ (Irrational number)**

บทนิยาม 1.3.6 จำนวนอตรรกยะคือจำนวนที่ไม่สามารถเขียนในรูปอัตราส่วนได้ หรือจำนวนที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะ เซตของจำนวนอตรรกยะเขียนแทนด้วย $\mathbb{Q}'$ หรือ $\mathbb{Q}^c$

$$\mathbb{Q}^c = \{\, x \mid x \notin \mathbb{Q} \,\}$$

ตัวอย่างจำนวนอตรรกยะ

$\sqrt{2} = 1.414213562...$ $\qquad$ $\pi = 3.14592654...$

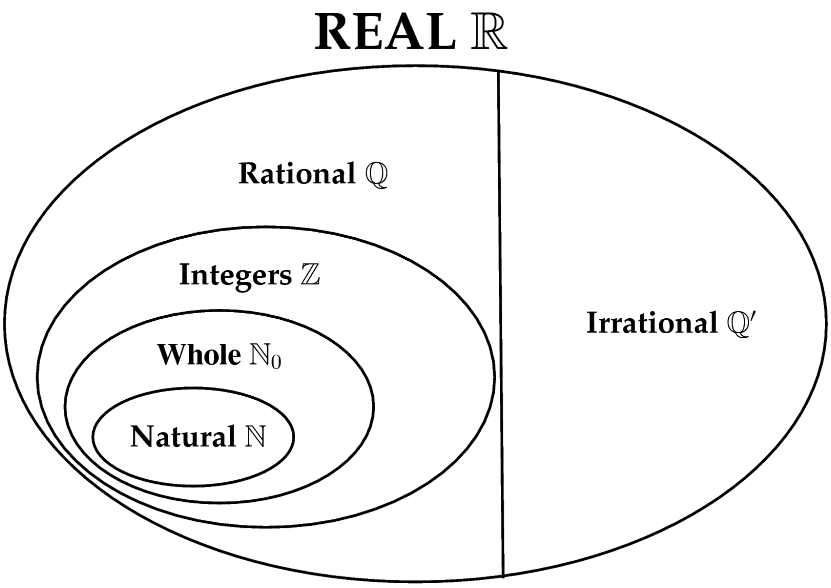
$\sqrt{3} = 1.732050808...$ $\qquad$ $e = 2.718281828...$

ตัวอย่าง 1.3.7 จงพิจารณา ✓ หรือ × ของข้อความต่อไปนี้

1. ☐ มีจำนวนอตรรกยะที่อยู่ระหว่าง 1 และ 2
2. ☐ เซตของจำนวนอตรรกยะที่อยู่ระหว่าง 1 และ 2 เป็นเซตจำกัด
3. ☐ มีจำนวนอตรรกยะที่เป็นจำนวนตรรกยะ
4. ☐ จำนวนอตรรรรกยะมีสมบัติปิดภายใต้การบวก
5. ☐ จำนวนอตรรรรกยะมีสมบัติปิดภายใต้การคูณ
6. ☐ ถ้า a เป็นจำนวนอตรรกยะ แล้ว $\dfrac{1}{a}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

จำนวนจริง (Real number) คือจำนวนที่ประกอบไปด้วยจำนวนตรรกยะหรือจำนวนอตรรกยะ เขียนแทนเซตของจำนวนจริงด้วย $\mathbb{R}$ นั้นคือ

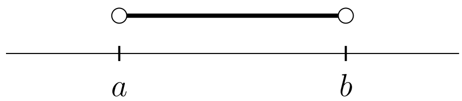
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$



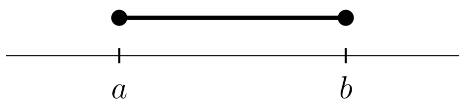
เส้นจำนวน (Real lines)

บทนิยาม 1.3.8 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a < b$ นิยามเซตของช่วงต่างๆดังนี้

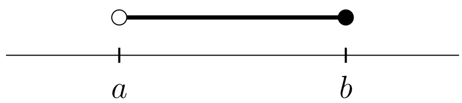
- ช่วงเปิด (Open interval) (a, b) เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$



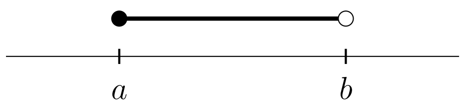
- ช่วงปิด (Closed interval) $[a, b]$ เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x \leq b\}$



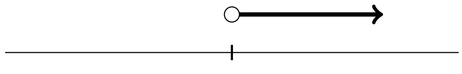
- ช่วงครึ่งเปิดล่าง $(a, b]$ เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \leq b\}$



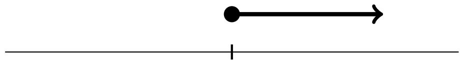
- ช่วงครึ่งเปิดบน $[a, b)$ เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \leq x < b\}$



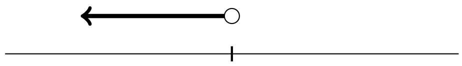
- ช่วงครึ่งอนันต์ (a,∞) เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x > a\}$



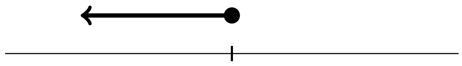
- ช่วงครึ่งอนันต์ $[a,\infty)$ เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geq a\}$



- ช่วงครึ่งอนันต์ $(-\infty,a)$ เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < a\}$



- ช่วงครึ่งอนันต์ $(-\infty,a]$ เขียนแทนเซต $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq a\}$



การดำเนินการบนจำนวนจริง

การดำเนินการบนจำนวนจริง คือดำเนินการระหว่างสองจำนวนเรียกว่า การดำเนินการทวิภาค (Binary operation) การดำเนินการพื้นฐานที่เกิดขึ้นโดยธรรมชาติคือ

- **การบวก** (Addition) คือการรวมกัน
- **การลบ** (Subtraction) คือการหักออก
- **การคูณ** (Multiplication) คือการเพิ่มเป็นจำนวนเท่า
- **การหาร** (Division) คือการแบ่งออกเป็นส่วนๆ

สำหรับจำนวนจริง a, b และ c ใดๆ

สมบัติ	**การบวก**	**การคูณ**
ปิด (Closed)	$a+b \in \mathbb{R}$	$ab \in \mathbb{R}$
สลับที่ (Commutative law)	$a+b=b+a$	$ab=ba$
การจัดกลุ่ม (Associative law)	$a+(b+c)=a+(b+c)$	$a(bc)=a(bc)$
การมีเอกลักษณ์ (Identity)	$0+a=a=0+a$	$1a=a=a1$
การมีตัวผกผัน (Inverse)	$a+(-a)=0=(-a)+a$	$a(a^{-1})=1=(a^{-1})a,\, a \neq 0$
การแจกแจง (Distributive law)	$a(b+c)=ab+ac$	

สมบัติเบื้องต้นของการเท่ากัน ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง แล้ว

1. สมบัติสะท้อน (Reflective law) $a = a$
2. สมบัติสมมาตร (Symmetric law) ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$
3. สมบัติถ่ายทอด (Transitive law) ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$

กฎไตรวิภาค (Trichotomy law) คือสัจพจน์ที่กล่าวว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

$$a = b \quad \text{หรือ} \quad a < b \quad \text{หรือ} \quad a > b \quad \text{อย่างใดอย่างหนึ่ง}$$

ทฤษฎีบท 1.3.9 สำหรับจำนวนจริง a, b และ c

1. ถ้า $a = b$ แล้ว $a + c = b + c$
2. ถ้า $a + c = b + c$ แล้ว $a = b$
3. ถ้า $a = b$ แล้ว $ac = bc$
4. ถ้า $ac = bc$ และ $c \neq 0$ แล้ว $a = b$
5. $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$
6. $a^2 + b^2 = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ และ $b = 0$

ทฤษฎีบท 1.3.10 ให้ $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ แล้ว

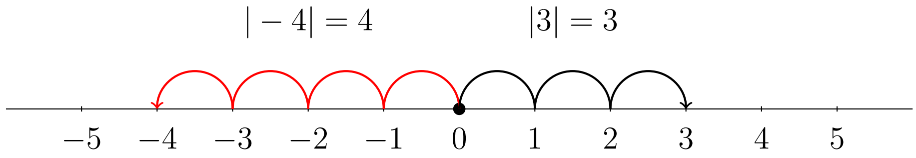
1. ถ้า $a > b$ แล้ว $a + c > b + c$
2. ถ้า $a > b$ และ $b > c$ แล้ว $a > c$
3. ถ้า $a > b$ และ $x > y$ แล้ว $a + x > b + y$
4. ถ้า $a > b$ และ $x > 0$ แล้ว $ax > bx$
5. ถ้า $a > b$ และ $x < 0$ แล้ว $ax < bx$

ตัวอย่าง 1.3.11 ให้ $a, b \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า

1. ถ้า $0 < a < 1$ แล้ว $a^2 < a$
2. ถ้า $0 < a < b$ แล้ว $a^2 < b^2$

ตัวอย่าง 1.3.12 จงแจกแจงสมาชิกของเซต $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 0\}$

ค่าสัมบูรณ์ (Absolute value) ของจำนวนจริง x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือระยะทางจาก x ไปยัง 0



บทนิยาม 1.3.13 ให้ x เป็นจำนวนจริงใด **ค่าสัมบูรณ์** ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ คือจำนวนจริงที่กำหนดโดย

$$|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$

ข้อสังเกต สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ จะได้ว่า

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$
3. $|x| = |-x|$
4. $|x^2| = |x|^2 = x^2$

ตัวอย่าง 1.3.14 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $|2 - \sqrt{2}| + |1 - \sqrt{2}|$
2. $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2}$

ตัวอย่าง 1.3.15 จงแจกแจงสมาชิกของเซต $\{(x, y) \mid |x - y| + |x + y - 2| = 0\}$

ทฤษฎีบท 1.3.16 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ จะได้ว่า

1. $|xy| = |x||y|$
2. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ เมื่อ $y \neq 0$
3. $\sqrt{x^2} = |x|$
4. $x \leq |x|$

ตัวอย่าง 1.3.17 จงหาคำตอบของสมการ

1. $|x| = 1$
2. $|x| + |2x| - 2|x| + |-2x| = 6$
3. $|x-1| = 1$
4. $|x-1| = -1$
5. $\sqrt{x^2} = x$
6. $|x^2 - 1| = 0$

ทฤษฎีบท 1.3.18 อสมการสามเหลี่ยม (Triangle inequality)
ให้ x และ y เป็นจำนวนจริงใด ๆ แล้ว

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

ทฤษฎีบท 1.3.19 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ a เป็นจำนวนจริงบวก จะได้ว่า

1. $|x| \leq a$ ก็ต่อเมื่อ $-a \leq x \leq a$
2. $|x| \geq a$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq -a$ หรือ $x \geq a$

ตัวอย่าง 1.3.20 จงหาคำตอบของสมการ

1. $|x-1| < 1$
2. $|2x-1| \geq 5$
3. $|x-1| > -1$
4. $|x-1| > 0$
5. $|x-1| < 0$
6. $|x-1| \leq 0$

แบบฝึกหัด 1.3

1. กำหนดให้ a, b เป็นจำนวนนับที่มากกว่า 1 ซึ่ง $ab = 143$ จงหาค่าของ $a + b$

2. กำหนดให้ $a, b \in \{1, 2, 3, ..., 20\}$ และ $\sqrt{a^2 + b^2}$ เป็นจำนวนนับ จงหาคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดที่เป็นไปได้

3. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{N}$ ถ้า $A = \{(a, b) \mid a + b \leq 100\}$ จงหาจำนวนมาชิกของเซต A

4. จำนวน $\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + \dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$ เป็นจำนวนนับหรือไม่

5. กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{N}$ ซึ่งสอดคล้องสมการ $ab = 36 + a + b$ จงหาคู่อันดับ (a, b) ทั้งหมดที่เป็นไปได้

6. ทศนิยมตำแหน่งที่ 118 ของทศนิยมซ้ำแบบไม่รู้จบของ

$$0.10200300040000...900000000010200300040000...$$

คือตัวเลขใด

7. ให้ $X = \dfrac{1}{10} + \dfrac{3}{10^2} + \dfrac{5}{10^3} + \dfrac{7}{10^4} + ...$ ถ้า $X = \dfrac{a}{b}$ เมื่อ ห.ร.ม. ของ a และ b เท่ากับ 1 จงหาค่าของ $a + b$

8. จงหาค่าของ $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + ...}}}}$

9. จงหาค่าของ

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}} + ... + \frac{1}{\sqrt{79}+\sqrt{81}}$$

10. กำหนดให้ $A = (-\infty, -1)$, $B = [-3, 2]$ และ $C = (-1, 0) \cup [1, \infty)$ จงหาเซตต่อไปนี้

10.1 $A \cap B$

10.2 $A \cap B^c$

10.3 $A^c \cup B$

10.4 $(A \cup C^c) - B$

10.5 $C - (B - A)$

10.6 $(A - C) \cap (A - B)$

11. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$a + b + c = 4 \quad \text{และ} \quad ab + bc + ac = 3$$

จงหาค่าของ $a^2 + b^2 + c^2$

12. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง

$$abc = 2 \quad \text{และ} \quad ab + bc + ac = 6$$

จงหาค่าของ $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$

13. สำหรับ a และ b เป็นจำนวนจริง ซึ่ง $a+b+c=0$ จงหาค่าของ

$$a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{c}\right)+c\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)$$

14. ให้ a,b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $a^2+ab+b^2>0$

15. ให้ a,b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า ถ้า $a<b$ แล้ว $a^3<b^3$

16. ให้ a,b เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $4(a^3+b^3)\geq(a+b)^3$

17. ให้ a เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า $3(1+a^2+a^4)\geq(1+a+a^2)^2$

18. จงแสดงว่า $x^8-x^5-\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^4}>0$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์

19. จงหาเซตคำตอบของสมการ

19.1 $|x+1|=4$

19.2 $|x^2-20|=5$

19.3 $|x^2-4|=0$

19.4 $|3x-1|=|2x+1|$

19.5 $|1-x|=1-x$

19.6 $|2x+1|=x$

19.7 $(|x|-4)(|x|+3)=-6$

19.8 $|2x-1|-|3-x|=3$

19.9 $|x+1|+|x|+|x-1|=2$

19.10 $||2x-1|-1|=2$

19.11 $||x|-|2x+1||=-x$

19.12 $\dfrac{|5x-1|}{5x-1}+4x=0$

20. จงหาเซตคำตอบของสมการ

20.1 $|x+1|<4$

20.2 $|2x+1|>3$

20.3 $|12x+5|\leq 7$

20.4 $|x+2|\leq 3-|x+1|$

20.5 $|x^2-5x|\geq 5x$

20.6 $(|x|-1)(|x|-3)<0$

20.7 $2x+1<|x|<3x+2$

20.8 $\dfrac{|1+2x|-1}{x-1}<-x$

20.9 $|x-1|>x+|x+1|$

20.10 $|x(x-2)|<x^2-x-2$

20.11 $|x-1||x+3|\geq 5$

20.12 $|x-1|+|x+3|<|x|+1$

21. จงหาจำนวนจริง x ทั้งหมดที่สอดคล้องอสมการต่อไปนี้

21.1 $|x|<x$

21.2 $|x|>x$

21.3 $|x|<-x$

21.4 $|x|>-x$

22. จงหาเซตคำตอบของสมการ $|(2x-1)-(x^2+2x+3)|=|2x-1|+|x^2+2x+3|$

23. จงหาเซตคำตอบของสมการ $||x-1|+1|=||x+1|-1|$

24. จงหา y ที่เป็นจำนวนจริงซึ่ง $y=\dfrac{x|x|-x^2}{x^2-x|x|}$ เมื่อ $x\in\mathbb{R}$

25. จงหาเซตคำตอบของสมการ $(|x|-1)(|x|-3)(|x|+3)(|x|-7)=150$

26. จงหาจำนวนสมาชิกของเซต

$$\{x \mid x=(a+\tfrac{1}{|a|})^2-(|a|-\tfrac{1}{a})^2 \quad \text{เมื่อ } a \text{ เป็นจำนวนจริงซึ่งไม่เท่ากับ } 0\}$$

27. จงหาเซตคำตอบของสมการ $|2-2x|+|x+2|=4-x$

28. กำหนดให้

$$S=\{x\in\mathbb{Z} \mid 2x^2-9x-26\leq 0 \quad \text{และ} \quad |1-2x|\geq 3\}$$

แล้วผลบวกของสมาชิกของ S เท่ากับเท่าใด

29. กำหนดให้

$$A=\left\{x\in\mathbb{Z} \mid \frac{|x-1|-1}{|x-1|}\leq\frac{2}{3}\right\}$$

จงหาจำนวนสมาชิกของ A

30. ถ้าเซตคำตอบของอสมการ

$$|x^2+x-2|<(x+2)$$

คือช่วง (a,b) แล้ว $a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

31. กำหนดให้

$$A=\{x \mid x^2+2x-3<0\} \qquad \text{และ} \qquad B=\{x \mid x+1\geq 2|x|\}$$

ถ้า $A-B=(a,b)$ แล้ว $3|a+b|$ เท่ากับเท่าใด

32. ถ้าช่วง (a,b) เป็นเซตคำตอบของอสมการ

$$|x-1|+|6-3x|<17 \qquad \text{และ} \qquad x>2$$

แล้ว $a+b$ เท่ากับเท่าใด

1.4 พหุนาม

บทนิยาม 1.4.1 พหุนามหนึ่งตัวแปร (x) เมื่อ $n = 0, 1, 2, ...$ อยู่ในรูป

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

เมื่อ $a_0, a_1, a_2, .., a_n$ เป็นจำนวนจริงเรียกว่าสัมประสิทธ์ (Coefficient) และ $a_n \neq 0$ เรียกว่าสัมประสิทธ์ตัวนำ (Leading coefficient) และ n เรียกว่ากำลัง (Degree) เขียนแทน $\deg P(x)$ ถ้า $a_n = 1$ เรียกว่า พหุนามโมนิก (Monic polynomial)

ตัวอย่าง 1.4.2 จงบอกเติมคำตอบให้ถูกต้อง

พหุนาม	ดีกรี (n)	สัมประสิทธิ์ $a_0, a_1, a_2, .., a_n$
$1 + x + x^2 + x^3$		
$x^4 + 2x^2 - 3$		
$x^2 - 1$		

บทนิยาม 1.4.3 (การเท่ากันของพหุนาม) ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม แล้ว $P(x) = Q(x)$ ถ้า $\deg P(x) = \deg Q(x)$ และอยู่ในรูป

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
$$Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_nx^n$$

ซึ่งทุกสัมประสิทธ์เท่ากัน หรือ $a_0 = b_0,\ a_1 = b_1,\ a_2 = b_2,\ ..., a_n = b_n$

ทฤษฎีบท 1.4.4 ให้ $P(x)$ และ $Q(x)$ เป็นพหุนาม

$$P(x) = Q(x) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \deg P(x) = \deg Q(x) \quad \text{และ} \quad P(x) = Q(x) \quad \text{ทุกๆ} \ x \in \mathbb{R}$$

ตัวอย่าง 1.4.5 ถ้า a, b, c และ d เป็นจำนวนจริงซึ่ง

$$(x-1)^2(ax+b) = cx^3 + dx + 4 \ \text{ทุกจำนวนจริง}\ x$$

แล้ว $a + b + c + d$ เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 1.4.6 ถ้า $a, b \in \mathbb{R}$ และ

$$P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 + ax + b$$

ถ้ามีพหุนาม $Q(x)$ โดยที่ $P(x) = [Q(x)]^2$ จงหา $a + b$

ทฤษฎีบท 1.4.7 **ขั้นตอนการหาร** (The Division Algorithm)
ให้ $P(x)$ และ $S(x)$ เป็นพหุนาม โดยที่ $S(x) \neq 0$
แล้วจะมีพหุนาม $Q(x)$ และ $R(x)$ ซึ่ง

$$P(x) = Q(x)S(x) + R(x) \qquad \text{เมื่อ } R(x) = 0 \text{ หรือ } \deg R(x) < \deg S(x)$$

เรียก $P(x)$ ว่าตัวถูกหาร (Numerator) $S(x)$ ว่าตัวหาร (Denominator) $Q(x)$ ว่าผลหาร (Quotient) และ $R(x)$ ว่าเศษ (Remainder)

ข้อสังเกต ถ้า $R(x) = 0$ แล้วจะได้ว่า $S(x)$ หาร $P(x)$ ลงตัว หรือ $S(x)$ เป็นตัวประกอบของ $P(x)$

ตัวอย่าง 1.4.8 ให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 10$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนเต็ม และ $Q(x) = x^2 + 9$

ถ้า $Q(x)$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 1

แล้ว $P(a) + P(b)$ เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 1.4.9 ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริง ถ้า $ax^5 + bx + 4$ หารด้วย $(x-1)^2$ ลงตัว แล้ว $a - b$ เท่ากับเท่าใด

ทฤษฎีบท 1.4.10 ทฤษฎีเศษเหลือ (The Remainder Theorem)
ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$x - c \ \text{ หาร } \ P(x) \ \text{ เศษเหลือเท่ากับ } \ P(c)$$

ตัวอย่าง 1.4.11 จงหาเศษที่เกิดจากการหาร $P(x)$ ด้วยตัวหารที่กำหนดในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x - 1$ หาร $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + 5x + 2$

2. $x + 2$ หาร $P(x) = 3x^3 - x^2 + 3x + 1$

ตัวอย่าง 1.4.12 จงหาค่า k ในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $x + 1$ หาร $P(x) = 3x^4 + 2x^2 + +kx - 5$ เหลือเศษ -3

2. $x - 1$ หาร $P(x) = 3x^4 + kx^3 - x^2 + 1$ ลงตัว

ตัวอย่าง 1.4.13 ถ้าพหุนาม $6x^3 + ax^2 + bx - 1$ หารด้วย $x - 1$ ลงตัว แต่หารด้วย $x + 1$ เหลือเศษ -24 จงหาค่าของ ab

ตัวอย่าง 1.4.14 กำหนดให้ $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + 2$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x - 1$ และ $x + 3$ ต่างหาร $P(x)$ เหลือเศษ 5 แล้ว $a + 2b$ เท่ากับใด

ทฤษฎีบท 1.4.15 ทฤษฎีตัวประกอบ (The Factor Theorem)
ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม และ $c \in \mathbb{R}$ แล้ว

$$x - c \text{ เป็นตัวประกอบหนึ่งของ } P(x) \text{ ก็ต่อเมื่อ } P(c) = 0$$

ตัวอย่าง 1.4.16 จงแยกตัวประกอบของ $P(x)$ ต่อไปนี้

1. ให้ $x - 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

2. ให้ $x + 1$ เป็นตัวประกอบของ $P(x) = 3x^3 + 16x^2 + 10x - 3$

3. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$

บทนิยาม 1.4.17 เรียกจำนวนจริง c ว่าเป็นราก (root) ของพุหนาม $P(x)$ ถ้า $P(c) = 0$ หรือกล่าวว่า c เป็นรากคำตอบหรือผลเฉลย (solution) ของสมการ $P(x) = 0$

ทฤษฎีบท 1.4.18 ถ้า c ว่าเป็นรากของพุหนาม $P(x)$ แล้ว $(x-c)$ เป็นตัวประกอบของพหุนาม $P(x)$

ทฤษฎีบท 1.4.19 พุหนามดีกรี n จะมีรากที่เป็นจำนวนจริงไม่เกิน n ราก

ทฤษฎีบท 1.4.20 คำตอบของสมการกำลังสอง (Roots of Quadratic equation)
รากคำตอบของพหุนาม $ax^2 + bx + c = 0$ เมื่อ $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ คือ

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- ถ้า $b^2 - 4ac > 0$ แล้วพหุนามมีราก 2 รากเป็นจำนวนจริง
- ถ้า $b^2 - 4ac = 0$ แล้วพหุนามมีราก 1 รากเป็นจำนวนจริง (รากซ้ำ)
- ถ้า $b^2 - 4ac < 0$ แล้วพหุนามไม่มีรากเป็นจำนวนจริง

ตัวอย่าง 1.4.21 จงหารากคำตอบของสมการต่อไปนี้

1. $x^2 - x - 2 = 0$
2. $x^2 + 6x + 8 = 0$
3. $x^2 - 3x - 10 = 0$
4. $x^2 + x + 72 = 0$
5. $2x^2 + 3x + 1 = 0$
6. $x^2 + x - 1 = 0$
7. $x^2 + x + 1 = 0$
8. $x^2 + 2x + 1 = 0$

ตัวอย่าง 1.4.22 ถ้าสมการ $(x^2+1)(2x^2-6x+c)=0$ มีรากที่เป็นจำนวนจริงเพียง 1 ราก จงหาค่าของ c

ตัวอย่าง 1.4.23 แม่ค้านำเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ 1 กิโลกรัม ถั่วลิสง 3 กิโลกรัม และเมล็ดฟักทอง 4 กิโลกรัม มาผสมกันแล้วแบ่งใส่ถุงถุงละ 100 กรัม ถ้าแม่ค้าซื้อเมล็ดมะม่วงหิมพานต์ ถั่วลิสง และเมล็ดฟักทองมาในราคากิโลกรัมละ 250 บาท 50 บาท และ 100 บาทตามลำดับ แม่ค้าจะต้องขายเมล็ดพืชผสมถุงละ 100 กรัมนี้ ในราคาเท่ากับข้อใดต่อไปนี้จึงจะทำให้ได้กำไร 20% เมื่อขายหมด

ทฤษฎีบท 1.4.24 ให้ a, b, c เป็นจำนวนจริง

1. $a < b < c$ ก็ต่อเมื่อ $a < b$ และ $b < c$
2. $a < b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c < b + c$
3. $a < b$ และ $c > 0$ แล้ว $ac < bc$
4. $a < b$ และ $c < 0$ แล้ว $ac > bc$

ตัวอย่าง 1.4.25 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

1. $2x + 3 < 9$
2. $3x - 5 \leq x + 8$
3. $-1 < 4x + 7 < 11$
4. $3 - 2x < x < 4 - x$

ตัวอย่าง 1.4.26 แม่ค้าขายก๋วยเตี๋ยวชามละ 25 บาท โดยมีค่าเช่าร้านวันละ 120 บาท และต้นทุนค่าวัตถุดิบทั้งหมดคิดเป็นชามละ 18 บาท ถ้าต้องการให้ได้กำไรไม่ต่ำกว่าวันละ 500 บาท เขาเต้องขายให้ได้อย่างน้อยวันละกี่ชาม

ทฤษฎีบท 1.4.27 ให้ a, b เป็นจำนวนจริง

1. $ab > 0$ ก็ต่อเมื่อ $(a > 0$ และ $b > 0)$ หรือ $(a < 0$ และ $b < 0)$
2. $ab < 0$ ก็ต่อเมื่อ $(a < 0$ และ $b > 0)$ หรือ $(a > 0$ และ $b < 0)$

ทฤษฎีบท 1.4.28 ให้ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $\alpha < \beta$ แล้ว

1. เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$ คือ (α, β)
2. เซตคำตอบของ $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$ คือ $(-\infty, \alpha) \cup (\beta, \infty)$

ตัวอย่าง 1.4.29 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $x^2 - 3x + 2 < 0$
2. $x^2 - 3x \geq 4$
3. $x^2 - 4x + 4 > 0$
4. $x^2 - 4x + 4 < 0$
5. $x^2 + 2x + 2 \geq 0$
6. $x^2 + 2x + 2 \leq 0$

ตัวอย่าง 1.4.30 จงหาเซตคำตอบของอสมการ $(2x+1)(4-3x)>0$

ตัวอย่าง 1.4.31 จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

1. $(x-1)(x-2)(x-3)<0$
2. $(1-x)(x+1)(2x-1)\geq 0$
3. $(1-x)(x-1)(x^2-4)\geq 0$
4. $(x-1)(x-2)^2<0$

ตัวอย่าง 1.4.32 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

1. $\dfrac{x-1}{x-2}<0$
2. $\dfrac{x+1}{3x-2}\geq 0$

ตัวอย่าง 1.4.33 จงหาเซตคำตอบของอสมการ

$$\frac{x^4-13x^2+36}{x^2+5x+6}\geq 0$$

แบบฝึกหัด 1.4

1. ถ้า A, B, C เป็นค่าคงตัว และ $A(x-1)(x-2)+B(x-1)(x-3)+C(x-2)(x-3)=1$ จงหาค่าของ $A+B+C$

2. ถ้า A, B, C เป็นค่าคงตัว และ $A(x-1)^2+B(x-1)(x+1)+C(x+1)^2=4x^2$ จงหาค่าของ $A+2B+C$

3. เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ เมื่อ $x+1$ หารพหุนาม $2x^4-7x^3+ax^2+7x+b$ ลงตัว และได้ผลลัพธ์เท่ากับ $2x^3-9x^2+7x+b$ จงหา $a+b$

4. ถ้า $3x^2-13x+4$ เป็นตัวประกอบของ $3x^3+ax^2+bx-8$ แล้วค่าของ $a+b$ มีค่าเท่าใด

5. ให้ $P(x)$ เป็นพหุนาม ถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x-1$ จะเหลือเศษเท่ากับ 3 และถ้าหาร $P(x)$ ด้วย $x-3$ จะเหลือเศษเท่ากับ 5 ถ้า $r(x)=ax+b$ คือเศษที่เหลือจากการหาร $P(x)$ ด้วย $(x-1)(x-3)$ แล้ว $3a+2b$ เท่ากับเท่าใด

6. กำหนดให้ $P(x)=x^6+ax^2-x+b$ เมื่อ a, b เป็นจำนวนจริง ถ้า $x-1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ -1 และ $x+1$ หาร $P(x)$ เหลือเศษ 1 แล้ว x หาร $P(x)$ เหลือเศษเท่าใด

7. ให้ $P(x)=x^2+7x-3$ เมื่อหาร $P(x)$ ด้วย $x-p$ และ $x+q$ จะได้เศษเหลือเท่ากัน โดยที่ $p \neq q$ แล้ว $p-q$ มีค่าเท่าใด

8. จงหาค่า k ที่เป็นจำนวนเต็มมากที่สุดซึ่งรากของสมการ $x^2+2x+(k+3)=0$ เป็นจำนวนจริง

9. ถ้า $2x^2=x-3k$ เป็นสมการที่คำตอบเป็น a เพียงคำตอบเดียว แล้ว $1+\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^3}$ มีค่าเท่าใด

10. ถ้ารูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ามีด้านยาวยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 3 ฟุต และเส้นแทยงมุมยาวกว่าด้านกว้างอยู่ 7 ฟุต แล้วเส้นรอบรูปของรูปสี่เหลี่ยมรูปนี้ยาวกี่ฟุต

11. รูปสามเหลี่ยมมุมฉากรูปหนึ่งมีพื้นที่ 600 ตารางเซนติเมตร ถ้าด้านประกอบมุมฉากด้านหนึ่งยาวเป็น 75% ของด้านประกอบมุมฉากอีกด้านหนึ่ง แล้วเส้นรอบรูปสามเหลี่ยมมุมฉากนี้ยาวกี่เซนติเมตร

12. โรงพิมพ์แห่งหนึ่งคิดค่าจ้างในการพิมพ์แผ่นพับแยกเป็น 2 ส่วนคือ ส่วนที่หนึ่งเป็นค่าเรียงพิมพ์ซึ่งไม่ขึ้นกับจำนวนแผ่นพับที่พิมพ์ กับส่วนที่สองเป็นค่าพิมพ์ซึ่งขึ้นอยู่กับจำนวนแผ่นพับที่พิมพ์โดยโรงพิมพ์เสนอราคาดังนี้ ถ้าพิมพ์ 100 ใบ จะคิดค่าจ้างรวมทั้งหมดเป็นเงิน 800 บาท และถ้าพิมพ์ 200 ใบ จะคิดค่าจ้างรวมทั้งหมดเป็นเงิน $1,100$ บาท โรงพิมพ์คิดค่าเรียงพิมพ์กี่บาท

13. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $-1 \leq \sqrt{2}+\dfrac{x}{1-\sqrt{2}} \leq 1$

14. พี่มีเงินมากกว่าน้อง 120 บาท ถ้าทั้งสองคนมีเงินรวมกันไม่เกิน $1,240$ บาท แล้วพี่มีเงินมากที่สุดกี่บาท

15. ในกล่องใบหนึ่งบรรจุลูกบอลสีขาว ลูกบอกสีแดง และลูกบอลสีเหลือง โดยที่จำนวนลูกบอลสีขาวมีจำนวนไม่น้อยกว่าจำนวนลูกบอลสีแดง แต่ไม่มากกว่าหนึ่งในสามของจำนวนลูกบอลสีเหลือง และผลรวมของจำนวนลูกบอลสีขาวและสีแดงไม่น้อยกว่า 76 ลูก อยากทราบว่าผลรวมของจำนวนลูกบอกสีขาวและลูกบอลสีเหลืองมีอย่างน้อยกี่ลูก

16. จงหาเซตคำตอบของอสมการต่อไปนี้

16.1 $3x+1<2x-1$

16.2 $4x+7>2(x+1)$

16.3 $2(3x-1)\geq 3(x-1)$

16.4 $4-(3-x)<3x-(3-2x)$

16.5 $(x^2-1)(x^2-5x+6)<0$

16.6 $(x^4-1)(x^2-4)>0$

16.7 $6x^3+11x^2-4x-4\leq 0$

16.8 $x^3-4x^2+x+6\geq 0$

16.9 $(2x+1)^2(x+1)^5<0$

16.10 $(x-1)^{11}(x-2)^{26}(x-4)^{72}\geq 0$

17. กำหนดให้ $A=\{x\,|\,(2x+1)(x-1)<2\}$ และ $B=\{x\,|\,16-9x^2>0\}$ แล้ว $A\cap B$

18. เซตของจำนวนจริง m ซึ่งทำให้สมการ $x^2-mx+4=0$ มีรากเป็นจำนวนจริง เป็นสับเซตของข้อใดต่อไปนี้

19. จงหาเซตคำตอบของอสมการ

19.1 $\dfrac{x^2+12}{x}>7$

19.2 $\dfrac{x^2+6}{x}\leq 5$

19.3 $\dfrac{(x-1)(x+3)}{x}-2\leq 0$

19.4 $\dfrac{2x-3}{(x+2)(x-5)}>0$

19.5 $\dfrac{x}{x+2}>\dfrac{1}{x}$

19.6 $1\leq\dfrac{x}{x-2}\leq\dfrac{1}{x}$

19.7 $\dfrac{3x^2-x+2}{x^2-2x+3}<2$

19.8 $\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x-2}\leq\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{x-4}$

20. จงหาคำตอบของอสมการ $\dfrac{x}{x^2-3x+2}\geq\dfrac{x+2}{x^2-1}$

21. ถ้าพหุนาม $x^{2559}-ax-1$ หารด้วย x^2-1 เหลือเศษ $r(x)$ และ $r(2)=123$ แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

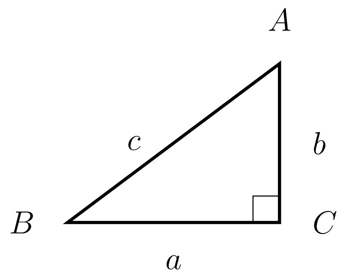
22. ถ้า a,b และ c เป็นรากของสมการ $x^3-7x^2-6x+5=0$ แล้ว $(a+b)(a+c)(b+c)$ มีค่าเท่าใด

23. มีจำนวนเต็ม a ทั้งหมดกี่จำนวนที่ทำให้ $x^2+100>2ax$ และ $x^2+a^2>10x$ เมื่อ x เป็นจำนวนจริง

24. จงหาเซตคำตอบของอสมการ $3x^2+5x+11<2x^2-x-4<x^2-2x+2$

1.5 ตรีโกณมิติเบื้องต้น

พิจารณาสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC



นิยามค่าตรีโกณมิติทั้ง 6 แบบคือ ไซน์ (sine) โคไซน์ (cosine) แทนเจนต์ (tangent) โคแทนเจนต์ (cotangent) เซแคนต์ (secant) และโคเซแคนต์ (cosecant) ดังนี้

$$\sin B = \frac{b}{c} \qquad \cos B = \frac{a}{c} \qquad \tan B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b}{a}$$

$$\csc B = \frac{1}{\sin B} = \frac{c}{b} \qquad \sec B = \frac{1}{\cos B} = \frac{c}{a} \qquad \cot B = \frac{\cos B}{\sin B} = \frac{a}{b}$$

ตัวอย่าง 1.5.1 กำหนดให้ $\sin A = \dfrac{3}{5}$ จงหาค่าตรีโกณมิติที่เหลือของมุม A

ทฤษฎีบท 1.5.2 เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ และ Cofunction

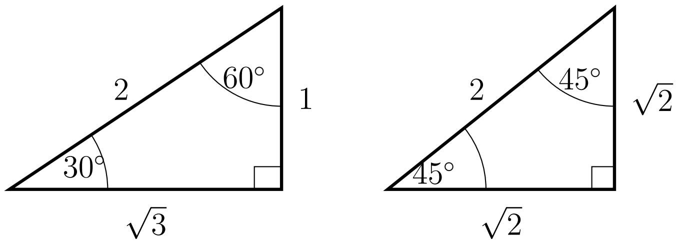
1. $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$
2. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$
3. $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$
4. $\sin A = \cos(90° - A)$
5. $\tan A = \cot(90° - A)$
6. $\sec A = \csc(90° - A)$

ตัวอย่าง 1.5.3 จงหาค่าของ $\sin^2 1^\circ + \sin^2 2^\circ + \sin^2 3^\circ + \cdots + \sin^2 89^\circ$

ตัวอย่าง 1.5.4 ถ้า $\sec\theta + \tan\theta = 3$ จงหาค่าของ $\sec\theta - \tan\theta$

ตัวอย่าง 1.5.5 ถ้า ABC เป็นสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยมี B เป็นมุมฉาก และ $\cos A = \dfrac{3}{5}$ จงหาค่าของ $\cos(B - A)$

ค่าตรีโกณมิติที่ควรทราบ

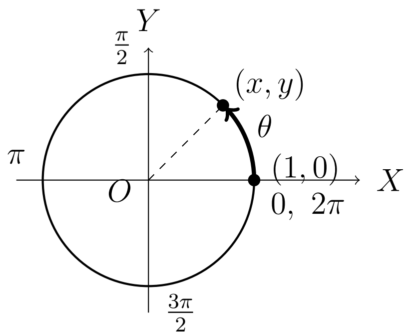


	30°	45°	60°
sin			
cos			
tan			

ตัวอย่าง 1.5.6 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม B เป็นมุมฉาก มีมุม A เท่ากับ 30° และมีพื้นที่เท่ากับ $24\sqrt{3}$ ตารางหน่วย จงหาความยาวของด้าน AB

ตัวอย่าง 1.5.7 กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก มีด้าน BC ยาวเท่ากับ $10\sqrt{3}$ หน่วย และด้าน AB ยาวเท่ากับ 20 หน่วย ถ้าลากเส้นตรงจากจุด C ไปตั้งฉากกับด้าน AB ที่จุด D แล้วความยาวด้าน CD เท่ากับกี่หน่วย

ขยายแนวคิดไปยังมุม θ ซึ่งมีหน่วยเป็นเรเดียนคือความยาวของเส้นรอบวงของวงกลมหนึ่งหน่วย โดยจุดเริ่มต้นที่ $(1,0)$ ไปสิ้นสุดที่ (x,y) เมื่อวัดแบบทวนเข็มนาฬิกาให้มีค่าเป็นบวก และวัดแบบตามเข็มนาฬิกาให้มีค่าเป็นลบ จะได้ว่า $x = \cos\theta$ และ $y = \sin\theta$ นั่นคือ $x^2 + y^2 = 1$
จะได้ว่า 180° มีค่าตรงกับ π เรเดียน เราสามารถแปลง x องศาเป็น $\dfrac{x^\circ}{180^\circ} \times \pi$ เรเดียน



ค่าตรีโกณมิติมาตรฐานที่ควรทราบ

ตรีโกณมิติ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	$-$	0

ตัวอย่าง 1.5.8 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\sin\frac{2\pi}{3}$
2. $\cos\frac{7\pi}{6}$
3. $\tan 315^\circ$
4. $\sec 390^\circ$

เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

1. $\sin x \csc x = 1$
2. $\cos x \sec x = 1$
3. $\cot x \tan x = 1$
4. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
5. $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$
6. $\csc^2 x - \cot^2 x = 1$
7. $\sin(-x) = -\sin x$
8. $\cos(-x) = \cos x$
9. $\tan(-x) = -\tan x$
10. $\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$
11. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
12. $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$
13. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x = \dfrac{2\tan x}{1 + \tan^2 x}$
14. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

    $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

    $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
15. $\tan(2x) = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$
16. $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2x)$
17. $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$
18. $\tan^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{1 + \cos 2x}$
19. $\tan x = \dfrac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \dfrac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$
20. $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$
21. $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
22. $\tan 3x = \dfrac{3\tan x - \tan^3 x}{1 - 3\tan^2 x}$
23. $\sin x + \sin y = 2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
24. $\sin x - \sin y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
25. $\cos x + \cos y = 2\cos\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
26. $\cos x - \cos y = -2\sin\left(\dfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\dfrac{x-y}{2}\right)$
27. $\sin x \cos y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$
28. $\cos x \sin y = \dfrac{1}{2}[\sin(x+y) - \sin(x-y)]$
29. $\cos x \cos y = \dfrac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
30. $\sin x \sin y = -\dfrac{1}{2}[\cos(x+y) - \cos(x-y)]$

ตัวอย่าง 1.5.9 กำหนดให้ $\sin x = 0.60$ และ $\cos y = 0.28$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\sin 2x$
2. $\cos(x-y)$
3. $\tan 3x$
4. $\sin(x+30^\circ)$

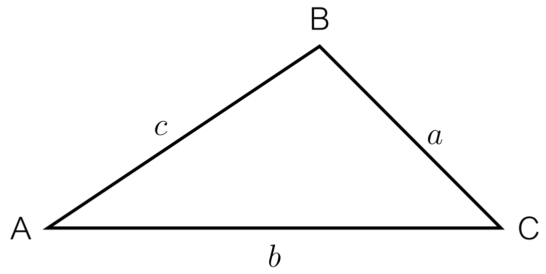
ตัวอย่าง 1.5.10 สมการการเคลื่อนแบบ SHM ของวัตถุชิ้นหนึ่ง เกิดจากการ $y_1 = \sin 100t$ รวมกับ $y_2 = \cos 100t$ นั่นคือ $y = y_1 + y_2$ ซึ่งทำให้ได้ว่า

$$y = A\sin(100t + \phi)$$

จงหา A และ ϕ (ข้อเสนอแนะ : ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติข้อ 10)

การประยุกต์ตรีโกณมิติ

กำหนดให้ ABC เป็นสามเหลี่ยม โดยที่ a คือความยาวด้าน BC, b คือความยาวด้าน AC และ c คือความยาวด้าน AB



1. **กฎไซน์** (Sine's Law)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

2. **กฎโคไซน์** (Cosine's Law)

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

3. **พื้นที่สามเหลี่ยม** ABC เท่ากับ

$$\frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

ตัวอย่าง 1.5.11 สามเหลี่ยมรูปหนึ่งมีพื้นที่เท่ากับ $450\sqrt{3}$ ตารางนิ้ว มีมุมหนึ่งเท่ากับ 60° และด้านตรงข้ามมุมนี้ยาว $30\sqrt{3}$ นิ้ว ความยาวที่สั้นที่สุดของรูปสามเหลี่ยมนี้เท่ากับกี่นิ้ว

แบบฝึกหัด 1.5

1. กำหนดให้ tan$A = 0.75$ จงหาค่าตรีโกณมิติที่เหลือของมุม A
2. กำหนดให้ sin$A = \frac{4}{5}$ และ tan$B = \frac{5}{12}$ จงหาค่าต่อไปนี้

   2.1 $\sin A \cos B + \cos A \sin B$

   2.2 $\cos A \cos B - \sin A \sin B$

   2.3 $(\cos^2 A - \sin^2 A)(\cos^2 B - \sin^2 B)$

   2.4 $\dfrac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

3. จงหาค่าของ $\cos^2 1^\circ + \cos^2 2^\circ + \cos^2 3^\circ + \cdots + \cos^2 89^\circ$
4. จงหาค่าของ $\dfrac{\sin 50^\circ \cos 20^\circ}{\sin 30^\circ \tan 10^\circ} \cdot \dfrac{\tan 45^\circ \tan 80^\circ}{\cos 40^\circ \sin 70^\circ}$
5. ให้ A เป็นมุมแหลม จงแสดงว่า $\dfrac{\sin A(\csc A - \sin A)}{\cos A(\sec A - \cos A)} = \cot^2 A$
6. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และมีพื้นที่เท่ากับ 15 ตารางหน่วย ถ้า sin$B = 3$sin$A$ จงหาความยาวของด้าน AB
7. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และด้าน BC ยาว 6 นิ้ว ถ้า D เป็นจุดบนด้าน AC โดยที่ $B\hat{D}C = 70^\circ$ และ $A\hat{B}D = 10^\circ$ จงหาความยาวของด้าน AB
8. ถ้ารูปสามเหลี่ยมด้านเท่ารูปหนึ่งมีความสูง 1 หน่วย จงหาความยาวรอบรูปของสามเหลี่ยมนี้
9. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มีมุม C เป็นมุมฉาก และ cos$B = \frac{2}{3}$ ถ้าด้าน BC ยาว 1 หน่วย จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมนี้
10. สุดารัตน์ยืนอยู่ทางทิศตะวันออกของตึกหลังหนึ่งมองเห็นเป็นมุมเงย 45° จากจุดนี้สุดารัตน์เดินไปทางทิศใต้เป็นระยะ 100 เมตร จะมองเห็นยอดตึกเป็นมุมเงย 30° จงหาความสูงของตึกหลังนี้
11. กฎของสเนลล์ (Snell's Law) เป็นสูตรที่ใช้อธิบายความสัมพันธ์ระหว่างมุมตกกระทบกับการหักเหของแสง เมื่อพูดถึงแสงหรือคลื่นอื่น ๆ ที่ผ่านเขตแดนระหว่างตัวกลางสองชนิดที่แตกต่างกัน เช่น น้ำ แก้ว หรืออากาศ แสดงความสัมพันธ์ดังนี้

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

   เมื่อ θ_1 คือมุมตกกระทบ และ θ_2 คือมุมหักเห เมื่อเทียบกับเส้นแนวฉาก
   v_1 และ v_2 คือความเร็วแสงในตัวกลางที่ 1 และ 2 ตามลำดับ
   n_1 และ n_2 คือดรรชนีหักเหของของตัวกลางที่ 1 และ 2 ตามลำดับ
   จงอธิบาย **การสะท้อนกลับหมด** (total internal reflection) เมื่อ $\theta_2 > 90^\circ$ แสงต้องเดินจากตัวกลางที่มีลักษณะใดไปยังตัวกลางแบบใด

บทที่ 2

ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน

2.1 ความสัมพันธ์

ในชีวิตประจำวันมีประโยคที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองอย่างอยู่บ่อยครั้ง เช่น " ศรีเรือนเป็นแม่ของศรีจันทร์ " จากประโยคดังกล่าว " เป็นแม่ " เป็นคำที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ศรีเรือนกับศรีจันทร์ ตัวอย่างในทางคณิตศาสตร์เช่น $5 < 7$ คำว่า " น้อยกว่า " เป็นคำที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง 5 กับ 7 ซึ่งก็คือ 5 น้อยกว่า 7 นั่นเอง

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = c \ \text{ และ } \ b = d$$

บทนิยาม 2.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian product) นิยามโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ และ } b \in B\}$$

ตัวอย่าง 2.1.2 ให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{1, 2, 3\}$ จะได้ว่า

1. $A \times B =$
2. $B \times A =$
3. $A \times A =$

ทฤษฎีบท 2.1.3 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

บทนิยาม 2.1.4 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ **ความสัมพันธ์** (Relation) จาก A ไป B คือสับเซตของ $A \times B$ ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ $(a, b) \in r$ เขียนแทนด้วย $a\,r\,b$ และนิยาม

โดเมน (Domain) ของ r เขียนแทนด้วย Dom(r) คือ

$$\text{Dom}(r) = \{a \in A \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in r\}$$

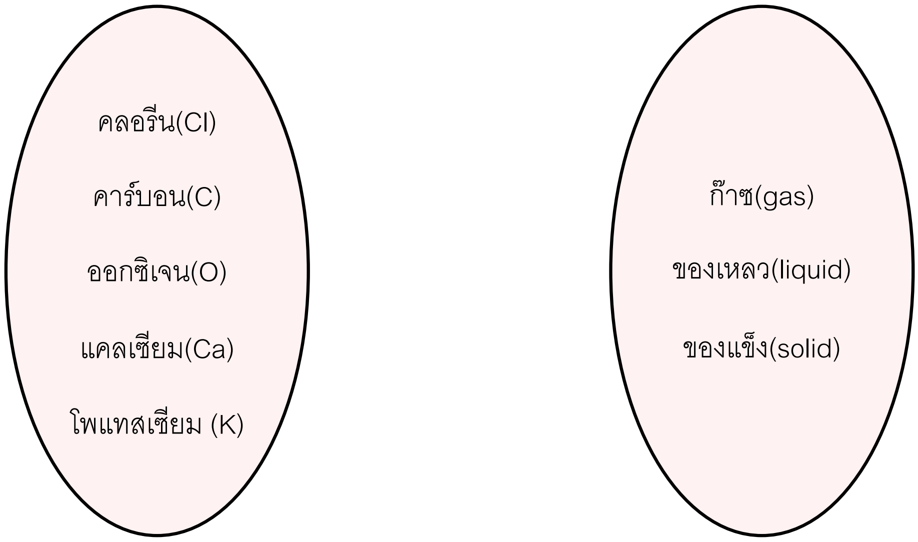
เรจน์ (Range) ของ r เขียนแทนด้วย Ran(r) คือ

$$\text{Ran}(r) = \{b \in B \mid \exists a \in A,\ (a, b) \in r\}$$

ในกรณีที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียก r ว่า **ความสัมพันธ์บน** A

ข้อสังเกต Dom$(r) \subseteq A$ และ Ran$(r) \subseteq B$

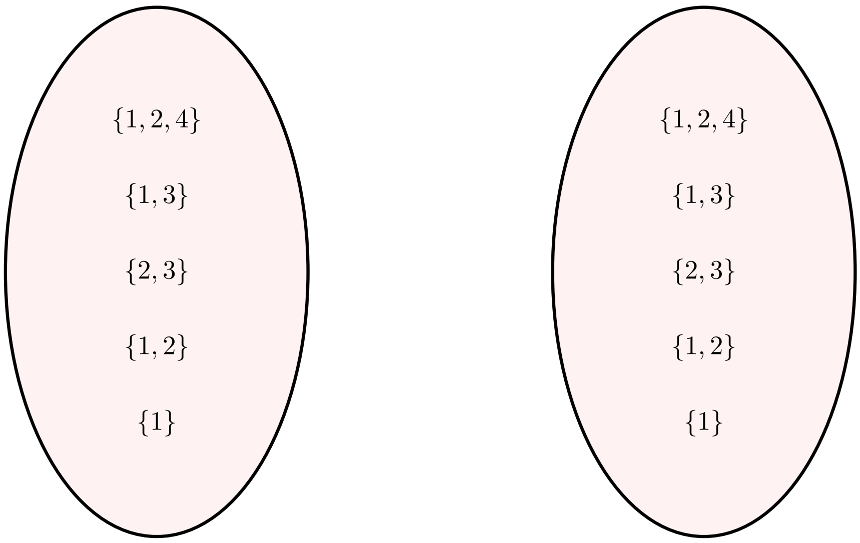
ตัวอย่าง 2.1.5 จงสร้างความสัมพันธ์ระหว่างทั้ง 2 เซต



ตัวอย่าง 2.1.6 กำหนดให้ $A = \{\{1\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{1,2,4\}\}$ สำหรับ $X, Y \in A$ นิยาม

$$X\, r\, Y \qquad \text{มีความหมายว่า} \qquad X \subseteq Y$$

จงหาโดเมนและเรจน์ของ r



ตัวอย่าง 2.1.7 ให้ $A = \{1, 2\}$ จงหาทุกความสัมพันธ์บน A

เรียก $\varnothing$ ว่า**ความสัมพันธ์ว่าง** (Empty relation) และเรียก $A \times A$ ว่า**ความสัมพันธ์เอกภพ** (Universal relation) เมื่อ $A \neq \varnothing$ จากตัวอย่างนี้จะเห็นได้ว่าจำนวนความสัมพันธ์ทั้งหมดคำนวณได้จาก

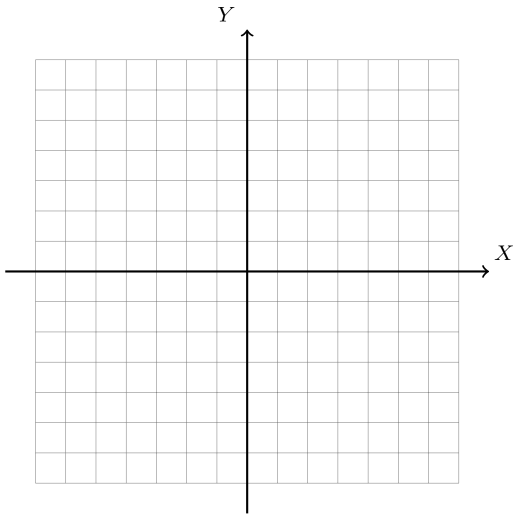
$$2^{n(A\times A)} = 2^4 = 16$$

โดยทฤษฎีบท 1.1.14 เพราะความสัมพันธ์บน A คือสับเซตของ $A \times A$ และใช้ทฤษฎีบท 2.1.3 ทำให้ได้ทฤษฎีบทต่อไปนี้

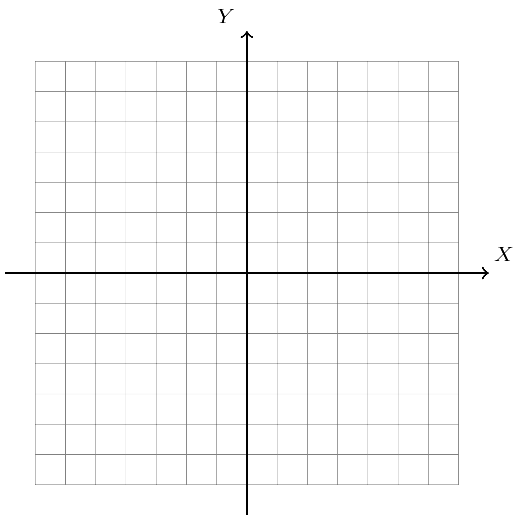
ทฤษฎีบท 2.1.8 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด แล้วจำนวนความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมดเท่ากับ $2^{n(A)\cdot n(B)}$

ตัวอย่าง 2.1.9 จงหาโดเมนและเรจน์ของ r ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{x, y, z\}$
กำหนดให้ $r = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

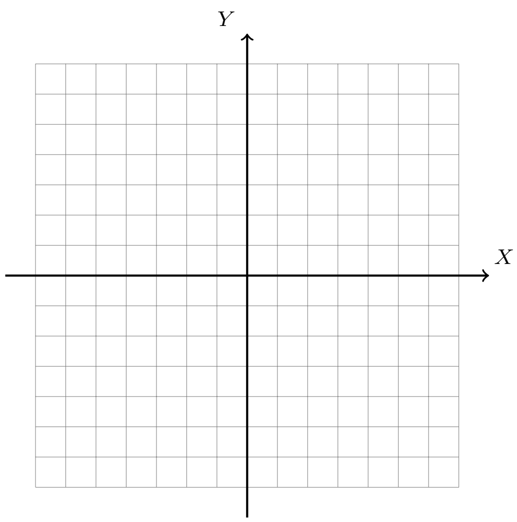
ตัวอย่าง 2.1.10 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 + 1\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r โดยใช้กราฟ



ตัวอย่าง 2.1.11 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r โดยใช้กราฟ



ตัวอย่าง 2.1.12 ให้ $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 4x^2 + 9y^2 = 36\}$ จงหาโดเมนและเรนจ์ของ r โดยใช้กราฟ

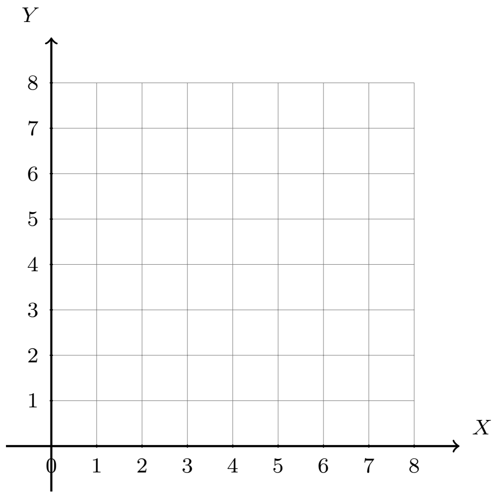


บทนิยาม 2.1.13 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B **ความสัมพันธ์ผกผัน** (Inverse relation) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไป A กำหนดให้ $x\, r^{-1}\, y$ ก็ต่อเมื่อ $y\, r\, x$ เขียนในรูปเซตได้ดังนี้

$$r^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \,|\, (y,x) \in r\}$$

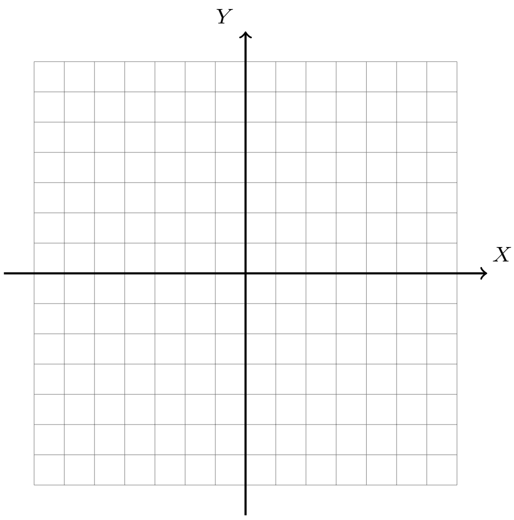
ข้อสังเกต $\text{Dom}(r^{-1}) = \text{Ran}(r)$ และ $\text{Ran}(r^{-1}) = \text{Dom}(r)$

ตัวอย่าง 2.1.14 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของ $r = \{(1,2),(1,4),(2,5),(4,5),(3,8)\}$ พร้อมเขียนกราฟ

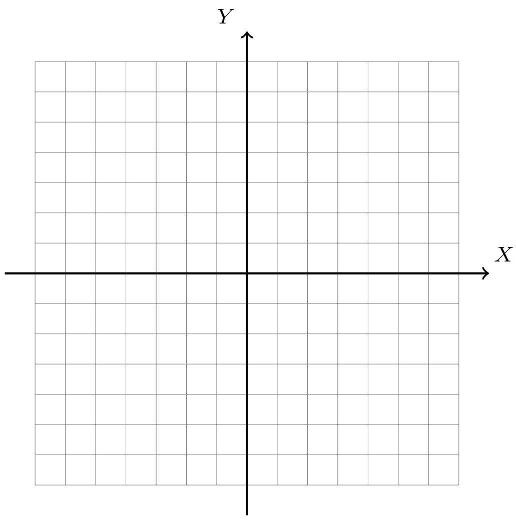


ตัวอย่าง 2.1.15 จงหา r^{-1} พร้อมทั้งเขียนกราฟแสดงความสัมพันธ์

1. ให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$



2. ให้ $x\, r\, y$ ก็ต่อเมื่อ $y = 2x+1$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$



แบบฝึกหัด 2.1

1. จงหาโดเมนและเรจน์ของความสัมพันธ์ r
   1.1 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ มีความหมายว่า $x > y^2$
   1.2 ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $x + y = 10$
   1.3 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ 3 หาร $(2x - y)$ ลงตัว
   1.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 9x^2 + 16y^2 = 1\}$
   1.5 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 4\}$
   1.6 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 - y^2 = 1\}$
   1.7 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{4 - x^2}\}$
   1.8 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| < 1\}$
2. ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ กำหนดให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จพร้อมให้เหตุผล
   2.1 Dom$(r \cup s) =$ Dom$(r) \cup$ Dom(s)
   2.2 Dom$(r \cap s) \subseteq$ Dom$(r) \cap$ Dom(s)
   2.3 Ran$(r \cup s) =$ Ran$(r) \cup$ Ran(s)
   2.4 Ran$(r \cap s) \subseteq$ Ran$(r) \cap$ Ran(s)
3. จงหาความสัมพันธ์ผกผัน r พร้อมเขียนกราฟประกอบ
   3.1 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ มีความหมายว่า $x^2 > y$
   3.2 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $y = |x| + 1$
   3.3 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 9x^2 - 4y^2 = 36\}$
   3.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + 4y^2 = 4\}$
   3.5 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1 - \sqrt{1 - x}\}$
   3.6 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| < |y + 1|\}$

2.2 ฟังก์ชัน

หลายครั้งที่เราเคยได้ยินคำว่า "**ฟังก์ชัน** (function)" ในชีวิตประจำวัน โดยเฉพาะในเครื่องมือสื่อสารใหม่ ๆ นักโฆษณามักจะกล่าวว่าสินค้าของตัวเองมีฟังก์ชันต่าง ๆ มากมาย ทำให้ผู้อ่านเองพอนึกออกว่าฟังก์ชันน่าจะหมายถึงคำสั่งที่เราเลือกทำสิ่งต่าง ๆ บนอุปกรณ์หรือสินค้าเหล่านั้นเพื่อให้ได้ผลลัพธ์ที่เราต้องการ แต่นี้เป็นความหมายทางคอมพิวเตอร์ในทางคณิตศาสตร์ให้ความหมายของฟังก์ชันคือความสัมพันธ์ที่สมาชิกตัวหน้าแต่ละตัวจะจับคู่กับสมาชิกตัวหลังได้เพียงครั้งเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 2.2.1 จะกล่าวว่าความสัมพันธ์ $f \subseteq A \times B$ เป็น**ฟังก์ชัน** (Function **หรือ** Mapping) ก็ต่อเมื่อ

$$\text{แต่ละ } (x_1, y_1) \text{ และ } (x_2, y_2) \text{ ใน } f \text{ ถ้า } x_1 = x_2 \text{ แล้ว } y_1 = y_2$$

ตัวอย่าง 2.2.2 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c\}$ จงตรวจสอบว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชัน

1. $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$
2. $g = \{(1, a), (2, b), (4, c)\}$
3. $h = \{(1, a), (1, b), (2, c), (3, a)\}$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่

1. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 1 - x^2\}$
2. $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid |x| + |y| = 2\}$

ถ้า $f \subseteq A \times B$ เป็นฟังก์ชัน แต่ละ $x \in A$ มี $y \in B$ เพียงตัวเดียวเท่านั้นที่ $(x, y) \in f$ เราจึงแทน y ด้วย $f(x)$ นั่นคือ $y = f(x)$ เรียกฟังก์ชัน f ที่ขึ้นกับ x

ตัวอย่าง 2.2.4 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$ แล้วจะได้ว่า

1. $f(1) + f(2) =$
2. $g(3) - g(4) =$
3. $f(4) \cdot g(2) =$
4. $f(g(3)) =$

บทนิยาม 2.2.5 f เป็น**ฟังก์ชันจาก A ไป B** เขียนแทนด้วย $f : A \to B$ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันซึ่งมีสมบัติ

$$\text{Dom}(f) = A \qquad \text{และ} \qquad \text{Ran}(f) \subseteq B$$

ตัวอย่าง 2.2.6 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$

2. $g = \{(1, a), (1, b), (3, c), (4, d)\}$

3. $h = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$

4. $t = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$

ตัวอย่าง 2.2.7 ให้ $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่

เห็นได้ชัดว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{x}\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ ไป $\mathbb{R}$ เขียนแทนด้วย

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ กำหนดโดย } f(x) = \sqrt{x}$$

บางครั้งเขียนแทนด้วย

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \text{ กำหนดโดย } x \longmapsto \sqrt{x}$$

สัญลักษณ์ $x \longmapsto y$ หมายถึง x **ถูกส่ง (Map)** ไปยัง y โดยการมองว่าฟังก์ชันเป็นเครื่องจักรอันหนึ่ง เมื่อใส่ x (Input) ผลที่ออกมาจากเครื่องจักรนี้ก็คือ y หรือ $f(x)$ (Output) แสดงดังภาพ

$$x \xrightarrow{\text{input}} \boxed{\text{ฟังก์ชัน } f} \xrightarrow{\text{output}} f(x)$$

ตัวอย่าง 2.2.8 ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(x) = x(-1)^x$ จงหาค่าของ $f(1)+f(2)+f(3)+f(4)$

ตัวอย่าง 2.2.9 กล่องใบหนึ่งมีความยาวฐานเป็น 2 เท่าของความกว้างฐาน ถ้ากล่องมีความจุ 25 ลิตร จงเขียนฟังก์ชันความสูงของกล่องในรูปของความกว้างฐาน

ตัวอย่าง 2.2.10 ในการทดลองเพื่อศึกษาความสัมพันธ์ของแรงที่กระทำกับวัตถุ โดยวัตถุชิ้นนี้มีมวล m หน่วยเป็นกิโลกรัม ถ้าออกแรง F กระทำต่อวัตถุนี้ในแนวราบ ทำให้เกิดความเร่งที่มีทิศเดียวกับแรงที่กระทำกับวัตถุ แสดงข้อมูลได้ดังนี้

แรง (นิวตัน)	10	20	30	40	50
ความเร่ง (เมตร/วินาที^{2})	2	4	6	x	10

1. จงเขียนฟังก์ชันของแรงในรูปความเร่ง
2. จงหาค่า x
3. คุณคิดมวลของวัตถุชิ้นนี้มีค่าเท่าใด

บทนิยาม 2.2.11 กำหนดให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า

1. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (One-to-one **หรือ** Injection) หรือ ฟังก์ชัน 1-1 ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$$

2. f เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง** (Onto function **หรือ** Surjection) ก็ต่อเมื่อ $\text{Ran}(f) = B$

3. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งทั่วถึง** (Bijection) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1 และ f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

ตัวอย่าง 2.2.12 จงบอกชนิดของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f = \{(1,4),(2,2),(3,1),(4,3)\}$

2. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x) = x + 1$

3. $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(x) = x + 1$

4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^2 - 1$

บทนิยาม 2.2.13 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันค่าจริง นิยาม**พีชคณิตของฟังก์ชัน** ดังนี้

1. **ผลบวก** (Sum) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g$ นิยามโดย

$$f+g=\{(x,y)\mid y=f(x)+g(x) \text{ และ } x\in \mathsf{Dom}(f)\cap \mathsf{Dom}(g)\}$$

2. **ผลต่าง** (Difference) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f-g$ นิยามโดย

$$f-g=\{(x,y)\mid y=f(x)-g(x) \text{ และ } x\in \mathsf{Dom}(f)\cap \mathsf{Dom}(g)\}$$

3. **ผลคูณ** (Product) ของ f และ g เขียนแทนด้วย fg นิยามโดย

$$fg=\{(x,y)\mid y=f(x)g(x) \text{ และ } x\in \mathsf{Dom}(f)\cap \mathsf{Dom}(g)\}$$

4. **ผลหาร** (Quotient) ของ f และ g เขียนแทนด้วย $\dfrac{f}{g}$ นิยามโดย

$$\frac{f}{g}=\left\{(x,y)\mid y=\frac{f(x)}{g(x)},\ x\in \mathsf{Dom}(f)\cap \mathsf{Dom}(g) \text{ และ } g(x)\neq 0\right\}$$

โดยบทนิยาม 2.2.13 จะได้ว่า

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x)+g(x) & (f-g)(x) &= f(x)-g(x) \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) & \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x)\neq 0\end{aligned}$$

ตัวอย่าง 2.2.14 จงหาพีชคณิตของฟังก์ชัน เมื่อกำหนดให้

$$f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1),(7,3)\}$$
$$g=\{(1,0),(2,1),(3,2),(4,5),(5,2),(6,0)\}$$

ตัวอย่าง 2.2.15 จงหาพีชคณิตของฟังก์ชัน เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \frac{x}{x+1}$$

แบบฝึกหัด 2.2

1. พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล ถ้าเป็นจงตรวจสอบว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง $\mathbb{R}$ และสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล

   1.1 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x + 2\}$

   1.2 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1 - x}\}$

   1.3 $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \dfrac{1}{x - 1}\right\}$

   1.4 $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \dfrac{x}{x^2 + 1}\right\}$

   1.5 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^2 + 1\}$

   1.6 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 9\}$

   1.7 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{x}\}$

   1.8 $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x - 1|\}$

2. ให้ $f(x) = x - 1$ และ $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ ฟังก์ชัน $f = g$ หรือไม่เพราะเหตุใด

3. ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ กำหนดโดย $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} + 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\[2ex] \dfrac{x + 1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$$

   จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

   3.1 f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

   3.2 f มีสมบัติทั่วถึง

4. ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และฟังก์ชัน $\chi_A : A \to \{0, 1\}$ นิยามโดย

   $$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \in A \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin A \end{cases}$$

   กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ จงหา

   4.1 $\chi_A(1) + \chi_B(1)$

   4.2 $\chi_A(2) \cdot \chi_B(3)$

   4.3 $\chi_{A \cup B}(2)$

   4.4 $\chi_{A - B}(3) + \chi_{A \cap B}(2)$

   สำหรับ A และ B เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้จริงหรือไม่

   4.5 $\chi_{A \cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

   4.6 $\chi_{A \cup B} = \chi_A \cdot \chi_B + \chi_A + \chi_B$

   4.7 $\chi_{A - B} = \chi_A - \chi_B$

5. จากทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์กล่าวว่า มวลสารที่เคลื่อนที่ m เปลี่ยนแปลงตามความเร็ว v ที่มวลนั้นเคลื่อนที่ คือ

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

โดยที่ m_0 คือมวลสารที่หยุดนิ่ง และ c คือความเร็วแสง (ประมาณ $3 \times 10^9\ m/s$)

5.1 จงหาโดเมนของฟังก์ชัน m หรือเงื่อนไขของ v

5.2 รถ Lamborghini Aventador รุ่นแอลพี 770-4 SVJ (ค.ศ. 2018–2021) เปิดตัวอย่างเป็นทางการในประเทศไทยในวันที่ 10 มกราคม พ.ศ. 2562 ในบริษัท Renazzo Motor ราคา 44,500,000 บาท ซึ่งเป็นรุ่นนำเข้าทั้งคัน และผลิตจำนวนจำกัดทั่วโลกเพียง 900 คัน น้ำหนักตัวรถประมาณ 1575 กิโลกรัม ความเร็วสูงสุด 350 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ถ้ารถคันนี้ใช้ความเร็วสูงสุดมวลขณะเคลื่อนที่จะมีมวลเท่าใด (ตอบในรูปทศนิยม 6 ตำแหน่ง)

6. จากสมการของไอสไตน์ที่ว่า $E = mc^2$ เมื่อ E คือพลังงาน m คือมวล และ c คือความเร็วแสง จงอธิบายว่าพลังงานเป็นฟังก์ชันที่ขึ้นกับตัวแปรใด เพราะเหตุใด

7. จากกฎข้อที่ 3 ของนิวตันได้แสดงความสัมพันธ์ระหว่างแรงระหว่างสองวัตถุมวล m_1 และ m_2 ระยะห่างระหว่างวัตถุทั้งสอง เท่ากับ r เมตร แล้วจะมีแรงดึงดูด F ระหว่างมวลวัตถุทั้งสอง คือ

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

เมื่อ G คือตัวคงที่ความโน้มถ่วงสากล มีค่าเท่ากับ $6.67 \times 10^{-11}\ m^3Kg^{-1}s^2$

7.1 เมื่อให้มวลทั้งสองคงที่ จงเขียนฟังก์ชันระยะทาง r ในรูปแรงดึงดูด F

7.2 ถ้าขยับวัตถุทั้งสองออกห่างจากกันเป็น 2 เท่าของระยะเดิม แรงดึงดูดที่เกิดขึ้นใหม่ลดลงกี่เปอร์เซ็นต์

8. กำหนดให้

$$f(x) = 1 - 2x \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \frac{1}{x}$$

จงหาค่าต่อไปนี้

8.1 $(f+g)(1)$

8.2 $(f-g)(3)$

8.3 $(fg)(-2)$

8.4 $(f/g)(-1)$

2.3 ฟังก์ชันผกผันและประกอบ

จากหัวข้อที่ผ่านมาความสัมพันธ์ผกผันย่อมเป็นความสัมพันธ์ แต่สำหรับฟังก์ชันเมื่อผกผันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไปเช่น

ฟังก์ชัน $f = \{(1,2),(3,2)\}$ เมื่อผกผันจะได้ $f^{-1} = \{(2,1),(2,3)\}$ ไม่เป็นฟังก์ชัน

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงฟังก์ชันลักษณะใดที่ผกผันแล้วยังเป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม 2.3.1 ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันผกผันได้** (Invertible function) ก็ต่อเมื่อ

$$f^{-1} = \{(y,x) \mid (x,y) \in f\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

และเรียก f^{-1} ว่า**ฟังก์ชันผกผัน** (Inverse function) ของ f

ตัวอย่าง 2.3.2 จงตรวจสอบว่า

$$f = \{(1,2),(2,3),(3,4)\} \text{ และ } g = \{(1,2),(2,1),(3,2)\}$$

ฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่

ทฤษฎีบท 2.3.3 ให้ $f : A \to B$ แล้วจะได้ว่า

f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชัน 1-1

ทฤษฎีบท 2.3.4 $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ

$f^{-1} : B \to A$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง

ตัวอย่าง 2.3.5 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่ และหา f^{-1}

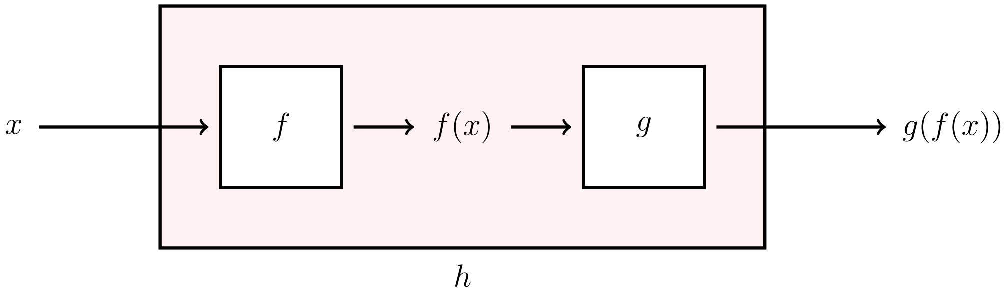
1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^2$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x + 1$

3. $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$

ตัวอย่าง 2.3.6 ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ จงหา $f^{-1}(x)$

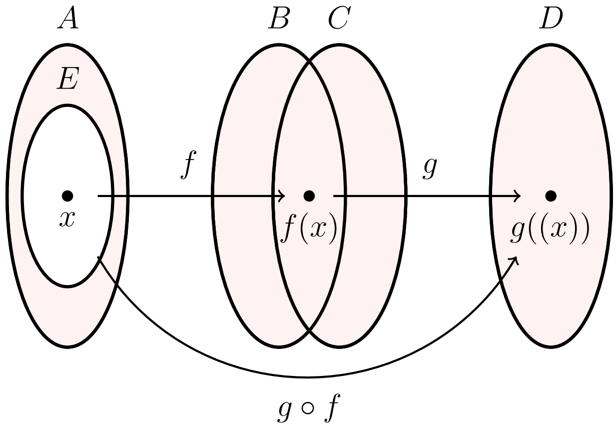
ถ้าเปรียบเทียบฟังก์ชันคือเครื่องจักรชิ้นหนึ่งเรียกว่า f เมื่อใส่ x หรือ input เข้าไปในเครื่องจะได้ $f(x)$ ออกมาตามหน้าที่ของเครื่องจักรชนิดนั้น จากแนวคิดนี้เมื่อประกอบเครื่องจักรอีกเครื่องที่เรียกว่า g อีกชิ้น โดยนำ $f(x)$ หรือ output จากเครื่องจักร f ใส่เข้าไปในเครื่องจักร g แล้วได้ผลเป็น $g(f(x))$ เรียกเครื่องจักรประกอบจากสองชิ้นนี้ว่า h ดังแผนภาพ



จะเรียกฟังก์ชัน h ที่ได้จากแนวคิดนี้ว่า **ฟังก์ชันประกอบ** (Composite function)

บทนิยาม 2.3.7 ให้ $f : A \to B$ และ $g : C \to D$ และ $E = \{x \in A \mid f(x) \in C\}$ นิยามฟังก์ชันประกอบของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ ถ้า $E = \varnothing$ แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันว่าง และถ้า $E \neq \varnothing$

$$g \circ f : E \to D \text{ กำหนดโดย } g \circ f(x) = g(f(x))$$



ข้อสังเกต

1. $\text{Dom}(g \circ f) = E = \{x \mid x \in \text{Dom}(f) \text{ และ } f(x) \in \text{Dom}(g)\}$
2. กรณีที่ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ จะได้ว่า $g \circ f : A \to C$

ตัวอย่าง 2.3.8 ให้ $f = \{(1,2),(2,3),(3,4),(5,1)\}$ และ $g = \{(2,3),(3,2),(4,5),(5,4)\}$ จงหา $g \circ f$ และ $f \circ g$

ตัวอย่าง 2.3.9 กำหนดให้ $f(x) = \sqrt{x^2}$ และ $g(x) = x - \dfrac{1}{x}$ จงหา

1. $f \circ g(1)$
2. $g \circ f(-2)$

ตัวอย่าง 2.3.10 จงหา $g \circ f(x)$ และ $f \circ g(x)$ พร้อมบอกเงื่อนไขของ x เมื่อกำหนดให้

$$f(x) = \sqrt{x} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = x^2$$

ตัวอย่าง 2.3.11 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ จงหา

1. $f \circ f(x)$
2. $f^{-1}(x)$

ทฤษฎีบท 2.3.12 ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ แล้ว f^{-1} เป็นฟังก์ชันผกผันได้ และ

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

ทฤษฎีบท 2.3.13 กำหนดให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ เป็นฟังก์ชัน 1-1 แบบทั่วถึง จะได้ว่า

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

ตัวอย่าง 2.3.14 กำหนดให้ $f^{-1}(x) = 3x - 2$ และ $g(x) = 1 + 2x$ จงหา

1. $(g \circ f)^{-1}(x)$
2. $(f \circ g)^{-1}(x)$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

   1.1 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 1 - 2x$

   1.2 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^3 + 1$

   1.3 $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$

   1.4 $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt{x}$

2. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x|x|$ จงหา $f^{-1}(x)$

3. จงหาสูตรของ $f^{-1}(x)$ ของฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ที่กำหนดโดย

   3.1 $f(x) = 3x - 2$

   3.2 $f(x) = 5 + 4x$

   3.3 $f(x) = 1 - x^3$

   3.4 $f(x) = \dfrac{x+1}{3}$

   3.5 $f(x) = \dfrac{3x+1}{2}$

   3.6 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

4. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x + 2$ จงหา $f(f(f(x+1)))$

5. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = 2x - 1$ จงหา a ที่ทำให้ $f \circ f(f(f(a))) = 17$

6. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ถ้า $f^{-1}(x) = 3x - 7$ จงหา $f(-1) + f(2)$

7. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ถ้า $f(x) = 2^x$ จงหา $f^{-1}(4)f^{-1}(8)f^{-1}(16)$

8. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่

   8.1 ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

   8.2 ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน C แล้ว g เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน C

9. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ถ้า $f(x) = xe^x$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

2.4 ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง

บทนิยาม 2.4.1 ให้ $a \in \mathbb{R}$ และ $n \in \mathbb{N}$ เรียก a^n ว่า **เลขยกกำลัง** (power of a number) นิยามโดย

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ ตัว}}$$

เมื่อ a เรียกว่า **ฐาน** (basis) และ n เรียกว่า **เลขชี้กำลัง** (exopnent)
นิยาม $a^0 = 1$ และ $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ เมื่อ $a \neq 0$

สมบัติเบื้องต้นของเลขยกกำลัง ให้ a, b เป็นจำนวนจริง และ x, y เป็นจำนวนเต็ม

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$
2. $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ เมื่อ $a \neq 0$
3. $(a^x)^y = a^{xy}$
4. $(ab)^x = a^x b^y$
5. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ เมื่อ $b \neq 0$

ตัวอย่าง 2.4.2 ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงจัดพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

$$\frac{2 \cdot 2^{2n+3} - 24 \cdot 2^{2(n-1)}}{10(2^n)^2}$$

ตัวอย่าง 2.4.3 ให้ x, a, b, c เป็นจำนวนจริงบวก แล้วพจน์ต่อไปนี้มีค่าเท่าใด

$$\frac{1}{1 + x^{a-b} + x^{a-c}} + \frac{1}{1 + x^{b-c} + x^{b-a}} + \frac{1}{1 + x^{c-a} + x^{c-b}}$$

ตัวอย่าง 2.4.4 กำหนดให้ $3^x = 5$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. 9^x
2. 27^x
3. 3^{-x}
4. $9^x + 9^{-x}$

ตัวอย่าง 2.4.5 กำหนดให้ $2^x + 2^{-x} = 3$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. $4^x + 4^{-x}$
2. $4^x - 4^{-x}$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $A \times 10^n$ เมื่อ $1 \leq A < 9$ และ n เป็นจำนวนเต็ม

1. $360000 + 4 \times 10^2$
2. $2 \times 10^{-4} - 2 \times 10^{-5}$

ถ้า $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงนิยาม $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ ขยายแนวคิดเลขชี้กำลังเป็นจำนวนตรรกยะ เมื่อ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่งตัวหารร่วมมากของ m และ n เท่ากับ 1 ถ้า นิยาม $\sqrt[n]{a}$ เป็นจำนวนจริงนิยาม

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

ตัวอย่าง 2.4.7 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $(\sqrt{2} + \sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{32})^2$

2. $\left(\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{15}}\right)^2$

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาค่าของ $|1 - \sqrt{2}| + |2 - \sqrt{2}|$

ให้ a เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a > 0$ และ $a \neq 1$ เรียก

$$\{(x, y) : y = a^x\}$$

ว่า**ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง** (exponential function) เนื่องจากฟังก์ชันเลขชี้กำลังเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง จะได้ว่ามีฟังก์ชันผกผัน ดังนั้นเรียกว่าฟังก์ชันผกผันของฟังก์ชันเลขชี้กำลังว่า **ฟังก์ชันลอการิทึม** (logarithmic function) เขียนแทนด้วย $y = \log_a x$ นิยามโดย

$$y = \log_a x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = a^y$$

ดังนั้น $\log_a 1 = 0$ และ $\log_a a = 1$ ในกรณีที่ $a = 10$ เรียกว่า **ลอการิทึมสามัญ** (common logarithm) เขียนแทนด้วย $\log x$ และกรณี $a = e$ เรียกว่า **ลอการิทึมธรรมชาติ** (natural logarithm) เขียนแทนด้วย $\ell\text{n}x$ โดยที่ e คือ **ค่าคงตัวออยเลอร์** (Euler's constant) ซึ่งเป็นจำนวนอตรรกยะมีค่าประมาณ $2.71828182845...$

ทฤษฎีบท 2.4.9 ให้ x, y เป็นจำนวนจริงบวก และ m เป็นจำนวนตรรกยะ โดยที่ $a > 0$ และ $a \neq 1$ จะได้ว่า

1. $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
2. $\log_a \left(\dfrac{y}{x}\right) = \log_a y - \log_a x$
3. $\log_a x^m = m\log_a x$
4. $a^{\log_a x} = x$

สำหรับ $a, b > 0$ และ $a, b \neq 1$ สามารถเปลี่ยนฐานของลอการิทึมได้โดย

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

ตัวอย่าง 2.4.10 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\log 100$
2. $\log 5 + \log 2$
3. $\log_5 100 - \log_5 4$
4. $\log_2 \sqrt{2} + \log_2 \sqrt[3]{2}$
5. $\ell\text{n}e^2$
6. $\ell\text{n}2e - \ell\text{n}2$

ตัวอย่าง 2.4.11 กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 3 = 0.4771$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. $\log 6$
2. $\log 5$

ตัวอย่าง 2.4.12 กำหนดให้ $\log 2 = 0.3010$ และ $\log 3 = 0.4771$ จงหา x ที่ทำให้

1. $3^x = 2$
2. $6^x = 2$
3. $2^{x+2} = 3^x$
4. $5 \cdot 9^{x-1} = 2^{x+1}$

ระดับความเข้มเสียง (Sound Intensity Level : SIL) ถูกกำหนดโดย อเล็กซานเดอร์ เกรแฮม เบลล์ (Alexander Graham Bell) กำหนดโดย

$$\beta = 10\log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

เมื่อ β คือระดับความเข้มเสียง หน่วยเป็นเดซิเบล (dB)
I คือความเข้มเสียงจากแหล่งกำเนิดเสียงที่ตำแหน่งหนึ่ง มีหน่วยเป็น W/m^2
I_0 คือความเข้มเสียงต่ำสุดที่มนุษย์ได้ยินมีค่าเท่ากับ $10^{-12}\,W/m^2$

ระดับความเข้มเสียงนั้นไม่สามารถตรวจวัดได้ แต่**ระดับความดันเสียง** (Sound Pressure Level : SPL) นั้นสามารถตรวจวัดได้ โดยมีค่าเท่ากันกับระดับความเข้มเสียง

$$B = 20\log\left(\frac{P}{P_0}\right)$$

เมื่อ B คือระดับความดันเสียง หน่วยเป็นเดซิเบล (dB)
P คือความดันเสียงจากแหล่งกำเนิดเสียงที่ตำแหน่งหนึ่ง มีหน่วยเป็น N/m^2
P_0 คือความดันเสียงต่ำสุดที่มนุษย์ได้ยินมีค่าเท่ากับ $2 \times 10^{-5}\,N/m^2$

ตัวอย่างเสี่ยง	**ระดับเสียง** (dB)	**ความรู้สึก**
เสียงเครื่องบินเจ็ต	140	ดังสุด ๆ
เสียงที่ทำให้เริ่มปวดหู	130	
เสียงคอนเสริต์เพลงร๊อค	120	
เสียงเพลงแดนซ์ในผับ	110	
เสียงในโรงงาน	100	ดังมาก
เสียงเครื่องตัดหญ้า	90	
เสียงนกหวีด	80	ดัง
เสียงเครื่องดูดฝุ่น	70	
เสียงพูดคุยทั่วไป	60	ปานกลาง
เสียงฝนตกเบา ๆ	50	
เสียงในห้องสมุด	40	เบา
เสียงในห้องนอนตอนกลางคืน	30	
เสียงกระซิบ	20	เบามาก
เสียงลมหายใจ	10	
เสียงที่เริ่มได้ยิน	0	

* ไม่ควรฟังเสียงที่มีมากกว่า 85 เดซิเบล ขึ้นไปเป็นเวลาหลายชั่วโมงเพราะจะทำให้สูญเสียการได้ยิน

ตัวอย่าง 2.4.13 ถ้าเสียงนกหวีดดัง 80 เดซิเบล จงหาความดันเสียงของนกหวีด

ตัวอย่าง 2.4.14 จงหาความดันเสียงเริ่มต้นที่ไม่ควรรับฟังเป็นเวลาหลายชั่วโมงเพราะจะทำให้สูญเสียการได้ยิน

ตัวอย่าง 2.4.15 ผลต่างของระดับความเข้มเสียงจากแหล่งกำเนิดสองแหล่งเท่ากับ 30 เดซิเบล ความเข้มเสียงจากแหล่งหนึ่งเท่ากับ $10^{-7}\, W/m^2$ จงหาความเข้มเสียงจากแหล่งที่สอง

จำนวนโมเลกุล(หรือนิวเคียส) ที่มีอยู่ขณะเวลา t

$$N = N_0 e^{-\lambda t}$$

เมื่อ N คือจำนวนโมเลกุลที่มีอยู่ขณะเวลา t

N_0 คือจำนวนโมเลกุลที่มีอยู่เดิมตอนเริ่มต้น

λ คือค่าคงที่การสลายตัว (decay constant) มีหน่วยเป็น (หน่วยเวลา)$^{-1}$

ครึ่งชีวิต (Half Life) หมายถึงระยะเวลาที่สารสลายตัวไปจนเหลือเพียงครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม นิวเคลียสของธาตุกัมมันตรังสีที่ไม่เสถียรจะสลายตัวและแผ่รังสีได้เองตลอดเวลาโดยไม่ขึ้นอยู่กับอุณหภูมิหรือความดัน อัตราการสลายตัวจะบอกเป็นครึ่งชีวิตซึ่งเป็นสมบัติเฉพาะตัวของธาตุแต่ละไอโซโทป

ไอโซโทปกัมมันตรังสี	ครึ่งชีวิต
เรดอน -220	52 วินาที
ไอโอดีน -128	25 นาที
โคบอล -60	5.24 ปี
สตรอนเทียม-90	28 ปี
เรเดียม-226	1,602 ปี
คาร์บอน-14	5,730 ปี
พลูโตเนียม-239	24,400 ปี
ยูเรเนียม-228	4,500,000,000 ปี

ตัวอย่าง 2.4.16 จงหาครึ่งชีวิต (half-life) เมื่อจำนวนโมเลกุลสลายไปครึ่งหนึ่งจากตอนเริ่มต้น ในเทอมของ λ พร้อมหาค่าคงที่การสลายตัวของกัมมันรังสีของตารางด้านบน

ตัวอย่าง 2.4.17 สตรอนเทียม-90 จำนวน 1 มิลลิกรัม นานเท่าใดสตรอนเทียมจึงจะเหลือ 250 ไมโครกรัม

ตัวอย่าง 2.4.18 กะโหลกศรีษะมนุษย์โบราณวัดค่า คาร์บอน-14 ได้เป็น 0.682 เท่าของคาร์บอน-14 ที่พบในกะโหลกศรีษะ มนุษย์ที่มีชีวิต กะโหลกศรีษะมนุษย์โบราณนี้มีอายุกี่ปี

ตัวอย่าง 2.4.19 เก็บเปลือกหอยจากทะเลแห่งหนึ่งมาวัดแอกติวิตีของ คาร์บอน-14 ได้ 7 ครั้งของการสลายตัวต่อนาทีต่อกรัม จงคำนวณหาอายุของเปลือกหอย

แบบฝึกหัด 2.4

1. ให้ n เป็นจำนวนเต็มบวก จงจัดพจน์ต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปอย่างง่าย

   1.1 $\dfrac{3^{n+4}-6\cdot 3^{n+1}}{3^{n+2}\cdot 7}$ 1.2 $\dfrac{9^{2+n}+3^{3+2n}}{3^{2n+1}\cdot 4}$

2. กำหนดให้ $2^x = 3$ จงหาค่าต่อไปนี้

   2.1 4^x 2.4 2^{-x}

   2.2 8^x 2.5 4^x+4^{-x}

   2.3 16^{-2x} 2.6 4^x-8^{-x}

3. กำหนดให้ $(3^x-3^{-x})^2 = 5$ จงหาค่าต่อไปนี้

   3.1 9^x+9^{-x} 3.2 3^x+3^{-x}

4. จงหาค่าของ $(1-\sqrt{2})^2(2+\sqrt{8})^2(1+\sqrt{2})^3(2-\sqrt{8})^3$

5. สำหรับจำนวนจริงบวก a, x ใด ๆ จงหาค่าของ $\dfrac{a^{\frac{1}{x+1}}}{a^{\frac{1}{x+1}}+\sqrt{a}}+\dfrac{a^{\frac{x}{x+1}}}{a^{\frac{x}{x+1}}+\sqrt{a}}$

6. สำหรับจำนวนจริงบวก n ใด ๆ จงหาแสดงว่า $\sqrt{n(n+1)(n+2)(n+3)+1} = n(n+3)+1$

7. จงใช้ผลจากข้อ 6 หาค่าต่อไปนี้

   7.1 $\sqrt{100\cdot 101\cdot 102\cdot 103+1}$ 7.2 $\sqrt{2^{10}(4^{10}-1)(2^{10}+2)+1}$

8. จงหาค่าของ $|3-\sqrt{3}|+|1-\sqrt{3}|$

9. จงหาค่าของ $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

10. กำหนดให้ $A = \dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}$
    แล้ว $10A$ มีค่าเท่าใด

11. ณ จุดซึ่งอยู่ห่างจากแหล่งกำเนิดเสียงแหล่งหนึ่งมีระดับความเข้มเสียง 60 เดซิเบล ณ จุดนั้นจะมีค่าความเข้มเสียง เท่าใด

12. กองเชียร์สีแดง 1 คน รองเพลงเชียร์กรรมการได้ยินเสียงที่มีระดับความเข้มของเสียง 60 เดซิเบล ถ้ากองเชียร์สีแดง 100 คน รองเพลงเชียร์พร้อมกันกรรมการ จะได้ยินเสียงที่มีระดับความเข้มเท่าไร

13. ในสนามบินแห่งหนึ่งวัดระดับความเข้มเสียงได้ 110 เดซิเบล ผู้ควบคุมใช้เครื่องป้องกันเสียงซึ่งลดความเข้มเสียงได้ 96% ผู้ควบคุมจะได้ยินเสียงระดับความเข้มเสียงเท่าใด

14. ถ้าระดับความเข้มเสียงจากแหล่งกำเนิดเสียงหนึ่งเปลี่ยนจาก 20 เดซิเบลเป็น 40 เดซิเบล ความเข้ม เสียงเพิ่มขึ้นกี่เท่า

15. ระดับความเข้มเสียงในโรงงานแห่งหนึ่งมีค่า80 เดซิเบล คนงานผู้หนึ่งใส่เครื่องครอบหูซึ่งสามารถลดระดับ ความเข้มลงเหลือ 60 เดซิเบล เครื่องดังกล่าวลดความเข้มเสียงลงกี่เปอร์เซ็นต์

16. สารกัมมันตรังสี 1 กรัม ครึ่งชีวิตเป็น 100 วินาที หลังจากที่เวลาผ่านไปนาน 5 นาที สารกัมมันตรังสีนี้จะสลายตัวไปเป็นจำนวนเท่าใด

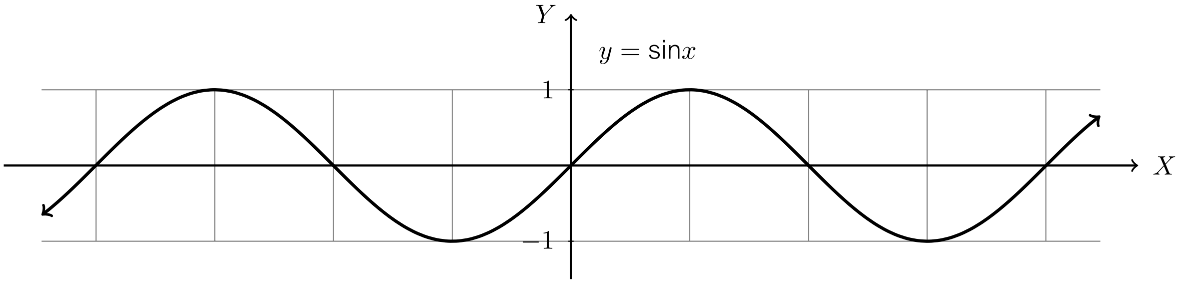
17. ถ้าเรเดียม-226 มีจำนวนอะตอม 2.66×10^{21} อะตอม จงคำนวณหาจำนวนอะตอมของเรเดียมที่เหลือ เมื่อเวลาผ่านไป 8,000 ปี

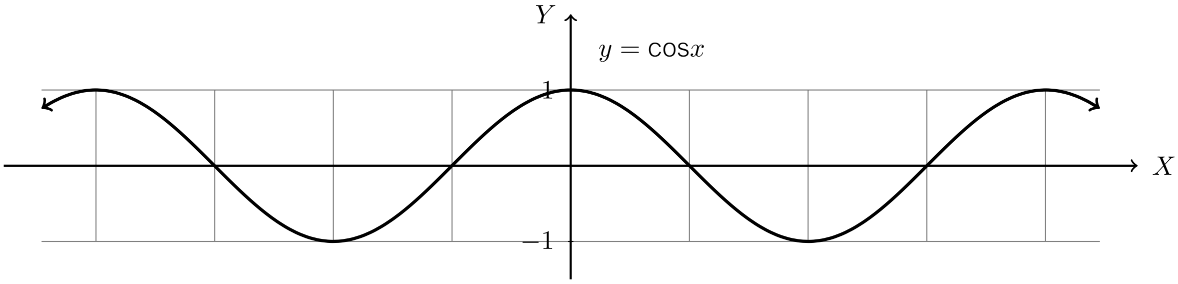
18. สารกัมมันตภาพรังสีจำนวนหนึ่งเมื่อทิ้งไว้ 2 ชั่วโมง ปรากฏว่าสลายตัวไปจำนวน $\frac{15}{16}$ เท่า ของเดิม จงหาค่าช่วงเวลาครึ่งชีวิตของสารนี้

19. ซากเรือโบราณทำด้วยไม้ นำไม้มาส่วนหนึ่งทำการเผา พบว่าได้ CO_2 7.32 กรัม วัด กัมมันตภาพรังสีใน CO_2 ได้เท่ากับ 10.8 dis/min จงคำนวณหาอายุของซากเรือโบราณนี้ เมื่อครึ่งชีวิตของคาร์บอน-14 เท่ากับ 5730 ปี (มวลอะตอมของ C = 12, O = 16)

2.5 ฟังก์ชันตรีโกณมิติ

ให้ $x \in \mathbb{R}$ จะเรียก $y = \sin x$ ว่า**ฟังก์ชันไซน์** (sine function) และ $y = \cos x$ ว่า**ฟังก์ชันโคไซน์** (cosine function) แสดงกราฟได้ดังนี้ โดยแกน X มีความกว้างช่องละ $\frac{\pi}{2}$





จะเห็นว่ากราฟของฟังก์ชันทั้ง 2 มีรูปแบบซ้ำ ๆ กัน จะเรียกว่ากราฟของ **ฟังก์ชันคาบ** (periodic function) โดยมีคาบเท่ากับ $T > 0$ ซึ่งมีค่าน้อยสุดที่ทำให้

$$f(x+T) = f(x) \quad \text{ทุก } x \in \text{Dom}(f)$$

ความยาวที่วัดได้จากแกนสมมาตรไปยังจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุดของกราฟเรียกว่า **แอมพลิจูด** (amplitude) และส่วนกลับของคาบเรียกว่า **ความถี่** (frequency)

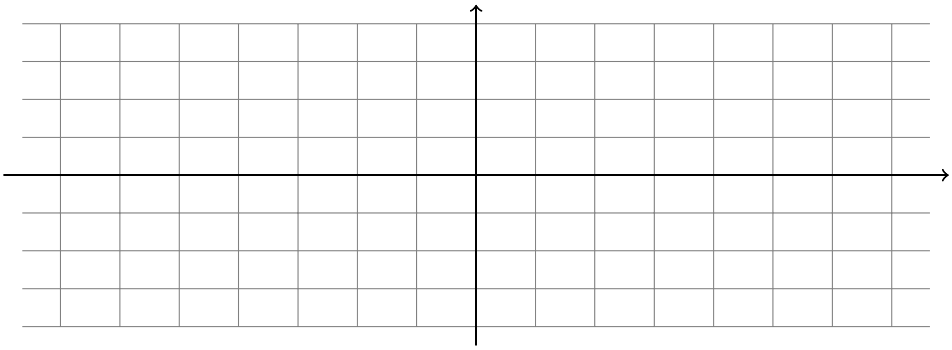
ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์	คาบ	ความถี่	แอมพลิจูด
ไซน์	$y = \sin x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$\frac{1}{2\pi}$	1
โคไซน์	$y = \cos x$	$\mathbb{R}$	$[-1, 1]$	2π	$\frac{1}{2\pi}$	1

กำหนดให้ A และ k เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ จงเติมตารางให้สมบูรณ์

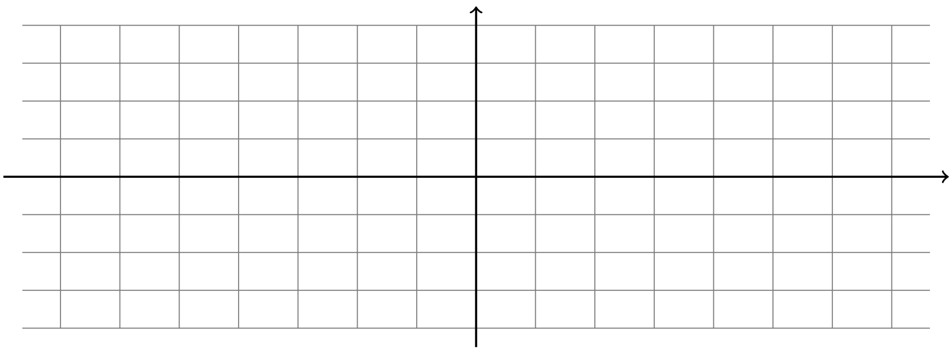
ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์	คาบ	ความถี่	แอมพลิจูด
ไซน์	$y = A\sin kx$					
โคไซน์	$y = A\cos kx$					

ตัวอย่าง 2.5.1 จงวาดกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอก โดเมน เรจน์ คาบ และแอมพลิจูด

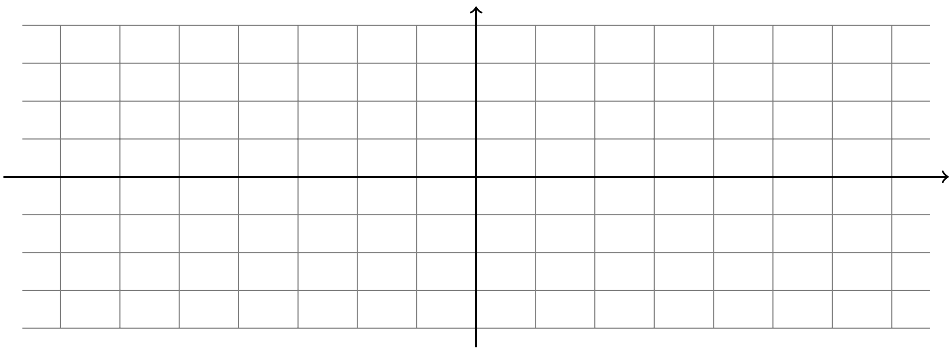
1. $y = 3\sin 2x$



2. $y = -2\cos(\frac{1}{2}x)$



3. $y = 1 + 2\sin(4x)$



กำหนดให้ A และ k เป็นจำนวนจริงที่ไม่ใช่ศูนย์ โดยที่ $c, d \in \mathbb{R}$ จงเติมตารางให้สมบูรณ์

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์	คาบ	ความถี่	แอมพลิจูด
ไซน์	$y = d + A\sin(kx + c)$					
โคไซน์	$y = d + A\cos(kx + c)$					

ไฟฟ้ากระแสสลับ (Alternating Current : AC) จะมีฟังก์ชันของกระแสไฟฟ้า (i) และความต่างศักย์ (v) ที่ขึ้นกับเวลาในหน่วยวินาที ในรูปฟังก์ชันต่อไปนี้

$$i = I_m \text{sin}\omega t \quad \text{แอมแปร์} \quad \text{และ} \quad v = V_m \text{sin}\omega t \quad \text{โวลต์}$$

เมื่อ $\omega = 2\pi f$ โดยที่ f คือความถี่มีหน่วยเป็นรอบต่อวินาที หรือเฮิรตซ์ (Hz) เรียกค่าได้จากว่า

$$I_{rms} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \qquad \text{และ} \qquad V_{rms} = \frac{V_m}{\sqrt{2}}$$

ว่า**ค่ายังผล** (effective value) หรือ **ค่าเฉลี่ยกำลังสอง** (root mean square)
หมายเหตุ ค่ายังผลคือค่าที่ได้อ่านจากเครื่องวัด (แอมมิเตอร์หรือโวลต์มิเตอร์)

ตัวอย่าง 2.5.2 จงบอกความถี่ของไฟฟ้ากระแสสลับ และกระแสไฟฟ้าสูงสุด และค่ายังผลของกระแสไฟฟ้า ที่มีสมการ

$$i = 2\sqrt{2}\text{sin}(100\pi t) \qquad \text{แอมแปร์}$$

ตัวอย่าง 2.5.3 เมื่อใช้โวลต์มิเตอร์วัดความต่างศักย์ของไฟฟ้าในบ้าน ปรากฏว่าอ่านค่าได้ 120 โวลต์ ถ้ากระแสไฟฟ้านี้มีความถี่ 60 เฮิรตซ์ จงหา

1. ความต่างศักย์สูงสุด

2. สมการความต่างศักย์ขณะเวลาใด ๆ

วัตถุหนึ่งมี**การเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก** (Simple Hamonic Motion : SHM) อธิบายความสัมพันธ์ของแรงที่แปรผันตรงกับระยะทาง ด้วย กฎของฮุก (Hooke's law) คือ

$$F = -kx$$

เมื่อ F คือแรงที่กระทำกับวัตถุ x คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุล
และ k ค่าคงตัวสปริง ให้ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ จะได้ x ในรูป

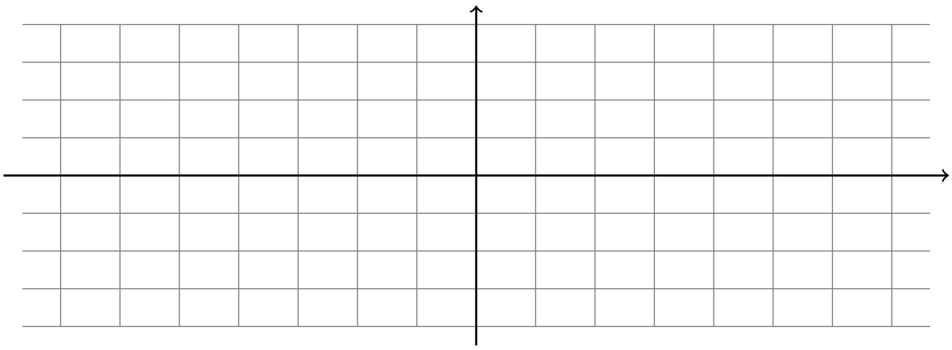
$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

เรียก ϕ ว่า **เฟสเริ่มต้น** (initial phase)

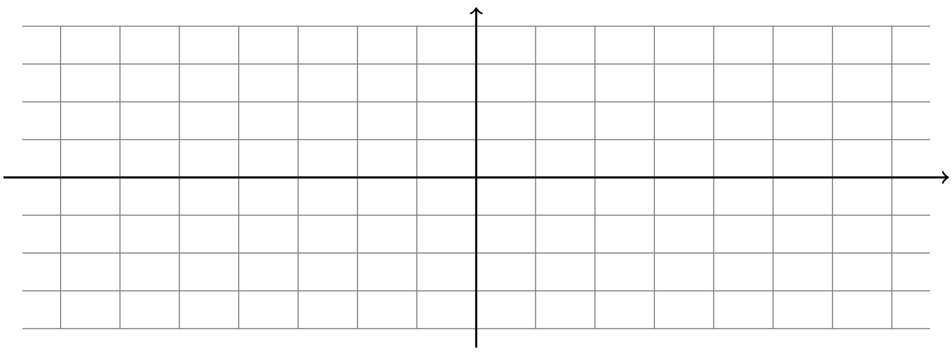
ตัวอย่าง 2.5.4 วัตถุมวล 1 กิโลกรัมผูกติดกับสปริงบนพื้นลื่น ถ้าสปริงมีค่าคงตัว 100 นิวตันต่อเมตร เมื่อออกแรงกระทำกับวัตถุโดยดึงออกมาจากตำแหน่งสมดุล 80 เซนติเมตร ทำให้สปริงเคลื่อนแบบ SHM จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

จงวาดกราฟต่อไปนี้ ของฟังก์ชันตรีโกณมิติอีก 4 ฟังก์ชันที่เหลือ

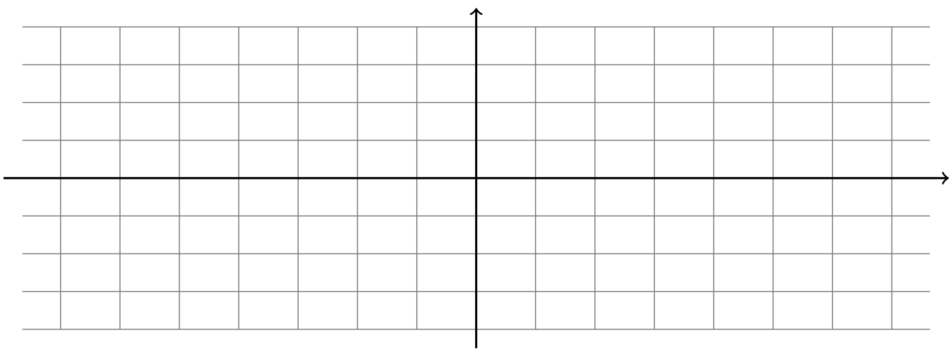
1. $y = \tan x$



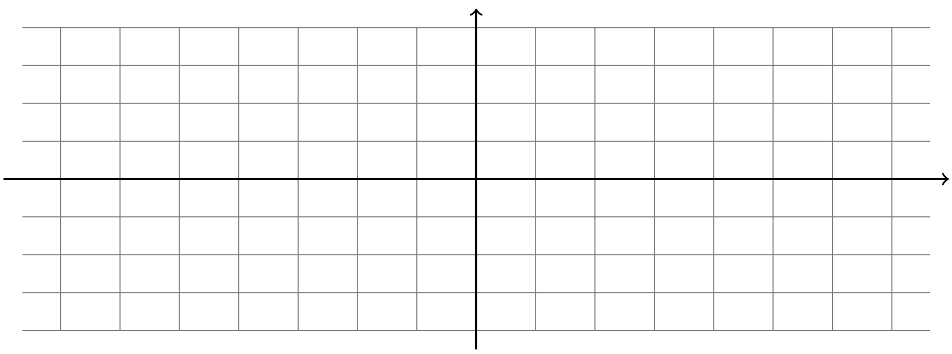
2. $y = \cot x$



3. $y = \sec x$



4. $y = \csc x$



นิยามฟังก์ชันตรีโกณมิติอีก 4 ฟังก์ชันคือ ฟังก์ชันแทนเจนต์ (tangent fuction) ฟังก์ชันโคแทนเจนต์ (cotangent fuction) ฟังก์ชันเซแคนต์ (secant fuction) และฟังก์ชันโคเซแคนต์ (cosecant fuction) ได้ในทำนองเดียวกัน เรียกฟังก์ชันทั้ง 6 ว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric function)** สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์
แทนเจนต์	$y = \text{tan}x = \dfrac{\text{sin}x}{\text{cos}x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$\mathbb{R}$
โคแทนเจนต์	$y = \text{cot}x = \dfrac{\text{cos}x}{\text{sin}x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R}$
เซแคนต์	$y = \text{sec}x = \dfrac{1}{\text{cos}x}$	$\mathbb{R} - \left\{\frac{(2n-1)\pi}{2} : n \in \mathbb{Z}\right\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$
โคเซแคนต์	$y = \text{arccsc}x = \dfrac{1}{\text{sin}x}$	$\mathbb{R} - \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

ตัวอย่าง 2.5.5 จงบอก คาบ และแอมพลิจูด (ถ้ามี) ของฟังก์ชันตรีโกณมิติทั้ง 4

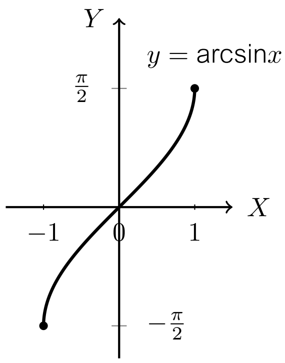
จะเห็นว่าฟังก์ชันไซน์และโคไซน์ไม่เป็นฟังก์ชัน 1-1 ดังนั้นการศึกษาฟังก์ชันผกผันจึงต้องกำหนดโดเมนเพื่อให้เป็นฟังก์ชัน 1-1 ฟังก์ชันไซน์มีโดเมนเป็น $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ และฟังก์ชันโคไซน์มีโดเมน $[0, \pi]$

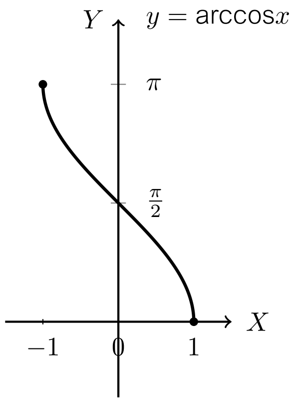
1. เรียกฟังก์ชันผกผันของไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กไซน์ (arcsine function)** เขียนแทนด้วย arcsin นิยามโดย

$$y = \text{arcsin}x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \text{sin}y \quad \text{เมื่อ} \quad y \in [-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}]$$

2. เรียกฟังก์ชันผกผันของโคไซน์ว่า **ฟังก์ชันอาร์กโคไซน์ (arccosine function)** เขียนแทนด้วย arccos นิยามโดย

$$y = \text{arccos}x \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x = \text{cos}y \quad \text{เมื่อ} \quad y \in [0, \pi]$$





ในทำนองเดียวกันฟังกชันผกผันอีก 4 ฟังก์ชันคือ อาร์กแทนเจนต์ (arctangent function) อาร์กโคแทนเจนต์ (arccotangent function) อาร์กเซแคนต์ (arcsecant function) และอาร์กโคเซแคนต์ (arccosecant function) เรียกฟังก์ชันทั้ง 6 ว่า **ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (inverse trigonometric function)** สรุปได้ดังตารางต่อไปนี้

ฟังก์ชัน	$y = f(x)$	โดเมน	เรจน์
อาร์กไซน์	$y = \text{arcsin}x$	$[-1, 1]$	$[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
อาร์กโคไซน์	$y = \text{arccos}x$	$[-1, 1]$	$[0, \pi]$
อาร์กแทนเจนต์	$y = \text{arctan}x$	$\mathbb{R}$	$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
อาร์กโคแทนเจนต์	$y = \text{arccot}x$	$\mathbb{R}$	$(0, \pi)$
อาร์กเซแคนต์	$y = \text{arcsec}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi]$
อาร์กโคเซแคนต์	$y = \text{arccsc}x$	$(-\infty, -1] \cup [1, \infty)$	$[-\frac{\pi}{2}, 0) \cup (0, \frac{\pi}{2}]$

ตัวอย่าง 2.5.6 จงหาค่าต่อไปนี้

1. arcsin$(\frac{1}{2})$
2. arctan(1)
3. arcsec(2)
4. arcsin(-1)
5. arccos$(-\frac{1}{2})$
6. arctan$(-\sqrt{3})$

ตัวอย่าง 2.5.7 จงหาค่า sin(arcsin$\frac{4}{5} + 30°$)

ตัวอย่าง 2.5.8 จงหาค่า $x \in [0, \pi]$ ที่สอดคล้องสมการ

$$\sin x \cos x = 0.5$$

ตัวอย่าง 2.5.9 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งแบบ SHM คือ

$$y = 10\cos(1000t + \pi) \qquad \text{เมตร}$$

เมื่อ t คือเวลามีหน่วยเป็นวินาที
จงหาเวลาในช่วง 0 ถึง 1 วินาที ที่ทำให้การกระจัด (y) นี้เท่ากับ 10 เมตร

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงวาดกราฟต่อไปนี้ พร้อมทั้งบอก โดเมน เรจน์ คาบ และแอมพลิจูด

   1.1 $y = -2\sin 2x$
   1.2 $y = 2\cos 3x$
   1.3 $y = 3 - 2\cos x$
   1.4 $y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$
   1.5 $y = \tan 2x$
   1.6 $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$
   1.7 $y = \sin x - \cos x$
   1.8 $y = (\sin x + \cos x)^2$
   1.9 $y = \sin x\cos x$
   1.10 $y = \cos^4 x - \sin^4 x$

2. กำหนดให้ f เป็นฟังก์ชันที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$f(x+5) = f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in \mathbb{R}$$

   กำหนดให้ $f(0) = 0$ และ $f(x) > 0$ ทุก ๆ $x \in (0, 5)$ จงตอบคำถามต่อไปนี้

   2.1 จงหา x ที่ทำให้ $f(x) = 0$
   2.2 f เป็นฟังก์ชันคาบหรือไม่ ถ้าเป็นมีคาบเท่าใด
   2.3 f มีค่าสูงสุดหรือไม่เพราะเหตุใด

3. วัตถุมวล 500 กรัมผูกติดกับสปริงบนพื้นลื่น ถ้าสปริงมีค่าคงตัว 162 นิวตันต่อเมตร เมื่อออกแรงกระทำกับวัตถุโดยดึงออกมาจากตำแหน่งสมดุล 100 เซนติเมตร ทำให้สปริงเคลื่อนที่แบบ SHM จงเขียนสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

4. จงบอกความถี่ของไฟฟ้ากระแสสลับ และกระแสไฟฟ้าสูงสุด และค่ายังผลของกระแสไฟฟ้า ที่มีสมการ

   4.1 $i = 7.07\sin(314t)$
   4.2 $i = 3\sqrt{2}\cos(300t - \frac{\pi}{2})$
   4.3 $v = 265\cos(400t)$
   4.4 $v = -100\cos(250t + \frac{\pi}{2})$

5. จงหาความต่างศักย์สูงสุดของไฟฟ้าที่ใช้ในบ้าน

6. เมื่อใช้โวลต์มิเตอร์วัดความต่างศักย์ของไฟฟ้าในบ้าน ปรากฏว่าอ่านค่าได้ 220 โวลต์ ถ้ากระแสไฟฟ้านี้มีความถี่ 100 เฮิรตซ์ จงหา

   6.1 ความต่างศักย์สูงสุด
   6.2 สมการความต่างศักย์ขณะเวลาใด ๆ

7. จงหาค่าต่อไปนี้

7.1 arcsin$(-\frac{1}{2})$

7.2 arctan(-1)

7.3 arcsec$(\sqrt{2})$

7.4 arcsin(0)

7.5 arccot$(-\sqrt{3})$

7.6 sin(arccos$(\frac{3}{5})$)

7.7 tan$(90^\circ +$ arctan$1)$

7.8 sec(arcsin$1 + 60^\circ)$

7.9 cot(arcsin$\frac{3}{5} + 90^\circ)$

7.10 csc(arcsin$\frac{3}{5} +$ arccos$\frac{3}{5})$

8. สมการการเคลื่อนที่ของคลื่นชนิดหนึ่งคือ

$$y = 24\text{cos}(1250t) \qquad \text{เมตร}$$

เมื่อ t คือเวลามีหน่วยเป็นวินาที
จงหาเวลาในช่วง 0 ถึง 1 วินาที ที่ทำให้การกระจัด (y) นี้เท่ากับ 12 เมตร

บทที่ 3

เรขาคณิตวิเคราะห์

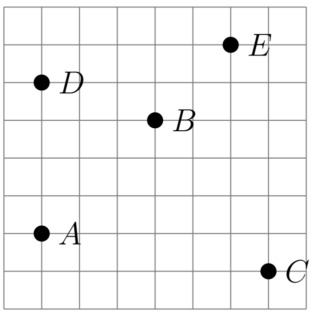
3.1 จุดและเส้นตรง

จุดในทางคณิตศาสตร์เป็นอนิยาม แต่เป็นทราบกันดีว่าจุดมีความสำคัญโดยเฉพาะการใช้บอกตำแหน่งต่าง ๆ โดยมีแกนอ้างอิง เรียกแกนในแนวนอนว่า **แกน** X (X-axis) และแกนในแนวตั้งว่า **แกน** Y (Y-axis) เรียกจุดตัดของแกนทั้งสองว่า **จุดกำเนิด** (origin) แทนด้วยคู่อันดับ $(0,0)$ ในที่นี้จะกล่าวถึงจุดคือคู่อันดับที่เป็นสมาชิกของ $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$

ระยะทาง (distance) ระหว่าง $A(x_1,y_1)$ และ $B(x_2,y_2)$ เขียนแทนด้วย $|AB|$ หรือ $d(A,B)$ นิยามโดย

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

ตัวอย่าง 3.1.1 นักเรียนคนหนึ่งสร้างแผนที่เพื่อระบุตำแหน่งของวัตถุต่าง ๆ ของพื้นที่แห่งหนึ่งโดยมีความกว้างตามแนวตั้งและแนวนอนช่องละ 1 เมตร แสดงดังภาพ



จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาระยะที่สั้นที่สุดจากจุด A ไปยังจุด B

2. จงหาระยะที่สั้นที่สุดจากจุด A ไปยังจุด D

3. นาย ก อยู่ที่จุด A ต้องการเดินไปบ้านที่จุด E แต่ต้องการไปบ้านเพื่อนที่อยู่จุด C ถามว่านาย ก จะใช้ระยะทางสั้นสุดกี่เมตร

ความชัน (slope) ของส่วนเส้นตรงที่ลากจาก $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ เขียนแทนด้วย m_{AB} บางครั้งถ้าไม่สนใจ A และ B จะเขียนย่อ ๆ ด้วย m นิยามโดย

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

เมื่อ $x_1 \neq x_2$ กรณีที่ $x_1 = x_2$ ความชันไม่มีค่าและส่วนเส้นตรง A และ B จะเป็นแส้นในแนวตั้ง

ตัวอย่าง 3.1.2 จงหาความชันของส่วนเส้นตรงที่ผ่านจุดต่อไปนี้

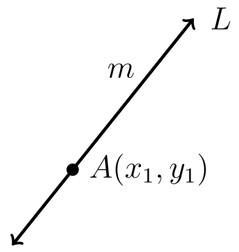
1. $(-1, 2)$ และ $(1, -2)$
2. $(0, 5)$ และ $(5, 1)$

ตัวอย่าง 3.1.3 ถ้า $(3, 4)$, $(4, a)$ และ $(5, -4)$ เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน จงหาค่า a ที่เป็นได้

ให้ $A(x_1, y_1)$ เป็นจุดและ m คือความชัน ให้ L คือเซตของจุด (x, y) โดยที่ความชันของ (x, y) และ $A(x_1, y_1)$ เท่ากับ m เรียกว่า **เส้นตรง (line)** ที่มีความชัน m ผ่านจุด A หรือหมายถึงเซต

$$L = \{(x, y) : y = m(x - x_1) + y_1\}$$

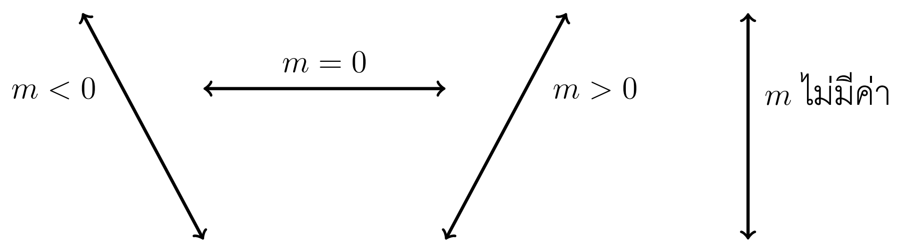
แสดงเส้นตรง L ได้ดังรูป



เรียก $y = m(x - x_1) + y_1$ ว่า **สมการเส้นตรง (equation of a line)** สามารถเขียนในรูป

$$y = mx + c$$

ในกรณีที่ $m = 0$ จะเรียก **เส้นตรงแนวนอน** (horizontal line) ซึ่งมีสมการเป็น $y = y_1$ ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด A และในกรณีที่ m หาค่าไม่ได้ จะเรียก **เส้นตรงแนวยืน** (vertical line) ซึ่งมีสมการ $x = x_1$ ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด A ดังนั้นเราอาจแบ่งเส้นตรงเป็น 4 แบบโดยใช้ความชันคือ 1. $m > 0$ 2. $m < 0$ 3. $m = 0$ และ 4. m ไม่มีค่า แสดงตัวอย่างได้ดังรูป



ตัวอย่าง 3.1.4 จงหาสมการเส้นตรงที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

1. ผ่านจุด $(4, 5)$ และมีความชัน 2
2. ผ่านจุด $(-1, 4)$ และ $(0, 3)$
3. เป็นเส้นตรงแนวนอนที่ผ่านจุด $(1, 6)$
4. เป็นเส้นตรงแนวยืนที่ผ่านจุด $(-1, 2)$

ตัวอย่าง 3.1.5 ความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุน (C) และกำไร (P) ของบริษัทแห่งหนึ่งเป็นแบบเส้นตรง ซึ่งแสดงค่าดังนี้

ต้นทุน (ล้านบาท)	1.0	1.2	1.5	1.7
กำไร (ล้านบาท)	0.25	0.29	a	0.39

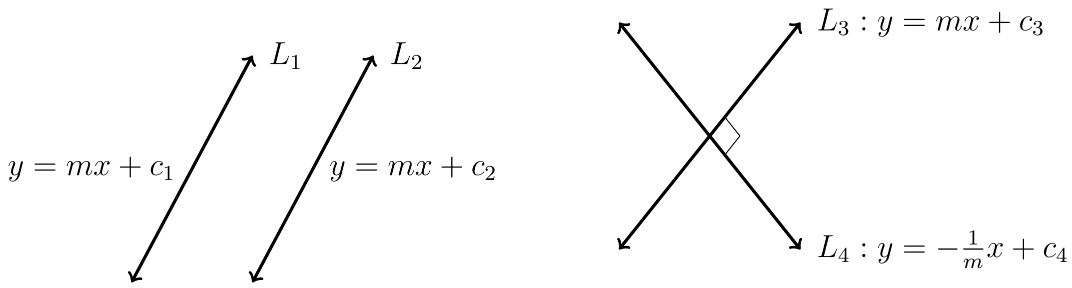
1. จงหาสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างต้นทุน (C) และกำไร (P)
2. จงหากำไรที่ได้เมื่อลงทุน 1.5 ล้านบาท

ตัวอย่าง 3.1.6 ถ้าเส้นตรงที่มีสมการ $3x + By = 12$ ที่ผ่านจุด $(2, -3)$ จะมีความชันเท่าใด

ให้เส้นตรง L_1 และ L_2 มีความชัน m_1 และ m_2 ตามลำดับ จะได้ว่า

1. L_1 **ขนาน** (parallel) กับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 = m_2$
2. L_1 **ตั้งฉาก** (perpendicular) กับ L_2 ก็ต่อเมื่อ $m_1 m_2 = -1$

อาจแสดงตัวอย่างได้ดังรูป



ในกรณีเส้นตรงที่ความชันไม่มีค่าย่อมขนานกับเส้นตรงใด ๆ ที่ความชันไม่มีค่าเสมอ เพราะทุกเส้นเป็นเส้นตรงแนวตั้ง และเส้นตรงที่ความชันไม่มีค่าย่อมตั้งฉากกับเส้นตรงใด ๆ ที่มีความชันเท่ากับ 0 หรือเส้นตรงแนวนอนเสมอ

ตัวอย่าง 3.1.7 จงเติมคำตอบในตารางให้สมบูรณ์

สมการเส้นตรง	ความชัน	ตั้งฉากกัน	ขนานกัน	อื่น ๆ
$y = 2x + 1$				
$y = 2x + 5$				
$y = 3x + 1$				
$3y + x = 3$				
$3x + 4y = 12$				
$4x + 3y = 10$				

ตัวอย่าง 3.1.8 จงหาสมการเส้นตรงที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

1. ผ่านจุด $(1, 3)$ และขนานกับเส้นตรง $2x - 3y = 5$

2. ผ่านจุด $(-1, 3)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $2x + 3y = 5$

ตัวอย่าง 3.1.9 จงใช้ความรู้เรื่องเส้นตรงแสดงว่าเส้นตรงที่ลากจากจุดยอดของสามเหลี่ยมหน้าจั่วไปแบ่งครึ่งฐานซึ่งเป็นด้านที่ไม่พิจารณาหน้าจั่ว จะเป็นเส้นตั้งฉากกับฐานเสมอ

ทฤษฎีบท 3.1.10 ระยะทางที่น้อยที่สุดจาก $A(x_1, y_1)$ ไปยังเส้นตรง L ที่มีสมการ $Ax+By+C=0$ เขียนแทนด้วย $d(A;L)$ มีค่าเท่ากับ

$$d(A;L) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ทฤษฎีบท 3.1.11 ระยะทางที่น้อยที่สุดระหว่างเส้นตรงสองเส้นที่ขนานกัน เมื่อเส้นตรง L_1 มีสมการเป็น $Ax+By+C_1=0$ และเส้นตรง L_2 มีสมการเป็น $Ax+By+C_2=0$ เขียนแทนด้วย $d(L_1, L_2)$ มีค่าเท่ากับ

$$d(L_1, L_2) = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

หมายเหตุ เราจะเรียกกล่าวย่อ ๆ ว่า "ระยะทาง" แทนระยะทางที่น้อยที่สุด เนื่องจากเราจะไม่กล่าวถึงระยะทางอื่น ๆ ที่ไม่น้อยสุด

ตัวอย่าง 3.1.12 จงหาระยะทางต่อไปนี้

1. จากจุด $A(-1,3)$ ไปยังเส้นตรง $L: 3x-4y=10$

2. ระหว่างเส้นตรง $L_1: 5x+12y=16$ และ $L_2: 5x+12y=-10$

ตัวอย่าง 3.1.13 ให้ $A(2,-2)$, $B(1,4)$ และ $C(-4,8)$ เป็นจุดบนระนาบ จงหาความสูงของสามเหลี่ยม ABC เมื่อใช้ด้าน AB เป็นฐาน

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงหาระยะทางระหว่างจุดต่อไปนี้

    1.1 $(-1,2)$ และ $(3,5)$
    1.2 $(-2,-3)$ และ $(4,7)$
    1.3 $(1+\sqrt{2},3)$ และ $(1-\sqrt{2},-1)$
    1.4 $(1+a,3+\sqrt{3})$ และ $(4+a,1+\sqrt{3})$
    1.5 $(1,b)$ และ $(9,b)$
    1.6 $(a,7)$ และ $(a,-1)$

2. จงหาสมการเส้นตรงที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

    2.1 ผ่านจุด $(-1,2)$ และมีความชัน -3
    2.2 ผ่านจุด $(0,1)$ และ $(1,-2)$
    2.3 เป็นเส้นตรงแนวนอนที่ผ่านจุด $(-2,3)$
    2.4 เป็นเส้นตรงแนวยืนที่ผ่านจุด $(3,0)$
    2.5 ผ่านจุด $(0,4)$ และขนานกับเส้นตรง $2x+y=11$
    2.6 ผ่านจุด $(-3,7)$ และตั้งฉากกับเส้นตรง $x-3y=10$
    2.7 ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $x+y=2$ และ $x-y=4$ ซึ่งตั้งฉากกับเส้นตรง $x+2y=1$

3. ถ้า $(1,3)$, $(2,a)$, $(b,7)$ และ $(6,13)$ เป็นจุดบนเส้นตรงเดียวกัน จงหาค่า a,b ที่เป็นได้

4. จงตรวจสอบว่ารูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอด $(1,0)$, $(2,4)$, $(5,1)$ และ $(6,5)$ เป็นสามเหลี่ยมด้านขนานหรือไม่

5. จงตรวจสอบว่าสมการคู่ใดต่อไปนี้ ขนาน หรือ ตั้งฉาก หรือไม่ใช่ทั้งสองแบบ

    5.1 $y=3x-1$ และ $y=1-3x$
    5.2 $2y=7x-1$ และ $4y-14x=3$
    5.3 $y=x$ และ $y=-x$
    5.4 $y=2$ และ $x=3$
    5.5 $3x-5y=6$ และ $5x+3y=10$
    5.6 $x-4y=1$ และ $2x=8y+9$

6. การเคลื่อนแบบเส้นตรงของวัตถุชนิดหนึ่งมีความสัมพันธ์ระหว่างระยะทาง (x) กับเวลา (t) แสดงค่าดังนี้

วินาที (วินาที)	10	50	60	120
ระยะทาง (เมตร)	a	140	170	350

    6.1 จงหาสมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด (x) กับเวลา (t)
    6.2 จงหาการระยะทางเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ไปแล้ว 10 วินาที

7. จงหาระยะทางระหว่าง

    7.1 $(1,-2)$ และ $3x-4y=4$

7.2 $(-2, 1)$ และ $7y + 24x + 40 = 0$

7.3 จุดกำเนิด และ $y = 1 - x$

7.4 $(-3, -5)$ และ $x = 3$

7.5 $(-3, 4)$ และ $y = 3$

7.6 $(0, 5)$ และ $3x - 7y + 35 = 0$

7.7 $4x - 3y = 15$ และ $4x - 3y = 10$

7.8 $12x - 5y = 6$ และ $5y - 12x = -19$

7.9 $y = x$ และ $y = x + 10$

7.10 $2x + y = 4$ และ $4x + 2y = 5$

8. ให้ $A(0, 3)$, $B(-2, 7)$ และ $C(5, 9)$ เป็นจุดบนระนาบ

   8.1 จงหาความยาวเส้นรอบรูปของสามเหลี่ยม ABC

   8.2 จงหาความสูงของสามเหลี่ยม ABC เมื่อใช้ด้าน AB เป็นฐาน

   8.3 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยม ABC

9. $ABCD$ เป็นรูปสี่เหลี่ยมด้านขนาน สมการของส่วนเส้นตรง AB คือ $2x - y + 5 = 0$ สมการของส่วนเส้นตรง BC คือ $x - 2y + 4 = 0$ ถ้า $M(1, 4)$ เป็นจุดที่เส้นทแยงมุมตัดกัน จงหาส่วนสูงของสี่เหลี่ยมด้านขนาน $ABCD$ เมื่อใช้ด้าน BC เป็นฐาน

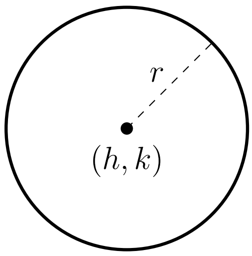
3.2 วงกลม

บทนิยาม 3.2.1 **วงกลม** (Circle) คือเซตของจุดที่อยู่ห่างจากจุดคงที่ด้วยระยะคงที่

ให้ C เป็นเซตของจุด (x, y) ที่ห่างจากจุดคงที่ (h, k) ด้วยระยะคงที่ r เรียกว่า วงกลมที่มีศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมี r ดังนั้น

$$C = \{(x, y) : (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

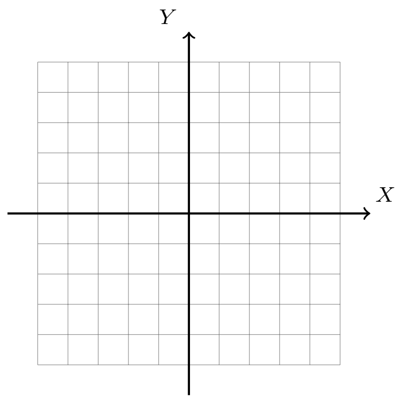
เรียก $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ **สมการวงกลม** (equation of a circle) แสดงตัวอย่างได้ดังรูป



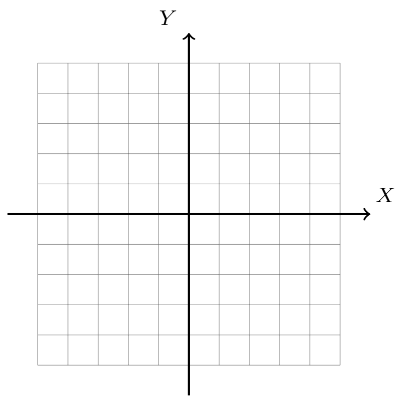
สำหรับวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิดจะมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = r^2$

ตัวอย่าง 3.2.2 จงหาเขียนกราฟวงกลมต่อไปนี้

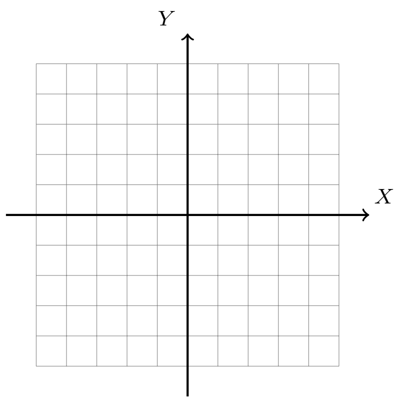
1. $x^2 + y^2 = 4$



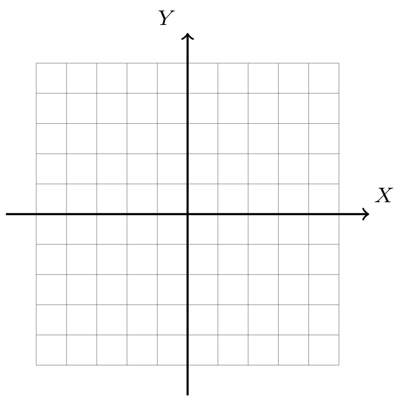
2. $(x-1)^2 + y^2 = 9$



3. $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 9$



4. $x^2 + y^2 = 4y$



ตัวอย่าง 3.2.3 จงหาสมการเส้นตรงที่สัมผัสวงกลม $x^2 + y^2 = 25$ ที่จุด $(3, 4)$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมด้านเท่าที่มีจุดยอดบนเส้นรอบวงกลมที่สมการเป็น

$$x^2 + y^2 = 4$$

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาเขียนกราฟวงกลมต่อไปนี้

   1.1 $x^2 + y^2 = 25$

   1.2 $(x+1)^2 + y^2 = 4$

   1.3 $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 16$

   1.4 $x^2 + y^2 = 6x$

   1.5 $x^2 + y^2 + 4x - 4y = 8$

   1.6 $x^2 + y^2 - 2x + 6y - 6 = 0$

2. จงหาสมการวงกลมที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$ และรัศมี 4 หน่วย

   2.2 มีเส้นผ่านศูนย์กลางคือ AB เมื่อ $(2, 3)$ และ $(-6, -5)$

   2.3 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-1, 3)$ และสัมผัสกับเส้นตรง $y = x$

   2.4 ผ่านจุดกำเนิด มีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $y = 2x - 2$ และรัศมี 5 หน่วย

3. จงหาพื้นที่ซ้อนทับของพื้นที่วงกลม $x^2 + y^2 \leq 4$ และ $(x-2)^2 + y^2 \leq 4$

4. วงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ในจตุภาคที่หนึ่ง สัมผัสแกน X ที่จุด $(3, 0)$ และสัมผัสเส้นตรง $4y = 3x + 36$ ที่จุด M จงหาระยะทางระหว่างจุด M กับจุดกำเนิด

5. จุด $A(3, 0)$ เป็นจุดกึ่งกลางคอร์ด PQ ภายในวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$ จงหาสมการเส้นตรงที่ผ่านคอร์ด PQ

6. จงหาระยะยทางที่สั้นที่สุดและยาวที่สุดจากจุด $(10, 7)$ ไปยังวงกลม $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 20$

7. จากจุด $P(-1, 5)$ ลากเส้นตรงตั้งฉากกับ $y = x$ ที่จุด Q ให้ R เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนเส้นตรง PQ จงหาสมการวงกลมที่ผ่านจุด R และมีจุดศูนย์อยู่ที่ $(\frac{1}{2}, 1)$

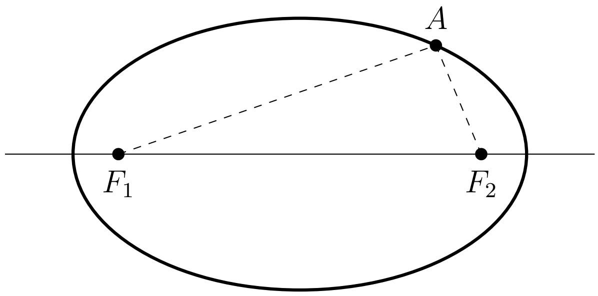
8. ขอบยางรถยนต์คันหนึ่งมีสมการเป็น $x^2 + y^2 = 237^2$ มีหน่วยเป็นมิลลิเมเตร ถ้ารถคันนี้มีเลขหลักกิโลเมตรอยู่ที่ 129524 จงหาว่าล้อรถยนต์ตันนี้หมุนไปแล้วกี่รอบ

3.3 วงรี

บทนิยาม 3.3.1 วงรี (Ellipse) คือเซตของจุดซึ่งผลบวกของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่เสมอ

ให้ E เป็นเซตของจุด $A(x,y)$ ที่ห่างจากจุดคงที่ F_1 และ F_2 ซึ่งจะเรียกว่า **จุดโฟกัส** (focus) ของวงรี ด้วยระยะคงที่ K

$$E = \{(x,y) \mid d(A,F_1) + d(A,F_2) = K\}$$

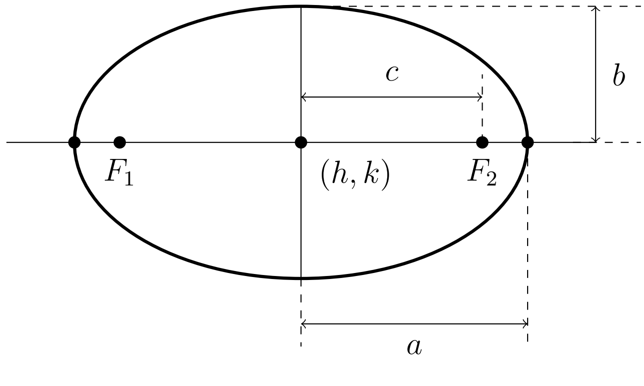


ให้จุดกึ่งกลางของจุดโฟกัสวงรีคือ (h,k) เรียกว่าจุดศูนย์กลางวงรี และจุดปลายด้านของแกนสมมาตรที่ยาวที่สุดของวงรีเรียกว่า **จุดยอด** (vertex) และเรียกจุดปลายแกนสมมาตรที่สั้นกว่าว่า **จุดยอดร่วม** (co-vertex) กำหนดให้

1. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัสหนึ่ง เท่ากับ c
2. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดหนึ่ง เท่ากับ a
3. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดร่วมหนึ่ง เท่ากับ b

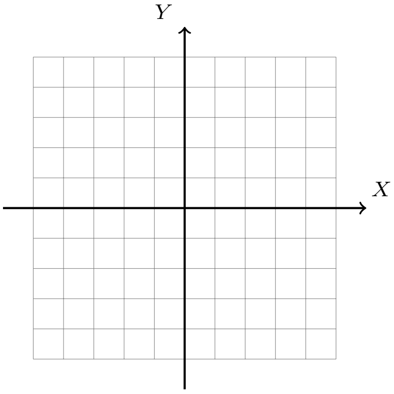
เรียกอัตราส่วน $e = \dfrac{c}{a}$ ว่า **ความเยื่องศูนย์กลาง** (Eccentricity) เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $K = 2a$ และ $a^2 = b^2 + c^2$ โดยมีสมการวงรีคือ

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

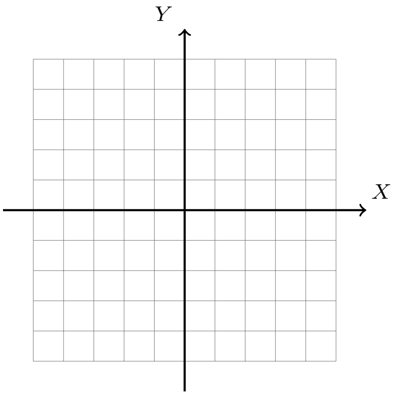


ตัวอย่าง 3.3.2 จงหาเขียนกราฟวงรีต่อไปนี้

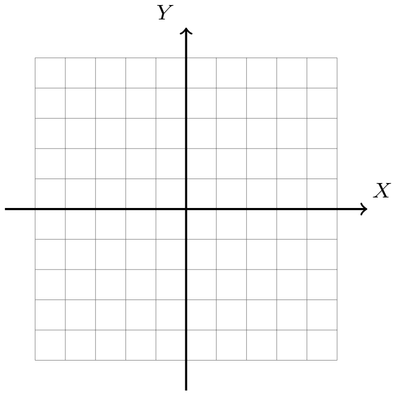
1. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$



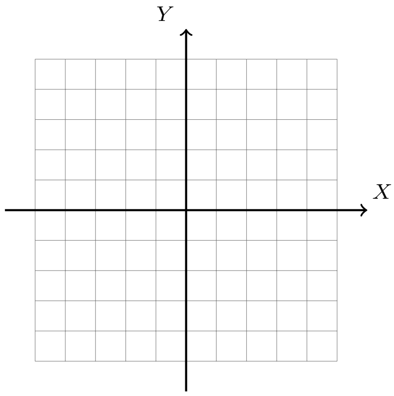
2. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$



3. $\dfrac{(x-1)^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$



4. $4x^2+25y^2=100$



ตัวอย่าง 3.3.3 จงหาสมการวงรีที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดคงที่จุดหนึ่งคือ $(-3,0)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ 10

ตัวอย่าง 3.3.4 จงหาสมการวงรีที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(1, -1)$ และจุดยอดร่วมคือ $(-1, 2)$ และ $(-1, -4)$

ตัวอย่าง 3.3.5 จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่ จุดยอดและจุดยอดร่วมของรูปวงรีที่มีสมการเป็น $16x^2 + 25y^2 - 32x - 150y - 159 = 0$

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงหาเขียนกราฟวงรีต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$

   1.2 $\dfrac{(x-1)^2}{16}+y^2=1$

   1.3 $\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{9}=1$

   1.4 $(x+2)^2+\dfrac{y^2}{4}=1$

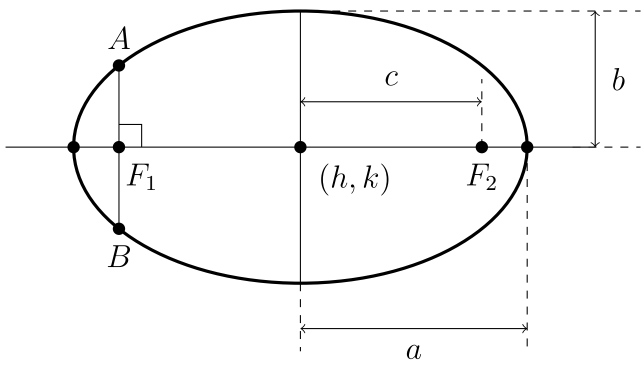
   1.5 $25x^2+16y^2=400$

   1.6 $49x^2+625y^2=30625$

   1.7 $25x^2+9y^2+50x-36y-164=0$

   1.8 $6x^2+5y^2+12x-20y-4=0$

2. จากรูป



เรียกความยาว AB ว่า **ลาตัสเลกตัม** (Latus Rectum :LR) จงแสดงว่า

$$LR=\frac{2b^2}{a}$$

3. จงหาสมการวงรีที่มีเงื่อนไขต่อไปนี้

   3.1 มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดคงที่จุดหนึ่งคือ $(3,0)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ 10

   3.2 มีจุดโฟกัสคือ $(1,0)$ และ $(5,0)$ โดยมีจุดยอดร่วมจุดหนึ่งคือ $(3,2)$

   3.3 วงรีที่ใหญ่ที่สุดที่บรรจุลงในสี่เหลี่ยมพื้นผ้า $ABCD$ ได้พอดี เมื่อ $A(-1,-1)$, $B(-1,5)$, $C(3,5)$ และ $D(3,-1)$

4. จงหาสมการวงกลมที่บรรจุลงในวงรี $6x^2+5y^2+12x-20y=4$ ได้พอ

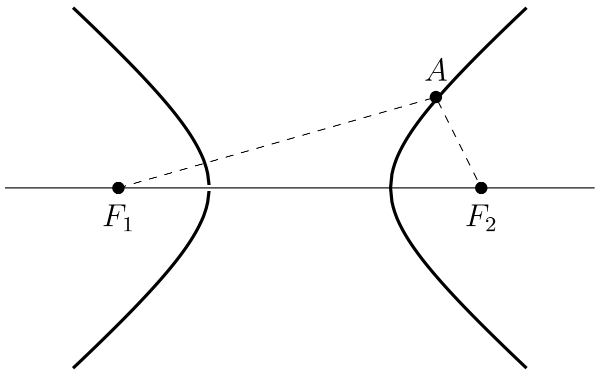
5. จงหาสมการวงรีที่ผ่านจุด $(5,\frac{1}{5})$ และมีศูนย์กลางอยู่ที่ $(1,2)$ โดยมีความยาวระหว่างจุดยอดทั้งสองเท่ากับ 10

3.4 ไฮเพอร์โบลา

บทนิยาม 3.4.1 ไฮเพอร์โบลา (Hyperbola) คือเซตของจุดซึ่งผลต่างของระยะทางจากจุดใด ๆ ในเซตนี้ไปยังจุดคงที่สองจุดมีค่าคงที่เสมอ

ให้ H เป็นเซตของจุด $A(x, y)$ ที่ห่างจากจุดคงที่ F_1 และ F_2 ซึ่งจะเรียกว่า **จุดโฟกัส** (focus) ของไฮเพอร์โบลา ด้วยระยะคงที่ K'

$$H = \{(x, y) \mid |d(A, F_1) - d(A, F_2)| = K'\}$$

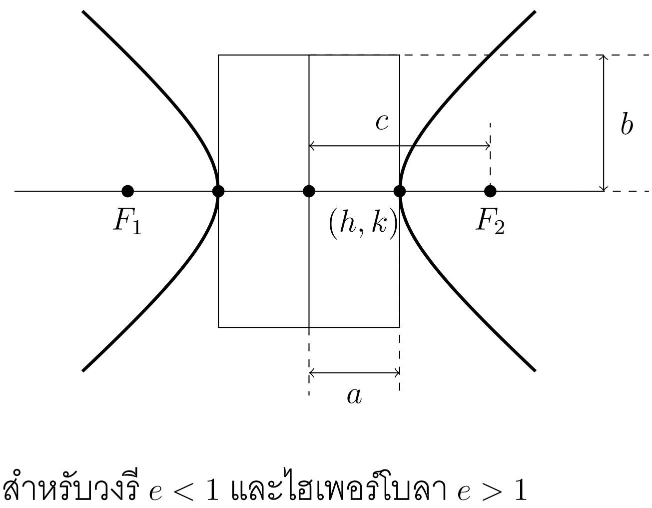


ให้จุดกึ่งกลางของจุดโฟกัสวงรีคือ (h, k) เรียกว่าจุดศูนย์กลางไฮเพอร์โบลา และจุดบนไฮเพอร์โบลาที่ใกล้กับจุดศูนย์กลางที่สุดเรียกว่า **จุดยอด** (vertex) กำหนดให้

1. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดโฟกัสหนึ่ง เท่ากับ c
2. ระยะทางจากจุดศูนย์กลางไปยังจุดยอดหนึ่ง เท่ากับ a
3. ให้ความยาว b สอดคล้องสมการ $c^2 = a^2 + b^2$

เราสามารถพิสูจน์ได้ว่า $K' = 2a$ โดยมีสมการวงรีคือ

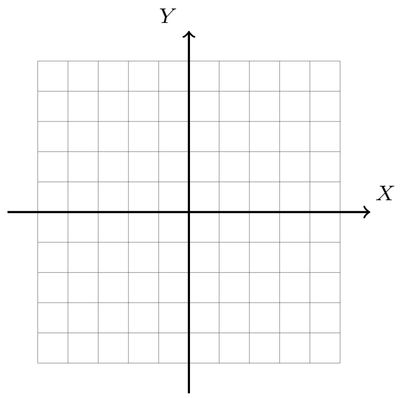
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$



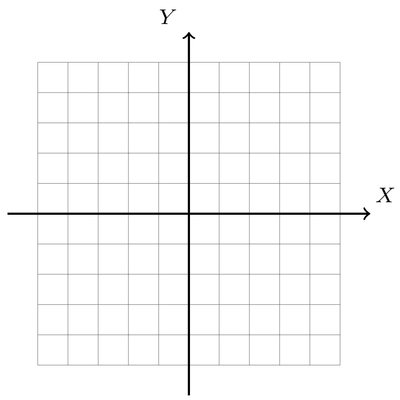
ข้อสังเกตเกี่ยวกับค่า e สำหรับวงรี $e < 1$ และไฮเพอร์โบลา $e > 1$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงหาเขียนกราฟไฮเพอร์โบลาต่อไปนี้

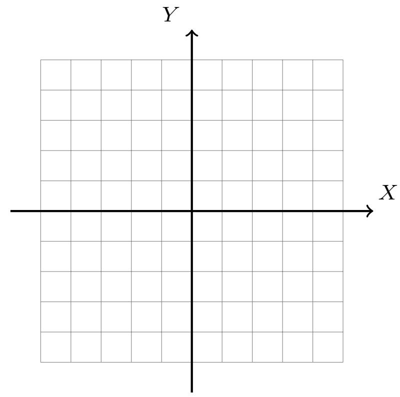
1. $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$



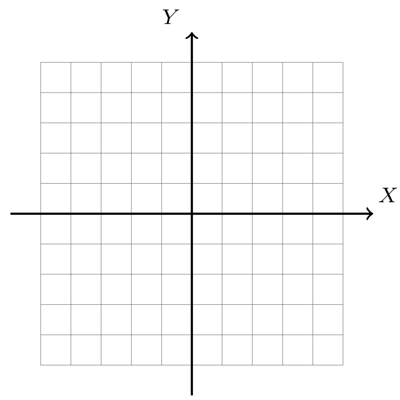
2. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$



3. $\dfrac{(x+1)^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$



4. $x^2 - y^2 = 4$



ตัวอย่าง 3.4.3 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดกำเนิด มีจุดคงที่จุดหนึ่งคือ $(-3, 0)$ และผลบวกคงที่เท่ากับ 10

ตัวอย่าง 3.4.4 จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่มีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(2,-3)$ และจุดยอดคือ $(2,0)$ และ $(2,6)$

ตัวอย่าง 3.4.5 จงหาพื้นที่รูปสี่เหลี่ยมที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดกำเนิดและจุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $16x^2-9y^2+32x+36y+124=0$

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงหาเขียนกราฟวงรีต่อไปนี้

   1.1 $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

   1.2 $\dfrac{(x+1)^2}{4} - y^2 = 1$

   1.3 $\dfrac{(x+2)^2}{36} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

   1.4 $4(x+1)^2 - 10(y+2)^2 = 40$

   1.5 $3y^2 - x^2 + 4x - 30y + 68 = 0$

   1.6 $25x^2 - 144y^2 + 150x - 3375 = 0$

   1.7 $x^2 - y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$

   1.8 $9x^2 - 4y^2 + -54x - 16y + 29 = 0$

2. จงหาสมการไฮเพอร์โบลาที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 ผลต่างคงที่เท่ากับ 8 มีจุดโฟกัสคือ $(5, 1)$ และ $(5, -9)$

   2.2 มีจุดโฟกัสคือ $(-9, 1)$ มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(-3, 1)$ และมีค่าความเยื้องศูนย์กลางเท่ากับ 1.5

   2.3 มีจุดยอดคือ $(-5, 2)$ และ $(3, 2)$ และมีจุดคงที่จุดหนึ่งคือ $(5, 2)$

3. ถ้าไฮเพอร์โบลามีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุดศูนย์กลางของวงรี $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$ จุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสทั้งสองของวงรี และผ่านจุด $(5, 5)$ จงหาจุดคงที่ของไฮเพอร์โบลานี้

4. โลกและดาวหาง A โคจรเข้าหากันเป็นสมการไฮเพอร์โบลาซึ่งมีความยาวระหว่างจุดยอดเท่ากับ 8 ปีแสง และความยาวระหว่างจุดโฟกัสทั้งสองเท่ากับ 16 ปีแสง จงหาระยะที่โลกและดาวหาง A ใกล้กันมากที่สุด

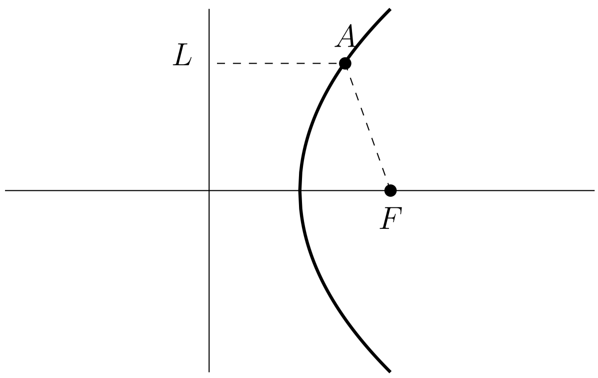
5. ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า A เป็นจุดยอดจุดหนึ่งของไฮเพอร์โบลา $x^2 - y^2 = a^2$ จุด B และ C อยู่บนไฮเพอร์โบลาอีกซีกหนึ่ง จงหาพื้นที่สามเหลี่ยม ABC

3.5 พาราโบลา

บทนิยาม 3.5.1 พาราโบลา (Parabola) คือเซตของจุดซึ่งจุดที่อยู่ในเซตจะห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งเท่ากับระยะที่ห่างจากเส้นตรงคงที่เส้นหนึ่ง

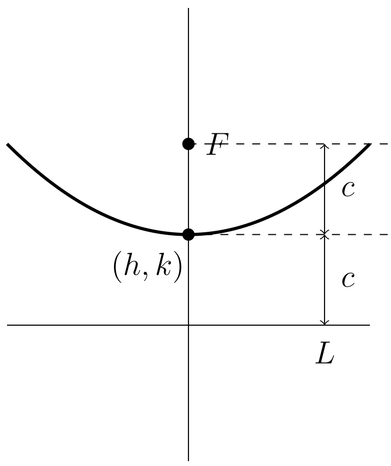
ให้ P เป็นเซตของจุด $A(x, y)$ ที่ห่างจากจุดคงที่ F ซึ่งจะเรียกว่า **จุดโฟกัส** (focus) เท่ากับอยู่ห่างจากเส้นตรง L ซึ่งเรียกว่า **ไดเรกทริกซ์** (directrix)

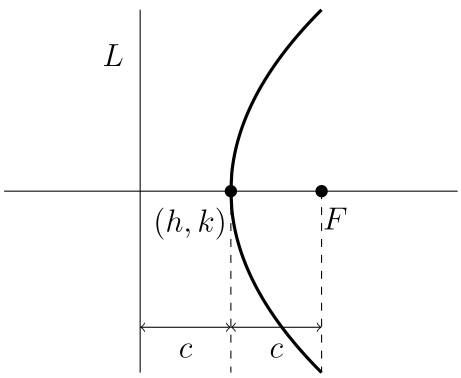
$$P = \{(x, y) \mid d(A, F) = d(A; L)\}$$



ให้จุดกึ่งกลางระหว่างจุดตัดแกนสมมาตรของพาราโบลากับไดเรกทริกซ์คือ (h, k) เรียกว่า **จุดยอด** (vertex) ของพาราโบลา โดยระยะทางที่วัดจากจุดยอดไปยังโฟกัส เท่ากับ c สามารถพิสูจน์ได้ว่าสมการพาราโบลาคือ

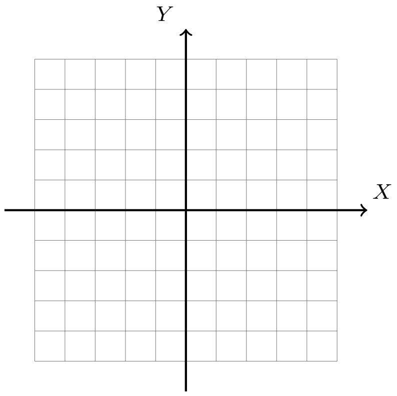
$$(x-h)^2 = \pm 4c(y-k) \qquad \text{หรือ} \qquad (y-k)^2 = \pm 4c(x-h)$$



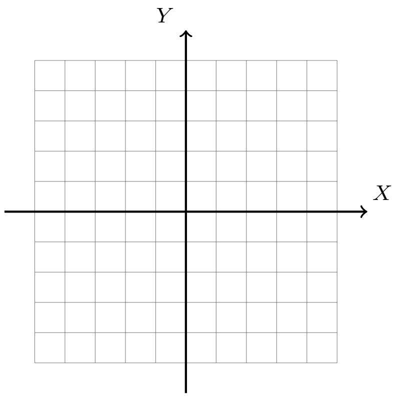


ตัวอย่าง 3.5.2 จงหาเขียนกราฟพาราโบลาต่อไปนี้

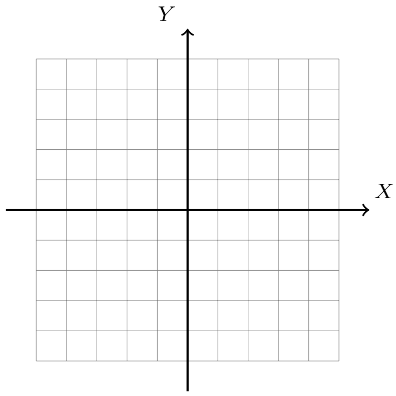
1. $x^2 = 4y$



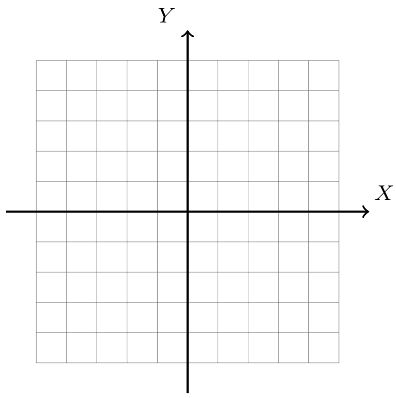
2. $y^2 = 8(x-1)$



3. $(x-1)^2 = -12(y+1)$



4. $y^2 - 4y + 8x - 4 = 0$



ตัวอย่าง 3.5.3 จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดคงที่ $(-3, 4)$ และเส้นตรงคงที่ $x = 1$

ตัวอย่าง 3.5.4 เสาไฟสองต้นสูง 30 เมตรอยู่ห่างกัน 100 เมตร สายไฟฟ้าอยู่ระหว่างเสาทั้งสองต้นหย่อนลงมาเป็นรูปพาราโบลา สูงจากพื้นดิน 20 เมตร ณ บริเวณกึ่งกลางเสาทั้งสองต้น จงหาว่าสายไฟฟ้านี้อยู่สูงจากพื้นดินกี่เมตร ณ จุดที่ห่างจากเสาเป็นระยะ 10 เมตร

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงวาดกราฟพาราโบลาต่อไปนี้

   1.1 $x^2 = -8y$

   1.2 $y^2 = 16x$

   1.3 $(x+1)^2 = -12(y-3)$

   1.4 $(y+2)^2 = 10x$

   1.5 $y = x^2 - 2x + 3$

   1.6 $y^2 - 2y + 8x - 15 = 0$

   1.7 $3x^2 - 12x - 4y + 12 = 0$

   1.8 $y^2 - 4y + 6x - 8 = 0$

2. จงหาสมการพาราโบลาที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   2.1 มีจุดยอดคือ $(1, 1)$ และความยาวระหว่างจุดยอดกับจุดโฟกัสเท่ากับ 2

   2.2 มี $(2, -3)$ เป็นจุดคงที่ และมี $y = 1$ เป็นเส้นตรงคงที่

   2.3 มีไดเรกทริกซ์ผ่านจุดตัดวงกลม $x^2 + y^2 = 12$ และ $x^2 + y^2 - 8x + 4 = 0$ โดยมีจุดโฟกัสอยู่ที่จุด $(-1, 4)$

   2.4 มีจุดยอดคือ $(0, -1)$ และผ่านจุดโฟกัสทั้งสองของวงรี $3x^2 + 4y^2 - 16y + 4 = 0$

   2.5 ผ่านจุดตัดของเส้นตรง $y = x$ กับวงกลม $x^2 + y^2 + 6x = 0$ โดยมีแกน X เป็นแกนสมมาตร

3. ถ้าวงกลม $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$ มีจุดศูนย์กลางที่อยู่ (h, k) และรัศมี r หน่วย จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่ (h, k) และไดเรกทริกซ์คือ $x = r$

4. จงหาสมการพาราโบลาที่มีจุดยอดอยู่ที่จุดโฟกัสของไฮเพอร์โบลา $6x^2 - 10y^2 - 12x - 40y - 94 = 0$ และมีแกน X เป็นไดเรกทริกซ์

5. พาราโบลารูปหนึ่งมีจุดโฟกัสอยู่ที่ $(5, -1)$ จุดยอดอยู่บนเส้นตรง $2y = x$ ไดเรกทริกซ์ขนานกับแกน X จงหาสมการไดเรกทริกซ์

6. จงหาระยะทางระหว่างจุดศูนย์กลางวงกลม $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ กับจุดโฟกัสของพาราโบลา $x^2 = 8y$

7. พาราโบลา $x^2 - 10x - 32y - 39 = 0$ มี F เป็นจุดโฟกัส ส่วนของเส้นตรง L_1 ผ่านจุด F มีปลายอยู่ที่พาราโบลา $A(x_1, y_1)$ และ $B(x_2, y_2)$ ส่วนของเส้นตรง L_2 ผ่านจุด F มีปลายอยู่ที่พาราโบลา $C(x_3, y_3)$ และ $D(x_4, y_4)$ จงหาผลบวกของความยาวของส่วนเส้นตรงทั้งสอง

บทที่ 4

แคลคูลัสเบื้องต้น

4.1 ลิมิตของฟังก์ชัน

การให้ความหมายของคำว่าลิมิต เริ่มต้นจากการพิจารณาฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 2 & \text{เมื่อ } x = 1 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$$

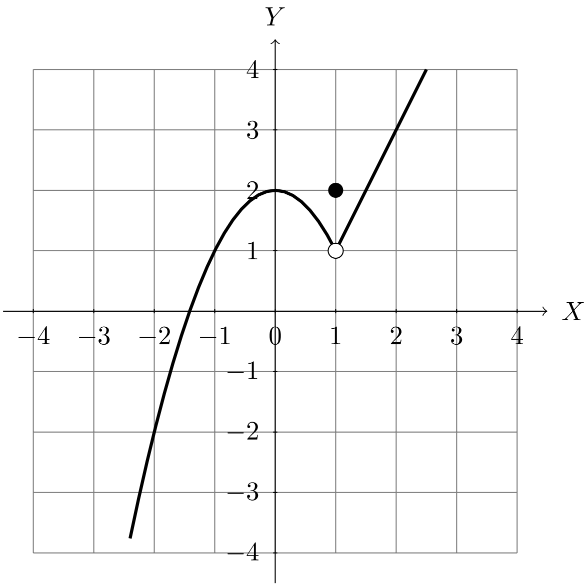
เมื่อสนใจค่าฟังก์ชัน $f(x)$ เมื่อค่าของ x ใกล้ 1 อาจพิจารณาค่า x สำหรับบางค่าดังตารางต่อไปนี้

x	$f(x)$		x	$f(x)$
0.5	1.75		1.5	2
0.8	1.36		1.4	1.8
0.9	1.19		1.1	1.2
0.99	1.0199		1.01	1.02
0.999	1.001999		1.001	1.002
0.9999	1.00019999		1.0001	1.0002
0.99999	1.0000199999		1.00001	1.00002

เมื่อพิจารณา $f(x)$ จากตารางจะเห็นว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 1 ไม่ว่าให้ค่า x เข้าใกล้ลักษณะ $x < 1$ หรือ $x > 1$ ในกรณีเช่นนี้จะกล่าวว่า **ลิมิตของฟังก์ชัน** (limit of function) $f(x)$ ขณะ x **เข้าใกล้** 1 มีค่าเท่ากับ 1 เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 1$$

จะเห็นได้ว่าการพิจารณาค่า x เข้าใกล้ 1 จะไม่พิจารณากรณี $x = 1$ และเมื่อแสดงฟังก์ชัน $y = f(x)$ ด้วยกราฟต่อไปนี้



ทำให้ได้ข้อสังเกตว่า $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ไม่จำเป็นต้องเท่ากับ $f(1)$

ทฤษฎีบท 4.1.1 ให้ f, g เป็นฟังก์ชันจาก D ไป $\mathbb{R}$ เมื่อ $D \subseteq \mathbb{R}$ โดยที่ a เป็นจุดลิมิตของ D ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ และ $\lim\limits_{x\to a} g(x) = M$ เมื่อ $L, M \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\lim\limits_{x\to a} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x) = L + M$
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x) = LM$
3. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$
4. $\lim\limits_{x\to a} cf(x) = c \lim\limits_{x\to a} f(x) = cL$ เมื่อ c เป็นค่าคงตัว
5. $\lim\limits_{x\to a} |f(x)| = |\lim\limits_{x\to a} f(x)| = |L|$
6. $\lim\limits_{x\to a} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^n = L^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
7. $\lim\limits_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[n]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 4.1.2 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x\to 1} (2x^2 + 4)$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+1}{x-1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} x\sqrt{x+1}$
4. $\lim\limits_{x\to 2} (|x| - x)$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงหาค่าลิมิต $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x-2}$

2. $\lim_{h\to 0} \dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

3. $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4-16}{x+2}$

4. $\lim_{x\to -3} \dfrac{x^3+27}{x+3}$

ตัวอย่าง 4.1.5 จงหาค่าลิมิตของ $\lim_{x\to -2} \dfrac{x^4-13x^2+36}{x^2+2x}$

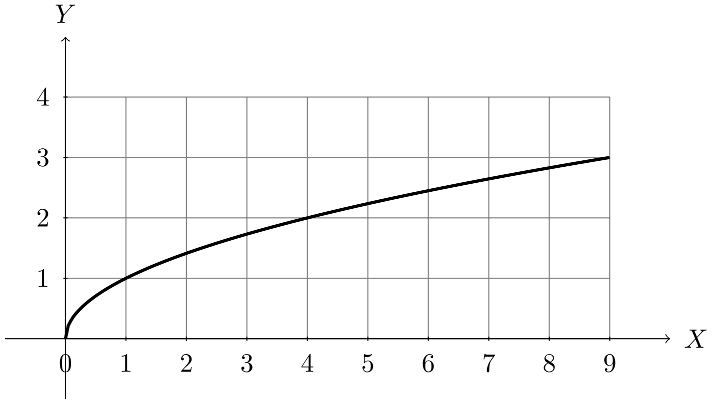
ตัวอย่าง 4.1.6 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{4-\sqrt{16+x}}{x}$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{2x+1}-1}$

พิจารณาฟังก์ชัน $f(x) = \sqrt{x}$ แสดงได้ดังกราฟ



จะเห็นว่า Dom$(f) = [0, \infty)$ และจุด 0 เป็นจุดลิมิต จะได้ว่า $f(x)$ มีค่าเข้าใกล้ 0 เมื่อค่า x เข้าใกล้ 0 ในลักษณะ $x > 0$ เรียกว่า x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา แต่เมื่อ x เข้าใกล้ค่า 0 ในลักษณะ $x < 0$ เรียกว่า x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย ค่าของฟังก์ชัน $f(x)$ จะไม่มีค่าในจำนวนจริง ทำให้ลิมิตของ $f(x)$ มีเพียงค่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา เขียนแทนด้วย

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

เรียกว่า ลิมิตขวาของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านขวา

ในทำนองเดียวกันลิมิตของ $f(x) = \sqrt{-x}$ ที่จุด 0 จะมีค่าเมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้ายเท่านั้น เรียกค่าลิมิตนี้ว่าลิมิตซ้ายของ $f(x)$ เมื่อ x เข้าใกล้ 0 ทางด้านซ้าย เรียกลิมิตทั้งสองแบบนี้ว่า **ลิมิตด้านเดียว** (One-sided limit)

1. **ลิมิตขวา (right-handed limit)** ของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a หรือลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a ทางด้านขวาเท่ากับ L
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

2. **ลิมิตซ้าย (left-handed limit)** ของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a หรือลิมิตของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a ทางด้านซ้ายเท่ากับ L
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

3. สมมติว่าลิมิตขวาและลิมิตซ้ายของ $f(x)$ ขณะ x เข้าใกล้ a มีค่า แล้ว

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L = \lim_{x \to a^-} f(x)$$

ตัวอย่าง 4.1.8 พิจารณาค่ามิลิต $\lim_{x\to 2} f(x)$ ของฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{6-x} & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 4-x & \text{เมื่อ } 2 < x < 5 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 4.1.9 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$

ตัวอย่าง 4.1.10 จงหาอธิบายค่าของลิมิต $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$

ตัวอย่าง 4.1.11 จากทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์กล่าวว่า มวลสารที่เคลื่อนที่ m เปลี่ยนแปลงตามความเร็ว v ที่มวลนั้นเคลื่อนที่ คือ

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

โดยที่ m_0 คือมวลสารที่หยุดนิ่ง และ c คือความเร็วแสง จงอธิบายว่าเมื่อวัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเคลื่อนที่เข้าใกล้ความเร็วแสง แล้วมวลที่เปลี่ยนแปลงไปอย่างไร

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1.1 $\lim\limits_{x\to 0}(x-1)\sqrt{2+x}$ 1.2 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x|+x}{x^2-1}$ 1.3 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x+1}}{x+1}$

2. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

2.1 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-x-2}$

2.2 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-x-2}$

2.3 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2+5x+4}{x^2+3x-4}$

2.4 $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x^2+3x+1}{x^2-2x-3}$

2.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x^2+3x-2}{x-1}$

2.6 $\lim\limits_{t\to 1}\dfrac{t^4-1}{t^3-1}$

2.7 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^6-1}{x^{10}-1}$

2.8 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x+2}{x^3+8}$

2.9 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2x^2-8}{x^3-2x-4}$

2.10 $\lim\limits_{t\to 3}\dfrac{t^2-9}{2t^2+7t+3}$

3. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\sqrt{x-2}-1}$

3.2 $\lim\limits_{u\to 2}\dfrac{\sqrt{4u+1}-3}{u-2}$

3.3 $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{\sqrt{x-1}}$

3.4 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^4+9x^2}+5x}{x+4}$

3.5 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$

3.6 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(-5+h)^2-25}{h}$

3.7 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+\sqrt{4-x}}-\sqrt{5}}{x}$

3.8 $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{4-\sqrt{x}}{16x-x^2}$

3.9 $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-5}{x+4}$

4. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ในรูปตัวแปร x

4.1 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}$

4.2 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^3-x^3}{h}$

4.3 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{3(x+h)^2-3x^2}{h}$

4.4 $\lim\limits_{h\to 1}\dfrac{(x+h-1)^2-x^2}{h-1}$

5. จงหาค่าลิมิตของ $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{|x^2-1|-3x+1}{|1-x|-2}$

6. ให้ $f(x)$ เป็นฟังก์ชันพหุนามโมนิกดีกรีสอง ถ้า $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x^2-x}=5$ จงหาค่าของ $f(4)$

7. จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้ ถ้าลิมิตมีค่า

7.1 $\lim\limits_{x\to 3}(2x+|x-3|)$

7.2 $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x+12}{|x+6|}$

7.3 $\lim\limits_{x\to 0.5^+}\dfrac{2x-1}{|2x^3-x^2|}$

7.4 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2-|x|}{2+|x|}$

8. กำหนดให้ $f(x) = \begin{cases} x^3-2x+5 & \text{เมื่อ } |x|\le 2 \\ \dfrac{x+7}{x-1} & \text{เมื่อ } |x|>2 \end{cases}$
จงตรวจสอบค่าของ $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ และ $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$

9. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{|1+x-x^2|}{\sqrt{x+3}-2}$

10. จงหาค่าของ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{x^3+x^2}+x}{x^2}$

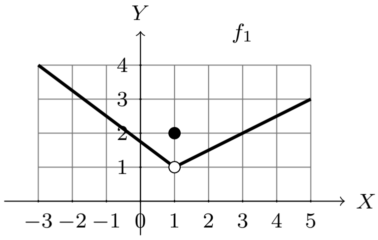
11. จงหาจำนวนจริง k ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ มีค่า เมื่อ $f(x) = \begin{cases} 2x+5 & \text{เมื่อ } x<-3 \\ kx^2+2 & \text{เมื่อ } x\ge -3 \end{cases}$

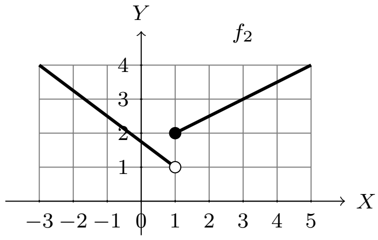
12. จงหาจำนวนจริง a และ b ซึ่งทำให้ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{ax+b}-2}{x} = 1$

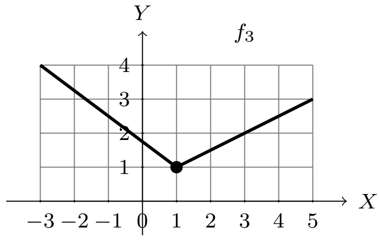
13. จงหาจำนวนจริง a ซึ่ง $\lim\limits_{x\to a}(x^3-4x^2+x+10) = 4$

4.2 ความต่อเนื่อง

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความต่อเนื่องของฟังก์ชันซึ่งมีความสำคัญในการศึกษาวิชาแคลคูลัส จะเริ่มต้นจากการพิจารณาลักษณะของกราฟต่อไปนี้







จากกราฟเห็นได้ว่าฟังก์ชัน f_1 และ f_2 ไม่มีต่อเนื่องที่ $x = 1$ แต่ f_3 ต่อเนื่องที่ $x = 1$

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ โดยที่ $D \subseteq \mathbb{R}$ และ $a \in D$ แล้ว f **ต่อเนื่อง** (continuous) ที่จุด a ก็ต่อเมื่อ

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ มีค่า และ
2. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

ตัวอย่าง 4.2.2 จงตรวจสอบว่า f ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่

1. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 2x + 1 & \text{เมื่อ } x \neq 1 \\ 1 + x & \text{เมื่อ } x = 1 \end{cases}$; $a = 1$

2. $f(x) = \begin{cases} |x| + 3 & \text{เมื่อ } x \leq -1 \\ |x| - 1 & \text{เมื่อ } x > -1 \end{cases}$; $a = -1$

บทนิยาม 4.2.3 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $I \subseteq \text{Dom}(f)$ จะกล่าวว่า

ฟังก์ชัน f **ต่อเนื่องบนช่วง** I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in I$

ทฤษฎีบท 4.2.4 ฟังก์ชันพหุนาม (polynomial function) ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

ทฤษฎีบท 4.2.5 ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องบนโดเมนของฟังก์ชันนั้น

1. ฟังก์ชันตรรกยะ (rational function)
2. ฟังก์ชันกรณฑ์ (radical functions)
3. ฟังก์ชันเลขชี้กำลัง (exponential functions)
4. ฟังก์ชันลอการิทึม (logarithmic functions)
5. ฟังก์ชันตรีโกณมิติ (trigonometric functions)
6. ฟังก์ชันตรีโกณมิติผกผัน (inverse trigonometric functions)

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ $f(x) = \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}$ ต่อเนื่อง

ตัวอย่าง 4.2.7 กำหนดให้ k เป็นจำนวนจริง โดยที่

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{เมื่อ } x > 2 \\ 3x - 1 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \end{cases}$$

เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนจำนวนจริง จงหา k

แบบฝึกหัด 4.2

1. พิจารณาว่าฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องที่จุด $x = a$ หรือไม่

   1.1 $a = -2;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+2} & \text{เมื่อ } x \neq -2 \\ 1 & \text{เมื่อ } x = -2 \end{cases}$

   1.2 $a = 1;\quad f(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{เมื่อ } x < -1 \\ 2 - x^3 & \text{เมื่อ } x \geq -1 \end{cases}$

   1.3 $a = 3;\quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2-5x-3}{x-3} & \text{เมื่อ } x \neq 3 \\ 6 & \text{เมื่อ } x = 3 \end{cases}$

2. ฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+x} & \text{เมื่อ } -4 \leq x < -1 \\ |x|+1 & \text{เมื่อ } -1 < x < 1 \\ \dfrac{1-x^2}{2x^2-5x+3} & \text{เมื่อ } 1 < x \leq 4 \end{cases}$

   ต่อเนื่องที่จุด $x = 1$ และ $x = -1$ หรือไม่

3. จงขยายโดเมนเพื่อทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ต่อเนื่องบนจำนวนจริง

   3.1 $f(x) = \dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

   3.2 $f(x) = \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$

4. จงหาค่า a และ b ที่ทำให้ฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบน $(-\infty, \infty)$ เมื่อ

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{เมื่อ } x < 2 \\ ax^2 - bx + 3 & \text{เมื่อ } 2 \leq x < 3 \\ 2x - a + b & \text{เมื่อ } x \geq 3 \end{cases}$$

5. จงหาช่วงที่ใหญ่ที่สุดที่ทำให้ f ต่อเนื่อง

   5.1 $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5x+6}$

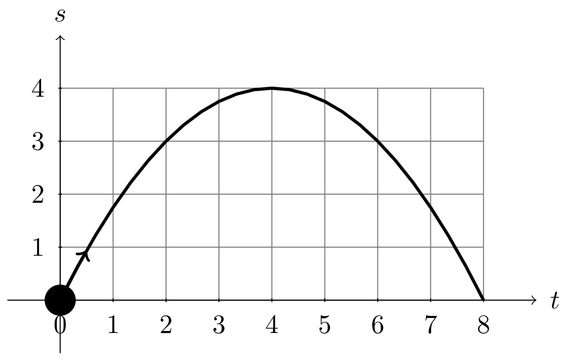
   5.2 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x+1}$

   5.3 $f(x) = \sqrt{1 + \dfrac{1}{x}}$

   5.4 $f(x) = \ell n(1 + \cos x)$

4.3 อนุพันธ์และการประยุกต์

พิจารณาฟังก์ชันการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งกับเวลาที่มีสมการเป็น $s(t) = 2t - \frac{1}{4}t^2$ เมตร และเวลา t ในหน่วยวินาที



เมื่อสนใจความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้สามารถหาได้จาก

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} = \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{เวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่}}$$

หรืออาจเขียนได้เป็น

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา } t_1 \text{ ถึง } t_2 = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

เช่น ความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ในช่วงเวลา 1 วินาที ถึง 3 วินาที คือ

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลา } 1 \text{ ถึง } 3 = \frac{s(3) - s(1)}{3 - 1} = 1 \text{ เมตร/วินาที}$$

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าวนิยาม **อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** (average rate of change) ของฟังก์ชันอื่น ๆ ดังบทนิยามต่อไปนี้

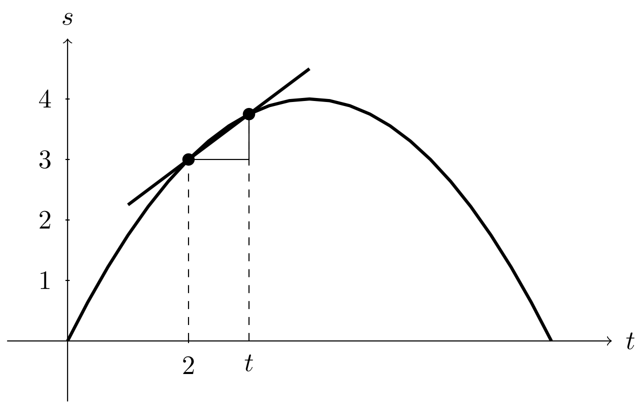
บทนิยาม 4.3.1 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

เรียกว่า**อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย** ของ y เทียบกับ x บนช่วง $[x_1, x_2]$

ตัวอย่าง 4.3.2 ให้ $f(x) = x^3 - x^2 + x$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x บนช่วง $[-1, 1]$

ต่อไปเราสนใจ **ความเร็ว ณ ตำแหน่งต่าง ๆ ที่เกิดขึ้นจริง** ของการเคลื่อนที่เรียกว่า **ความเร็วชั่วขณะ** ตัวอย่างเช่น ความเร็ว ขณะ $t = 2$ ของ $s(t) = 2t - \frac{1}{4}t^2$



อาจพิจารณาจากความเร็วเฉลี่ยบนช่วง $[2, t]$ เมื่อ t ใกล้ ๆ 2 นั่นคือ $t - 2 = \Delta t \to 0$ แล้ว

$$\text{ความเร็วขณะ } t = 2 \text{ คือ } \lim_{t\to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2}$$

จะได้ว่า

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 2} \frac{s(t) - s(2)}{t - 2} &= \lim_{t\to 2} \frac{2t - \frac{1}{4}t^2 - 3}{t - 2} = \lim_{t\to 2} \frac{-\frac{1}{4}(t^2 - 8t + 12)}{t - 2} \\ &= \lim_{t\to 2} \frac{-\frac{1}{4}(t-2)(t-6)}{t-2} = \lim_{t\to 2} -\frac{1}{4}(t-6) = 1\end{aligned}$$

ดังนั้น ความเร็วของการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ขณะ $t = 2$ เท่ากับ 1 เมตร/วินาที

โดยอาศัยแนวคิดดังกล่าวสามารถขยายไปยังฟังก์ชันอื่น ๆ เรียกว่า **อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง** (instantaneous rate of change) ของฟังก์ชัน f ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 4.3.3 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชัน แล้ว **อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่ง** ของฟังก์ชัน f ที่จุด x_0 นิยามโดย

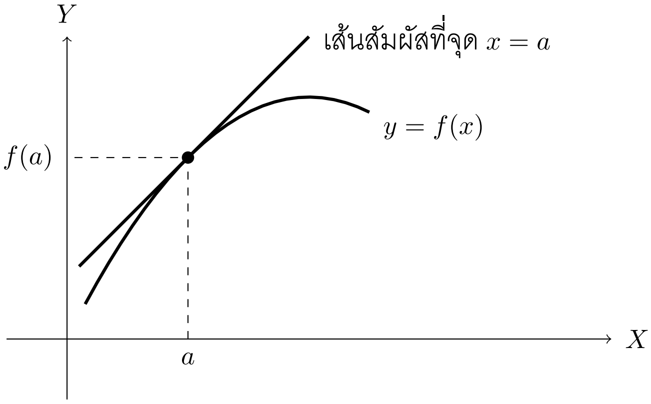
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

ตัวอย่าง 4.3.4 อัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + x$ ที่จุด $x = 1$

บทนิยาม 4.3.5 เส้นสัมผัส (tangent line) กับเส้นโค้ง $y = f(x)$ ที่จุด $P(a, f(a))$ ผ่านจุด P จะมีค่าความชันเท่ากับ

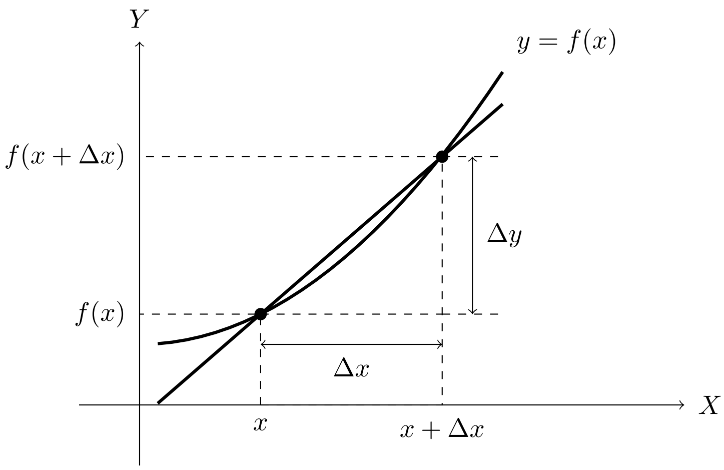
$$m = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad \text{ถ้าลิมิตนี้มีค่า}$$

และสมการเส้นสัมผัสคือ $y = m(x - a) + f(a)$



ตัวอย่าง 4.3.6 จงหาสมการของเส้นสัมผัสกับเส้นโค้ง $y = \dfrac{2}{x}$ ที่จุด $P(2, 1)$

จากแนวคิดอัตราการเปลี่ยนแปลงขณะหนึ่งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ พิจารณากราฟ



จากกราฟอัตราการเปลี่ยนแปลงของของฟังก์ชัน $y = f(x)$ กับการเปลี่ยนแปลงค่าของตัวแปรอิสระของ x ในช่วง x กับ $x + \Delta x$ คือ

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ถ้า Δx เข้าใกล้ 0 จะเรียก $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ เรียกว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
โดยไลบ์นิซได้ใช้สัญลักษณ์ $\dfrac{dy}{dx}$ เรียกว่า สัญกรณ์ไลบ์นิซ (Leibniz notation)
และลากรานจ์ได้ใช้สัญลักษณ์ $f'(x)$ เรียกว่า สัญกรณ์ลากรานจ์ (Lagrange notation)

บทนิยาม 4.3.7 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $y = f(x)$ เรียก

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ว่า**อนุพันธ์ของฟังก์ชัน** (derivative of function) ของ f เทียบกับ x หรือกล่าวว่า f **หาอนุพันธ์ได้** (differentiable) ที่ x เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$f'(x) \quad \text{หรือ} \quad y' \quad \text{หรือ} \quad D_x f(x) \quad \text{หรือ} \quad \frac{dy}{dx} \quad \text{หรือ} \quad \frac{df}{dx}$$

ถ้า $a \in \mathrm{Dom}(f)$ แล้วอนุพันธ์ f ที่จุด $x = a$ เขียนแทนด้วย $f'(a)$ หรือ $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=a}$ นั่นคือ

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x} \qquad \text{ถ้าลิมิตมีค่า}$$

ถ้าให้ $h = \Delta x$ จะได้ว่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันของ f เทียบกับ x คือ

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

สำหรับอนุพันธ์ f ที่จุด $x = a$ ถ้าให้ $x = a + \Delta x$ จะได้ $\Delta x = x - a$ ดังนั้น

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad \text{หรือ} \quad f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

ตัวอย่าง 4.3.8 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = \dfrac{1}{x}$ ที่จุด $x = 2$

ตัวอย่าง 4.3.9 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 3x$

ตัวอย่าง 4.3.10 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชัน

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 2x & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 1$ หรือไม่

ตัวอย่าง 4.3.11 จงหาอนุพันธ์ทางขวา อนุพันธ์ทางซ้าย และอนุพันธ์ที่จุด $x = 0$ ของฟังก์ชัน f เมื่อ

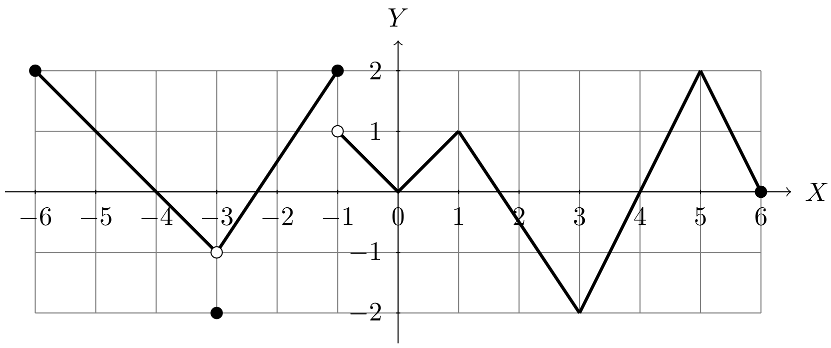
1. $f(x) = |x|$

2. $f(x) = x|x|$

ทฤษฎีบท 4.3.12 ถ้า f หาอนุพันธ์ได้ที่จุด a แล้ว f จะต่อเนื่องที่จุด a

ตัวอย่าง 4.3.13 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 4.3.12

ตัวอย่าง 4.3.14 กราฟของฟังก์ชัน $y = f(x)$ บนช่วง $[-6, 6]$ ดังกราฟ



จงเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์

จุด	ค่าอนุพันธ์ทางขวา	ค่าอนุพันธ์ทางซ้าย	ค่าอนุพันธ์
$x = -6$			
$x = -5$			
$x = -3$			
$x = -1$			
$x = 0$			
$x = 3$			
$x = 4$			
$x = 5$			
$x = 6$			

บทนิยาม 4.3.15 ให้ f เป็นฟังก์ชัน และ $I \subseteq \text{Dom}(f)$ จะกล่าวว่าฟังก์ชัน f

หาอนุพันธ์ได้บนช่วง I ถ้า f ต่อเนื่องทุกจุด $a \in I$

ตัวอย่าง 4.3.16 จงตรวจสอบว่า

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$$

หาอนุพันธ์ได้บน $(-\infty, \infty)$ หรือไม่

ทฤษฎีบท 4.3.17 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้

1. $\dfrac{d}{dx}(c) = 0$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
2. $\dfrac{d}{dx}(x) = 1$
3. $\dfrac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ เมื่อ n เป็นจำนวนจริง
4. $\dfrac{d}{dx}[cf(x)] = c\dfrac{d}{dx}f(x)$ เมื่อ c เป็นค่าคงที่
5. $\dfrac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \dfrac{d}{dx}f(x) \pm \dfrac{d}{dx}g(x)$
6. $\dfrac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\dfrac{d}{dx}g(x) + g(x)\dfrac{d}{dx}f(x)$
7. $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{g(x)\frac{d}{dx}f(x) - f(x)\frac{d}{dx}g(x)}{[g(x)]^2}$ เมื่อ $g(x) \neq 0$

ตัวอย่าง 4.3.18 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 + 3x^2 - x + 4$
2. $y = 2\sqrt{x} - x + \pi$
3. $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$
4. $y = \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt[3]{x} + \sqrt{2}$

ตัวอย่าง 4.3.19 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (x+1)(x^2-1)$
2. $y = (\sqrt{x} - 1)(x^3 + 1)$

ตัวอย่าง 4.3.20 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

2. $y = \dfrac{1}{x^2+1}$

ตัวอย่าง 4.3.21 จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้ง $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$ ที่จุด $(1, \frac{1}{2})$

ตัวอย่าง 4.3.22 จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X

ฟังก์ชันประกอบของ f และ g คือ $f \circ g$ โดยที่ $f \circ g(x) = f(g(x))$ ในหัวข้อนี้จะศึกษาว่าถ้า f แล้ว g หาอนุพันธ์ได้ แล้ว $f \circ g$ หาอนุพันธ์ได้ด้วยและ

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

เรียกว่า **กฎลูกโซ่ (Chain rule)** ซึ่งถูกค้นพบโดยนักคณิตศาสตร์เลื่องชื่อชาวสก็อตแลนด์นามว่า เจมส์ เกร็กกอรี (James Gregory, 1638-1675) ในวิชานี้จะไม่กล่าวถึงการพิสูจน์แต่จะนำไปประยุกต์ใช้ในการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่มีความซับซ้อนมากยิ่งขึ้น

ตัวอย่าง 4.3.23 กำหนดให้ $f(x^3 + 1) = x^3 + x - 1$ จงหา $f'(2)$

จากกฎลูกโซ่เมื่อกำหนด $y = f(u)$ และ $u = g(x)$ แล้ว

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

ตัวอย่าง 4.3.24 กำหนดให้ $y = u^2 + 3u - 1$ และ $u = x^2 - x$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ขณะ $x = 1$

ทฤษฎีบท 4.3.25 ให้ n เป็นจำนวนตรรกยะ และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

ตัวอย่าง 4.3.26 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = (x^3 - 1)^{100}$

2. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}$

3. $g(t) = \left(\dfrac{t-2}{2t+1}\right)^9$

4. $k(x) = (1-x)^5(x^3+2)^4$

บทนิยาม 4.3.27 อนุพันธ์อันดับสูง (Higher order derivatives)
ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ และ f' เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ แล้ว f'' จะเรียกว่า**อนุพันธ์อันดับสอง** (second derivative) ของ f นิยามโดย

$$f''(x) = (f'(x))' \qquad \text{หรือ} \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $f^{(0)} = f$ **อนุพันธ์อันดับ $\boldsymbol{n}$** ของ f เขียนแทนด้วย $f^{(n)}$ นิยามโดย

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$$

ตัวอย่าง 4.3.28 กำหนดให้ $f(x) = x^3 - 8x^2 + 9x + 3$ จงหา $f''(x)$ และ $f''(2)$

ตัวอย่าง 4.3.29 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นหนึ่ง $s = 2t^3 - 5t^2 + 3t + 4$ เมื่อ s มีหน่วยเป็นเซนติเมตร และ t มีหน่วยเป็นวินาที จงหาสมการความเร่ง และความเร่งที่ขณะ 2 วินาที

อนุพันธ์ของฟังก์ชันอื่น ๆ

1. $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x$
2. $\dfrac{d}{dx}a^x = a^x \ell\text{n}a$
3. $\dfrac{d}{dx}\ell\text{n}|x| = \dfrac{1}{x}$
4. $\dfrac{d}{dx}\log_a|x| = \dfrac{1}{x\ell\text{n}a}$
5. $\dfrac{d}{dx}\sin x = \cos x$
6. $\dfrac{d}{dx}\cos x = -\sin x$
7. $\dfrac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$
8. $\dfrac{d}{dx}\sec x = \sec x\tan x$
9. $\dfrac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$
10. $\dfrac{d}{dx}\csc x = -\csc x\cot x$
11. $\dfrac{d}{dx}\arcsin x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12. $\dfrac{d}{dx}\arccos x = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $\dfrac{d}{dx}\arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}$
14. $\dfrac{d}{dx}\text{arccot} x = -\dfrac{1}{1+x^2}$
15. $\dfrac{d}{dx}\text{arcsec} x = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$
16. $\dfrac{d}{dx}\text{arccsc} x = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$

ตัวอย่าง 4.3.30 จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = xe^x + e^{-x}$
3. $f(x) = \sin^2 x$
2. $f(x) = x\ell\text{n}x + \sin 2x$
4. $f(x) = (\cos x)\arctan x$

ตัวอย่าง 4.3.31 วัตถุชิ้นหนึ่งผูกติดกับสปริงมีสมการการเคลื่อนที่คือ

$$x(t) = 5\sin(2\pi t) \qquad \text{เมตร}$$

จงหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้ ขณะเวลา 1 วินาที

ตัวอย่าง 4.3.32 สมการการเคลื่อนที่ของวัตถุชนิดหนึ่งคือ

$$x(t) = \cos(2000\pi t + 10) \qquad \text{เมตร}$$

จงหาความเร็วและความเร่งของการเคลื่อนที่ของวัตถุชิ้นนี้ ขณะเวลา 1 วินาที

ค่าสุดขีดหมายถึงค่าสูงสุดหรือต่ำสุดของฟังก์ชัน ซึ่งใช้การตรวจสอบจากอนุพันธ์โดยการแปลความหมายทางเรขาคณิต และนั่นหมายถึงการนำอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้ปัญหาค่าสูงสุดต่ำสุดที่มักพบในโลกจริงได้

บทนิยาม 4.3.33 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันบนช่วง I แล้วจะกล่าวว่า

1. f เป็น**ฟังก์ชันเพิ่ม** (increasing function) บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

$$\text{สำหรับ } x_1 \text{ และ } x_2 \text{ ใน } I \text{ ถ้า } x_1 < x_2 \text{ แล้ว } f(x_1) < f(x_2)$$

2. f เป็น**ฟังก์ชันลด** (decreasing function) บนช่วง I ก็ต่อเมื่อ

$$\text{สำหรับ } x_1 \text{ และ } x_2 \text{ ใน } I \text{ ถ้า } x_1 < x_2 \text{ แล้ว } f(x_1) > f(x_2)$$

ทฤษฎีบท 4.3.34 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) จะได้ว่า

1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันเพิ่มบนช่วง $[a, b]$
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันลดบนช่วง $[a, b]$
3. ถ้า $f'(x) = 0$ ทุก $x \in (a, b)$ แล้ว f เป็นฟังก์ชันคงตัวบนช่วง $[a, b]$

ตัวอย่าง 4.3.35 จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด

1. $f(x) = x^2 - 2x + 3$

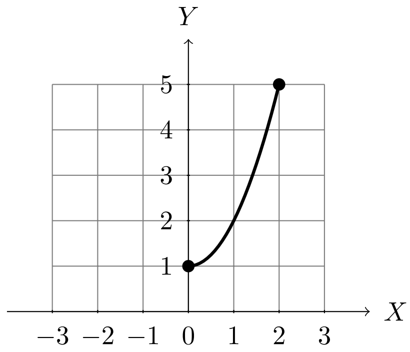
2. $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$

บทนิยาม 4.3.36 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $S \subseteq D$ และ $c \in S$ แล้วจะกล่าวว่า

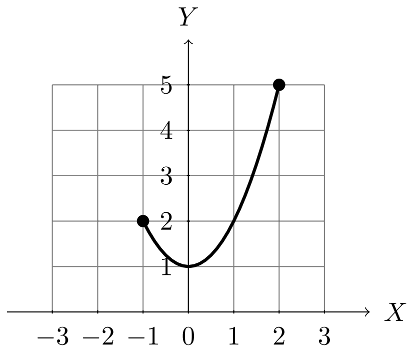
1. $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุด** (maximum value) หรือ**ค่าสูงสุดสัมบูรณ์** (absolute maximum value) บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \geq f(x)$ ทุก ๆ $x \in S$
2. $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุด** (minimum value) หรือ**ค่าต่ำสุดสัมบูรณ์** (absolute minimum value) บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c) \leq f(x)$ ทุก ๆ $x \in S$
3. $f(c)$ เป็น**ค่าสุดขีด** (extreme value) บน S ก็ต่อเมื่อ $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดของ f บน S

ตัวอย่าง 4.3.37 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^2 + 1$ บนช่วงที่กำหนดโดยใช้กราฟที่กำหนดให้

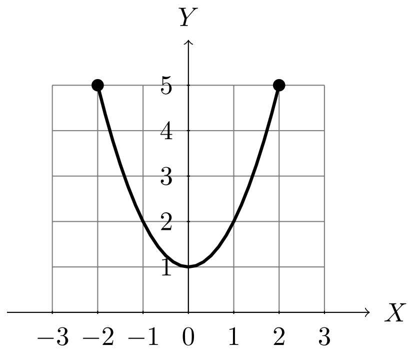
1. $[0, 2]$



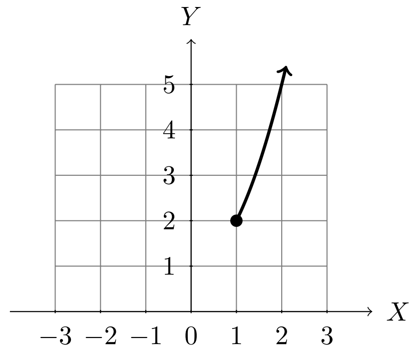
2. $[-1, 2]$



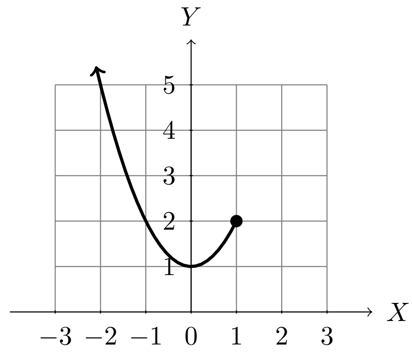
3. $[-2, 2]$



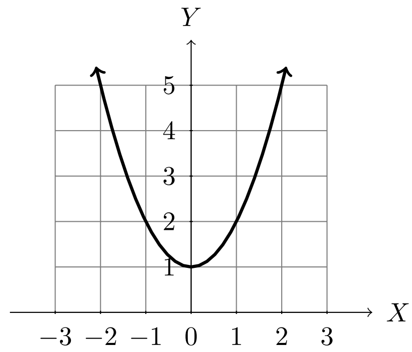
4. $[1, \infty)$



5. $(-\infty, 1]$



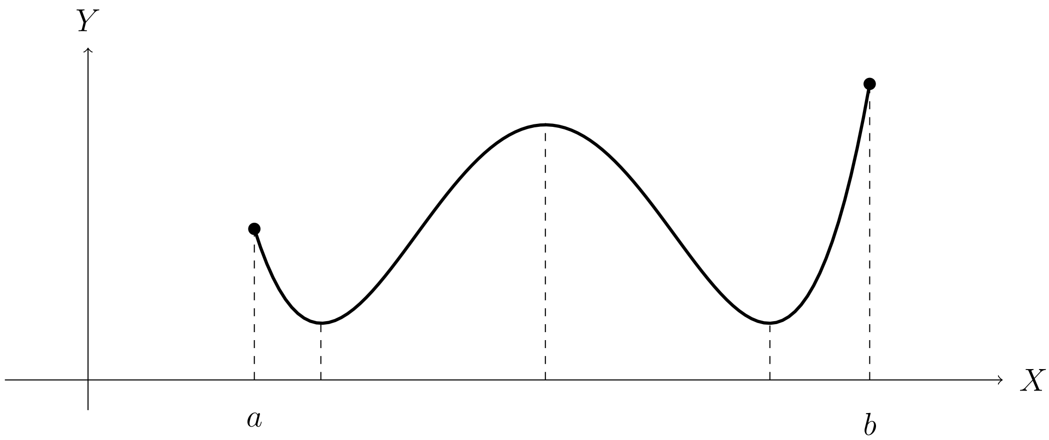
6. $(-\infty, \infty)$



บทนิยาม 4.3.38 ให้ $f : D \to \mathbb{R}$ เป็นฟังก์ชันและ $S \subseteq D$ และ $c \in S$ แล้วจะกล่าวว่า

1. $f(c)$ เป็น**ค่าสูงสุดสัมพัทธ์ (relative maximum value)** บน S ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง
$$f(c) \geq f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S \cap (c-\delta, c+\delta)$$
2. $f(c)$ เป็น**ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ (relative minimum value)** บน S ก็ต่อเมื่อ มี $\delta > 0$ ซึ่ง
$$f(c) \leq f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S \cap (c-\delta, c+\delta)$$
3. $f(c)$ เป็น**ค่าสุดขีดสัมพัทธ์ (relative extreme value)** บน S ก็ต่อเมื่อ
$f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f บน S

รูปที่ 4.1: ตัวอย่างกราฟที่เกิดค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์บนช่วง $[a, b]$



จากแนวคิดของแฟร์มาต์ที่พบว่าจุดที่เกิดค่าสูงสุดหรือต่ำสุดต้องที่มีเส้นสัมผัสของเส้นโค้งขนานกับแกน X หรือความชันเป็น 0 ต่อมาได้ขยายไปยังกรณีที่ความชันค่าไม่ได้

ทฤษฎีบท 4.3.39 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$ แล้ว

ถ้า f มีค่าสุดขีดสัมพัทธ์ที่จุด c แล้ว $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

บทนิยาม 4.3.40 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $c \in [a, b]$ แล้วจะเรียก

c ว่า**จุดวิกฤต (critical point)** ของฟังก์ชัน f ก็ต่อเมื่อ $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ ไม่มีค่า

ตัวอย่าง 4.3.41 จงหาจุดวิกฤตของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 12x + 7$

2. $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$

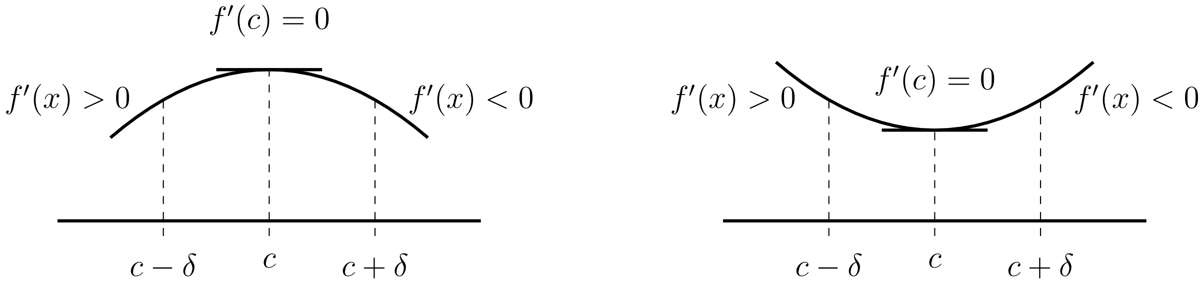
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$

4. $f(x) = xe^x$

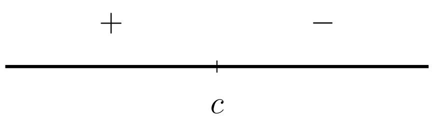
โดยทฤษฎีบท 4.3.39 สรุปได้ว่าการจะหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ย่อมต้องหาจุดวิฤตเป็นอันดับแรก จากนำจุดวิกฤตมาตรวจสอบว่าจุดนั้นให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ทำได้โดย 2 วิธี คือการทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง และ การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง

ทฤษฎีบท 4.3.42 การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับหนึ่ง (First derivative test)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง S และ $c \in S$ เป็นจุดวิกฤตของ f แล้ว มี $\delta > 0$ ซึ่ง

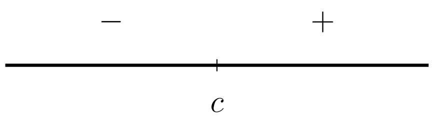
1. ถ้า $f'(x) > 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c) \cap S$ และ $f'(x) < 0$ ทุกๆ $x \in (c, c+\delta) \cap S$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. ถ้า $f'(x) < 0$ ทุก $x \in (c-\delta, c) \cap S$ และ $f'(x) > 0$ ทุกๆ $x \in (c, c+\delta) \cap S$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f



อาจพิจารณาเครื่องหมายของ f' โดยแทน $+$ เมื่อ $f'(x) > 0$ และ $-$ เมื่อ $f'(x) < 0$ บนเส้นจำนวน จะได้ว่า $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์เมื่อสอดคล้อง



$f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ เมื่อสอดคล้อง



ถ้าเครื่องหมายไม่สอดคล้องทั้ง 2 กรณี สรุปได้ว่าจุดวิกฤตนั้นไม่ใช่จุดที่ให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์และสูงสุดสัมพัทธ์

ตัวอย่าง 4.3.43 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$

2. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$

ทฤษฎีบท 4.3.44 การทดสอบโดยอนุพันธ์อันดับสอง (Second derivative test)
ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) และ $c \in (a, b)$ โดยที่ $f'(c) = 0$ และ $f''(c)$ หาค่าได้ แล้ว

1. $f''(c) < 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์ของ f
2. $f''(c) > 0$ แล้ว $f(c)$ เป็นค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ f

ตัวอย่าง 4.3.45 จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

1. $f(x) = x^3 - 3x + 1$

2. $f(x) = xe^x$

ขั้นตอนการหาค่าสุดขีด

ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง $[a, b]$ และหาอนุพันธ์ได้บนช่วง (a, b) หาค่าสุดขีดได้ดังนี้

1. หาจุดวิกฤติ c ของ f
2. หาค่า $f(c)$ ทั้งหมด $f(a)$ และ $f(b)$
3. เปรียบเทียบค่าในขั้นตอนที่ 2 โดย
   - ค่ามากที่สุด จะเป็นค่าสูงสุดของ f บน $[a, b]$
   - ค่าน้อยที่สุด จะเป็นค่าต่ำสุดของ f บน $[a, b]$

ตัวอย่าง 4.3.46 จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x) = x^3 - 12x + 5$ บนช่วง $[-3, 3]$

ตัวอย่าง 4.3.47 สมการการเคลื่อนที่แบบ SHM ของวัตถุชิ้นหนึ่งคือ

$$x(t) = \sin(10\pi t) \qquad \text{เมตร}$$

จงหาเวลาที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ไกลสุด ในช่วงเวลาไม่เกิน 5 วินาที

ปัญหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดของฟังก์ชัน

การนำอนุพันธ์ไปใช้ในการแก้โจทย์ปัญหาเกี่ยวกับการหาค่าสูงสุดและค่าต่ำสุด โดยทั่วไปเรามักจะจำลองปัญหาดังกล่าวในรูปของฟังก์ชัน เช่นให้

$y = f(x)$ แทนฟังก์ชันของปัญหาดังกล่าว

เราอาจจะต้องหาค่าสุดขีดของ y เมื่อ x เป็นค่า ๆ หนึ่ง โดยใช้กระบวนการหาดังขั้นตอนการหาค่าสุดขีด ดังจะแสดงตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 4.3.48 เมื่อนำจำนวนจริงสองจำนวนมารวมกันได้เท่ากับ 16 จงหาผลคูณที่มากที่สุดของสองจำนวนนั้น

ตัวอย่าง 4.3.49 มีไม้ทำรั้วยาว 800 เมตร นำมาล้อมรั้วบ้านเป็นรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้า โดยใช้บ้านเป็นรั้วด้านหนึ่ง จงหาพื้นที่มากสุดที่ล้อมรั้วนี้ได้

การหาลิมิตอยู่ในรูปแบบยังไม่กำหนดสำหรับฟังก์ชันตรรกยะ หรือฟังก์ชันที่สามารถเปลี่ยนรูป หรือใช้บางทฤษฎีบทมาช่วยในการหาค่าลิมิต แต่ฟังก์ชันที่ซับซ้อนยิ่งขึ้นอาจใช้วิธีดังกล่าวไม่ได้ เช่น

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ell\text{n}x + x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึง **หลักเกณฑ์ลอปีตาล** (l 'Hospital's rule) ซึ่งถูกเขียนไว้ในหนังสือชื่อ *Analyse des Infiniment Pertits* ในปี 1696 โดยนักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสนามว่า มาควิส เดอ โลปิตาล (Marquis de l'Hospital, 1661-1704) แต่ผู้คนพบกฎนี้คือ จอห์น แบร์นูลลี (John Bernoulli, 1667-1748) นักคณิตศาสตร์ชาวสวิส

ทฤษฎีบท 4.3.50 หลักเกณฑ์ลอปีตาล

1. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บน $S = (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ สำหรับบางค่า $\delta > 0$ $g(x) \neq 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x \in S$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x > N$ สำหรับบางค่า $N > 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x > N$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้สำหรับทุก ๆ $x < N$ สำหรับบางค่า $N < 0$ และ $g'(x) \neq 0$ ทุก ๆ $x < N$
   ถ้า $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$ แล้ว
   $$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

โดยหลักเกณฑ์ลอปีตาลจะใช้กับรูปแบบยังไม่กำหนด $\frac{0}{0}$ และ $\frac{\infty}{\infty}$ เท่านั้น แต่เราอาจประยุกต์ใช้หลักเกณฑ์ลอปีตาลกับรูปแบบยังไม่กำหนดอื่น ๆ ดังต่อไปนี้

$$\infty - \infty \qquad 0 \cdot \infty \qquad 1^{\infty} \qquad \infty^{0} \qquad 0^{0}$$

แต่จะไม่พิสูจน์หลักเกณฑ์ลอปีตาลในวิชานี้ ผู้สนใจอาจศึกษาได้จากแคลคูลัสขั้นสูง

ตัวอย่าง 4.3.51 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 6x}{x}$

2. $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^+} \dfrac{\cos x}{1-\sin x}$

ตัวอย่าง 4.3.52 จงหาลิมิตของ

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cot x - \csc x)$

2. $\lim\limits_{x\to 1^-} \left(\dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{\ell n x}\right)$

ตัวอย่าง 4.3.53 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)$

ตัวอย่าง 4.3.54 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 0^+} x\ell\text{n}x$

ตัวอย่าง 4.3.55 จงหาลิมิตของ $\lim_{x\to 0^+} x^x$

แบบฝึกหัด 4.3

1. ให้ $y = f(x)$ จงหาอัตราการอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับ x

   1.1 $f(x) = 3x - x^2$ บนช่วง $[-2, 2]$

   1.2 $f(x) = \cos x$ บนช่วง $[0, \pi]$

2. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ โดยใช้บทนิยาม

   2.1 $f(x) = \sqrt{x}$

   2.2 $f(x) = 1 - 3x^2$

3. จงตราจสอบว่า $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x - 1 & \text{เมื่อ } x \leq 0 \end{cases}$ หาอนุพันธ์ได้ที่จุด $x = 0$ หรือไม่

4. ให้ $f'(x) = |2x^2 - 4| + |x^2 + x - 1|$ จงหา $f'(1)$

5. ให้ a และ b เป็นค่าคงตัว ถ้าฟังก์ชัน $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \\ x^3 - ax + b & \text{เมื่อ } x > 1 \end{cases}$
   หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริง จงหาค่าของ a และ b

6. จงหาสมการเส้นสัมผัสเส้นโค้งของฟังก์ชัน $y = f(x)$ ที่จุด $x = a$

   6.1 $f(x) = x^3$; $a = 2$

   6.2 $f(x) = \sin x$; $a = \pi$

7. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   7.1 $f(x) = x^{10} + x^7 - x$

   7.2 $f(x) = x^{-2} - x^{-1} - 1$

   7.3 $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$

   7.4 $f(x) = \dfrac{1}{x^3 + x - 1}$

   7.5 $f(x) = x^5 + 2x + \pi^2$

   7.6 $y = \dfrac{x^2 + x}{\sqrt{x} + 1}$

8. ให้ $f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ จงหา $f'(0)$

9. ให้ $f(x) = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x-2)(x+1)}$ จงหา $f'(0)$

10. จงหาจุดบนเส้นโค้ง $y = x^4 - 6x^2 + 4$ ที่มีเส้นสัมผัสขนานกับแกน X

11. จงหาอนุพันธ์ของ f ทุก ๆ จุดที่หาอนุพันธ์ได้

    11.1 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

    11.2 $f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{เมื่อ } x < 1 \\ 3x + 1 & \text{เมื่อ } x \geq 1 \end{cases}$

12. พิจารณาว่าฟังก์ชัน g หาอนุพันธ์ได้ที่จุดใดบ้าง พร้อมทั้งร่างกราฟ g และ g'

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x \leq 0 \\ 2x - x^2 & \text{เมื่อ } 0 < x < 2 \\ 2 - x & \text{เมื่อ } x \geq 2 \end{cases}$$

13. กำหนดให้

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{เมื่อ } x \leq 2 \\ mx + b & \text{เมื่อ } x > 2 \end{cases}$$

จงหาค่าของ m และ b ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนจำนวนจริง

14. จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ เมื่อ

14.1 $y = u^3 - 2u$ และ $u = \sqrt{x}$

14.2 $y = (u+1)^2$ และ $u = x + \dfrac{1}{x}$

14.3 $y = \sqrt{u^2 + 3}$ และ $u = x - 2x^2$

14.4 $y = \dfrac{u+1}{u-1}$ และ $u = \dfrac{1}{2x}$

15. จงหา $\dfrac{dy}{dt}$ เมื่อ

15.1 $y = u - u^2$, $u = x - x^3$ และ $x = \sqrt{t} + 1$

15.2 $y = 5 + 3u^{-2}$, $u = \sqrt{x}$ และ $x = t^2$

16. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

16.1 $f(x) = (x^2+1)\sqrt{x^2-1}$

16.2 $F(x) = (4x - x^2)^{99}$

16.3 $f(x) = (x + \sqrt{x})^5$

16.4 $f(x) = (1 + x^4)^{\frac{2}{3}}$

16.5 $f(x) = (2x-3)^4(x^2+x)^3$

16.6 $f(s) = \sqrt{\dfrac{s^2+1}{s^2+3}}$

17. ให้ $F(x) = f \circ g(x)$ เมื่อ $f(-2) = 8, f'(-2) = 4, f'(5) = 3, g(5) = -2$ และ $g'(5) = 6$ จงหา $F'(5)$

18. ถ้า $h(x) = \sqrt{4 + 3f(x)}$ เมื่อ $f(1) = 7$ และ $f'(1) = 4$ จงหา $h'(1)$

19. ให้ $r(x) = f(g(h(x)))$ เมื่อ $h(1) = 2, g(2) = 3, h'(1) = 4, g'(2) = 5$ และ $f'(3) = 6$ จงหา $r'(1)$

20. ให้ $y = f\left(\sqrt{x} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$ เมื่อ $f'(0) = 2$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$

21. ให้ $y = f(1 + \sqrt{u})$, $u = 2 - x^2$ เมื่อ $f'(2) = -3$ จงหา $\dfrac{dy}{dx}$ ที่ $x = 1$

22. ให้ $y = x^3 + 3x^2 + 3x$ จงหา $\dfrac{dx}{dy}$ ในรูป y

23. จงหาอนุพันธ์อันดับสองและอันดับสาม ของฟังก์ชันต่อไปนี้

23.1 $f(x)=x^5+6x^3+x^2+3$

23.2 $f(x)=x^{10}+x^7-x$

23.3 $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$

23.4 $f(x)=(x-1)(x+1)$

23.5 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

23.6 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}$

23.7 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

24. จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้

24.1 $f(x)=\text{cot}x\text{sec}^2x$

24.2 $f(x)=\text{sin}2x+x\text{cos}x$

24.3 $f(x)=e^x\text{tan}e^x$

24.4 $f(x)=e^{-\text{cot}x^2}$

24.5 $f(x)=\sqrt{e^{-x^2}+\text{cos}x}$

24.6 $f(x)=2^{\text{sec}x}\text{cot}(xe^x)$

24.7 $f(x)=\dfrac{\text{sin}(2e^x)}{1+\text{tan}(x^{-1})}+e^{\text{tan}x}$

24.8 $f(x)=xe^{e^x}+\text{sin}^2x+\text{sin}x^2\text{cos}(e^x)$

24.9 $f(x)=\text{sin}(\text{sec}\sqrt{x})$

24.10 $f(x)=e^{\text{tan}x}+\text{sin}^5x$

24.11 $f(x)=\sqrt{x-\text{arccos}x^2}$

24.12 $f(x)=x^3\text{arcsin}(e^x+x)$

24.13 $f(x)=\text{arctan}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

24.14 $f(x)=\text{arccsc}^3x$

24.15 $f(x)=\text{cos}(\text{arctan}x)\text{sin}2x$

24.16 $f(x)=\text{arccot}3x\text{arctan}4x$

25. จงหาช่วงที่ทำให้ฟังก์ชันต่อไปนี้ เป็นฟังก์ชันเพิ่ม และเป็นฟังก์ชันลด พร้อมหาจุดวิกฤติ

25.1 $f(x)=x^3-6x^2+9x$

25.2 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$

25.3 $f(x)=(x-1)^{\frac{2}{3}}$

25.4 $f(x)=(6-x)x^{\frac{1}{5}}$

26. จงหาค่าสุดขีดบนช่วงที่กำหนดให้ต่อไปนี้

26.1 $f(x)=2x-x^2 \quad ; [0,1]$

26.2 $f(x)=\dfrac{x}{x+3} \quad ; [-1,5]$

27. จงหาค่าสุดขีดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดให้ต่อไปนี้

27.1 $f(x)=2x^3+3x^2-12x$

27.2 $f(x)=2x^4-4x^2+6$

27.3 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$

27.4 $f(x)=(1-x^2)(1-x)$

27.5 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}+2x^{-\frac{1}{3}}$

27.6 $f(x)=\dfrac{|x|}{1+|x|}$

28. จงหาค่าสุดขีดของฟังก์ชัน $f(x)=\dfrac{x^2+100}{x^2-25}$ บนช่วง $[-1,3]$

29. จงหาความสูงและรัศมีของฐานของรูปทรงกระบอกกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด ที่บรรจุในกรวยกลมซึ่งมีรัศมีของฐานยาว 12 นิ้ว และสูง 30 นิ้ว โดยที่ฐานของทรงกระบอกอยู่บนฐานของกรวย

30. กระป๋องรูปทรงกระบอกกลมตรงมีปริมาตร 125 ลูกบาศก์เซนติเมตร มีฝาปิดหัวท้าย ฝาปิดทำจากแผ่นโลหะบางรูปสี่เหลี่ยมจตุรัส และผิวด้านข้างทำจากรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จงหารัศมีและความสูงของกระป๋องที่ทำให้ใช้ปริมาณโลหะน้อยที่สุด

31. จงหาจุดบนพาราโบลา $y = x^2$ ที่อยู่ใกล้จุด $(3, 0)$ มากที่สุด

32. จงหาด้านของรูปสี่เหลี่ยมพื้นผ้าที่มีพื้นที่มากที่สุดที่บรรจุลงไปในสามเหลี่ยมมุมฉากที่มีด้านประชิดมุมฉากทั้งสองด้านคือ a และ b

33. โรงเรียนแห่งหนึ่งนำนักเรียนไปทัศนศึกษา โรงเรียนเก็บเงินนักเรียนคนละ 150 บาท ถ้ามีนักเรียนไม่เกิน 150 คน แต่ถ้านักเรียนไปเกิน 150 คนจะเก็บลดลง 50 สตางค์คูณด้วยจำนวนคนที่เกินจากจำนวน 150 คน นักเรียนควรไปทัศนศึกษากี่คนจึงจะทำให้โรงเรียนเก็นเงินได้มากสุด

34. จงหาส่วนสูงของกรวยกลมตรงที่มีปริมาตรมากที่สุด และสามารถบรรจุในทรงกลมรัศมี r หน่วย

35. จงหาลิมิตต่อไปนี้

35.1 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}$

35.2 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos^2 x - 1}{x}$

35.3 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

35.4 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - \cos^2 x}{x \sin x}$

35.5 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \sin x}{x - \tan x}$

35.6 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \arctan x}{x + \sin x}$

35.7 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\cot 3x}{\cot 2x}$

35.8 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$

35.9 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x \ln x}{x + \ln x}$

35.10 $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2e^{2x} + \ln x}{e^{2x} + x^2}$

35.11 $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{4 - 3e^x - e^{-3x}}{4x^2}$

35.12 $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$

35.13 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sec^2 x - 2\tan x}{1 + \cos 4x}$

35.14 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\tan x) \ln(\sin x)$

35.15 $\lim\limits_{x\to 1^+} \left(\dfrac{1}{\ln x} + \dfrac{x}{x - 1}\right)$

35.16 $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}^-} (\tan 5x - \tan x)$

35.17 $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{2^x}{x} - \csc x\right)$

35.18 $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2}{x - 1} - \dfrac{x^2}{x + 1}\right)$

35.19 $\lim\limits_{x\to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}}$

35.20 $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + 2x)^{\frac{1}{x}}$

35.21 $\lim\limits_{x\to 1^-} (\sqrt{2 - x^2} - 1)^{x-1}$

35.22 $\lim\limits_{x\to 1} (1 - x)^{\ln x}$

35.23 $\lim\limits_{x\to 0^+} (1 + 3x)^{\frac{1}{2x}}$

35.24 $\lim\limits_{x\to 0} (x + e^{\frac{x}{2}})^{\frac{2}{x}}$

35.25 $\lim\limits_{x\to 0^-} (\cos x - \sin x)^{\frac{1}{x}}$

35.26 $\lim\limits_{x\to 0^+} (x + \sin x)^{\tan x}$

35.27 $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos x)^{\cot x}$

4.4 ปริพันธ์และการประยุกต์

บทนิยาม 4.4.1 เรียกฟังก์ชัน f ว่าหาปฏิยานุพันธ์ได้บนช่วง I ถ้ามีฟังก์ชัน F ซึ่ง

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก F ว่าเป็น**ปฏิยานุพันธ์** (antiderivative) ของฟังก์ชัน f บนช่วง I

ในบางครั้งเราจะละการบอกช่วง I ในบทนิยาม 4.4.1 แต่เข้าใจตรงกันว่า F เป็นปฏิยานุพันธ์บนช่วงที่ฟังก์ชัน F หาอนุพันธ์ได้

ตัวอย่าง 4.4.2 จงหาปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันต่อไปนี้ อย่างน้อย 2 ฟังก์ชัน

1. $f(x) = 3x^2$

2. $f(x) = \cos x$

ทฤษฎีบท 4.4.3 ถ้า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f บนช่วง I แล้วมีค่าคงตัว C ซึ่ง

$$G(x) = F(x) + C \qquad \text{ทุก } x \in I$$

เรียก $F(x) + C$ ว่า**ปฏิยานุพันธ์ทั่วไป** (general antiderivative) ของ f บนช่วง I

บทพิสูจน์. สมมติว่า F และ G เป็นปฏิยานุพันธ์ของของฟังก์ชัน f บนช่วง I ให้ $x \in I$
จะได้ว่า $F'(x) = f(x)$ และ $G'(x) = f(x)$ แล้ว

$$(G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \qquad \text{ทุก } x \in I$$

ดังนั้น $(G - F)(x) = C$ เมื่อ C เป็นค่าคงตัว สรุปได้ว่า $G(x) = F(x) + C$ □

บทนิยาม 4.4.4 ให้ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชัน f จะเรียกปฏิยานุพันธ์ทั่วไปของ f ว่า **ปริพันธ์ไม่จำกัดเขต** (indefinite integral) ของ f เขียนแทนด้วย $\int f(x)\,dx$ จะได้ว่า

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

เรียก	$\int$	ว่าเครื่องหมายปริพันธ์ (integral sign)
เรียก	$f(x)$	ว่าตัวถูกปริพันธ์ (integrand)
เรียก	x	ว่าตัวแปรของปริพันธ์ (variable of integral)
เรียก	C	ว่าค่าคงตัวของปริพันธ์ (constant of integral)

ทฤษฎีบท 4.4.5 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้ และ k เป็นค่าคงตัวแล้ว

1. $\displaystyle\int f'(x)\,dx = f(x) + C$
2. $\displaystyle\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int f(x) - g(x)\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

จากความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
\int 1\,dx &= x + C \\
\int x^n\,dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{เมื่อ } n \neq -1 \\
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ell\text{n}|x| + C \\
\int e^x\,dx &= e^x + C \\
\int a^x\,dx &= \frac{a^x}{\ell\text{n}a} + C \\
\int \text{sin}x\,dx &= -\text{cos}x + C \\
\int \text{cos}x\,dx &= \text{sin}x + C \\
\int \text{sec}x\text{tan}x\,dx &= \text{sec}x + C \\
\int \text{sec}^2x\,dx &= \text{tan}x + C \\
\int \text{csc}x\text{cot}x\,dx &= -\text{csc}x + C \\
\int \text{csc}^2x\,dx &= -\text{cot}x + C \\
\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \text{arcsin}x + C = -\text{arccos}x + C \\
\int \frac{1}{1+x^2}\,dx &= \text{arctan}x + C = -\text{arccot}x + C \\
\int \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}\,dx &= \text{arcsec}\,x + C = -\text{arccsc}x + C
\end{aligned}
$$

ตัวอย่าง 4.4.6 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int 3x^2 + x - 1\,dx$

ตัวอย่าง 4.4.7 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int \sqrt{x}(x-1)\,dx$

2. $\int \frac{(x-1)^2}{x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 4.4.8 จงหาปริพันธ์ $\int \frac{2+x^2}{1+x^2}\,dx$

ตัวอย่าง 4.4.9 อนุภาคหนึ่งเคลื่อนที่ตามแนวแกน X ด้วยความเร่งขณะเวลา t ใด ๆ เป็น

$$\sqrt{t} + \sin t - 5 \quad \text{ฟุต/วินาที}^2$$

เมื่อ $t = 0$ อนุภาคอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางซ้าย 30 ฟุต และอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 20 ฟุต/วินาที จงหาสมการการเคลื่อนที่

ทฤษฎีบท 4.4.10 **การหาปริพันธ์โดยการแทนค่า** (Integration by substitution)
ให้ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้และมีเรจน์เป็นช่วง I และ f เป็นฟังก์ชันที่หาปฏิยานุพันธ์ได้บน I แล้ว

$$\int \left[f(u(x)) \frac{du(x)}{dx} \right] dx = \int f(u)\, du$$

ตัวอย่าง 4.4.11 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

1. $\int (2x+1)^{10}\, dx$

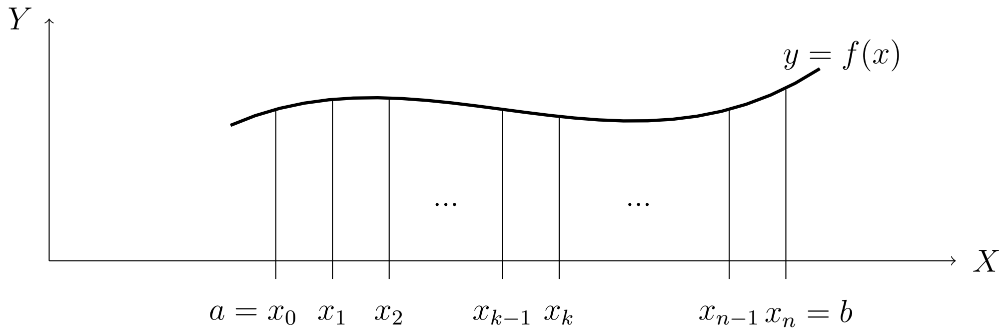
2. $\int x\sqrt{x^2+1}\, dx$

ตัวอย่าง 4.4.12 จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขต $\int x^2 \sqrt{x-2}\, dx$

บทนิยาม 4.4.13 เรียกเซต $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ ว่า**ผลแบ่งกั้น (partition)** ของช่วง $[a, b]$ ซึ่งจุดใน P แบ่งช่วง $[a, b]$ ออกเป็น n ช่วงคือ

$$[x_0, x_1],\ [x_1, x_2],\ [x_2, x_3], ...,\ [x_{n-1}, x_n]$$

นั่นคือ $[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup [x_2, x_3] \cup ... \cup [x_{n-1}, x_n]$ เมื่อ $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$



บทนิยาม 4.4.14 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a, b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a, b]$ สำหรับ $k = 1, 2, 3, ..., n$ และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ถ้า

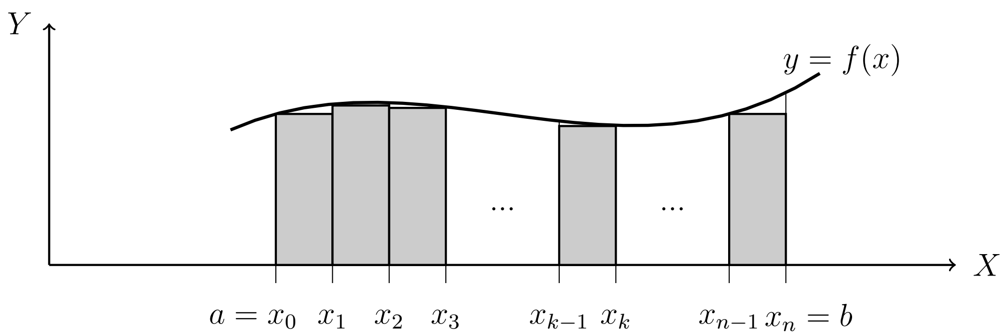
m_k เป็นค่าของ f ที่น้อยที่สุดในช่วง $[x_{k-1}, x_k]$
M_k เป็นค่าของ f ที่มากที่สุดในช่วง $[x_{k-1}, x_k]$

และให้

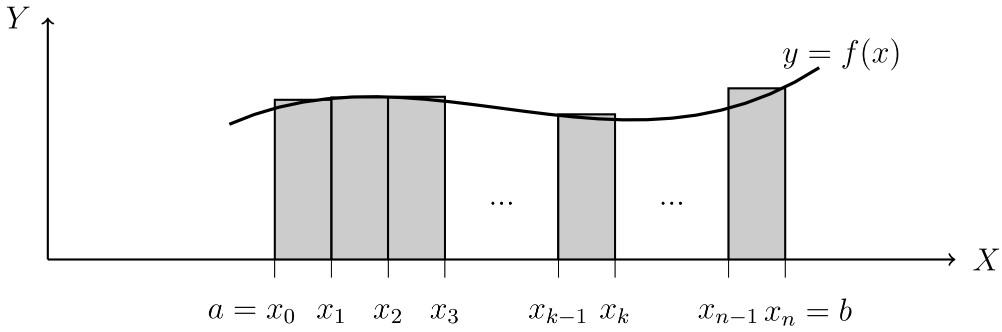
$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k \qquad \text{และ} \qquad U(P, f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

จะเรียก $L(P, f)$ ว่า**ผลบวกล่าง (lower sum)** ของ f บนช่วง $[a, b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P
และเรียก $U(P, f)$ ว่า**ผลบวกบน (upper sum)** ของ f บนช่วง $[a, b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P

อาจแสดงผลบวกล่างและผลบวกบนได้ดังรูปต่อไปนี้



$$L(P, f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$



$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k$$

ถ้าให้ A เป็นพื้นที่ปิดล้อมด้วยกราฟ $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a,b]$ สรุปได้ว่า

$$L(P,f) \leq A \leq U(P,f)$$

บทนิยาม 4.4.15 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ สำหรับ $k = 1,2,3,...,n$ และ $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ ถ้า $x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ หรือ $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$ แล้ว

$$S^*(P,f) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \Delta x_k$$

เรียก $S^*(P,f)$ ว่า**ผลบวกรีมันน์** (Riemann sum) ของ f บนช่วง $[a,b]$ เทียบกับผลแบ่งกั้น P

จากการบทนิยามผลบวกรีมันน์จะได้ว่า

$$L(P,f) \leq S^*(P,f) \leq U(P,f)$$

ทฤษฎีบท 4.4.16 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $P = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ถ้า $\lim\limits_{n\to\infty} \|P\| = 0$ โดยที่

$$\|P\| = \max\{|x_i - x_{i-1}| \, : \, i = 1,2,3,...,n\}$$

แล้ว $\lim\limits_{n\to\infty} L(P,f)$, $\lim\limits_{n\to\infty} S^*(P,f)$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} U(P,f)$ มีค่า และ

$$\lim_{n\to\infty} L(P,f) = \lim_{n\to\infty} S^*(P,f) = \lim_{n\to\infty} U(P,f) = A$$

เมื่อ A เป็นพื้นที่ระหว่างเส้นโค้ง $y = f(x)$ กับแกน X บนช่วง $[a,b]$

บทนิยาม 4.4.17 ให้ $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ P เป็นผลแบ่งกั้น $[a,b]$ ถ้า

$$\lim_{n\to\infty} S^*(P,f) = L$$

จะกล่าวว่า f **หาปริพันธ์ได้** (integrable) บน $[a,b]$ และเรียกค่าลิมิต L ว่า **ปริพันธ์จำกัดเขต** (definite integral) ของ f บน $[a,b]$ และเขียนแทนด้วย

$$\int_a^b f(x)\,dx = L$$

เรียก a และ b ว่า**ลิมิตล่าง** (lower limit) และ**ลิมิตบน** (upper limit) ตามลำดับ

ทฤษฎีบท 4.4.18 กำหนดให้ f และ g หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ k เป็นค่าคงที่ แล้ว

1. $\displaystyle\int_c^c f(x)\,dx = 0$ เมื่อ $c \in [a,b]$
2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_a^b f(x)-g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ เมื่อ $c \in [a,b]$
7. ถ้า $f(x) \geq 0$ สำหรับ $x \in [a,b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$
8. ถ้า $f(x) \leq g(x)$ สำหรับ $x \in [a,b]$ แล้ว $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$
9. $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

ตัวอย่าง 4.4.19 ให้ f เป็นฟังก์ชันที่หาปริพันธ์ได้บนช่วง $[0,5]$ โดยที่

$$\int_0^3 f(x)\,dx = 3, \quad \int_1^5 f(x)\,dx = 8 \quad \text{และ} \quad \int_0^5 f(x)\,dx = 10$$

จงหา

1. $\displaystyle\int_3^3 f(x)\,dx$
2. $\displaystyle\int_5^1 f(x)\,dx$
3. $\displaystyle\int_3^5 f(x)\,dx$
4. $\displaystyle\int_5^3 f(x)\,dx$
5. $\displaystyle\int_3^1 f(x)\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

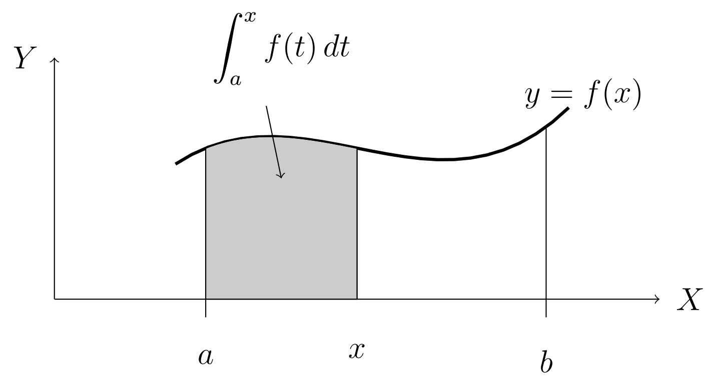
ตัวอย่าง 4.4.20 จงหา $\displaystyle\int_{-1}^{3} 4\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

ตัวอย่าง 4.4.21 จงหา $\displaystyle\int_{0}^{3} (4-2x)\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

ตัวอย่าง 4.4.22 จงหา $\displaystyle\int_{0}^{2} \sqrt{4-x^2}\,dx$ โดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

พิจารณาฟังก์ชัน f ต่อเนื่องบนช่วง $[a,b]$ และ $f(x) \geq 0$ ทุกๆ $x \in [a,b]$ พื้นที่ใต้กราฟของ f บน $[a,x]$ แสดงได้ดังรูป

รูปที่ 4.2: พื้นที่ใต้กราฟของ f บน $[a,x]$



ทฤษฎีบท 4.4.23 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่หนึ่งของแคลคูลัส
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ กำหนดให้

$$F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \qquad \text{เมื่อ} \quad x \in [a,b]$$

แล้วจะได้ว่า F เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้บนช่วง $[a,b]$ และ

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_c^x f(t)\,dt = f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in [a,b]$$

ตัวอย่างเช่น

1. $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^x \sqrt{1+t^2}\,dt =$
2. $\dfrac{d}{ds}\displaystyle\int_{-2}^s \sin(t^2)\,dt =$

ทฤษฎีบท 4.4.24 ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ $c \in [a,b]$ แล้ว

$$\frac{d}{dx}\int_c^u f(t)\,dt = f(u)\cdot\frac{du}{dx}$$

เมื่อ $u = u(x)$ เป็นฟังก์ชันที่หาอนุพันธ์ได้ที่ x และมีเรนจ์เป็นสับเซตของ $[a,b]$

ตัวอย่าง 4.4.25 จงหา $\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{x^2+1} t\cos t\,dt$

ทฤษฎีบท 4.4.26 ทฤษฎีบทหลักมูลบทที่สองของแคลคูลัส
ให้ f เป็นฟังก์ชันต่อเนื่องบน $[a,b]$ และ F เป็นปฏิยานุพันธ์ของ f บนช่วง $[a,b]$ แล้ว

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

ตัวอย่าง 4.4.27 จงหาค่าของ $\displaystyle\int_0^1 x^2 + 1\,dx$

ตัวอย่าง 4.4.28 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_0^1 e^x - x + 1\,dx$

2. $\displaystyle\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{x}\,dx$

ตัวอย่าง 4.4.29 จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\int_{-1}^{3} \frac{x^2+1}{x^3+3x}\,dx$

2. $\displaystyle\int_{1}^{5} x\sqrt{x-1}\,dx$

แบบฝึกหัด 4.4

1. จงหาฟังก์ชัน f ที่มีปฏิยานุพันธ์เป็น F ต่อไปนี้

1.1 $F(x) = 5$

1.2 $F(x) = (2x+1)^{10}$

1.3 $F(x) = \sqrt[3]{x^3+x^2-1}$

1.4 $F(x) = \dfrac{x-1}{2x+3}$

2. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

2.1 $\int x^4(\sqrt{x}+2)\,dx$

2.2 $\int \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2\,dx$

2.3 $\int (x+1)^3\,dx$

2.4 $\int \dfrac{x-1}{x+\sqrt{x}}\,dx$

2.5 $\int \cos x(\sec x + 3\tan x)\,dx$

2.6 $\int \sec x(\tan x - 2\cos x)\,dx$

2.7 $\int \dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

2.8 $\int \dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}\,dx$

3. จงหาสมการเส้นโค้งที่ผ่านจุด $(-1,2)$ โดยที่ความชันที่จุด (x,y) ใดๆเป็น $\dfrac{x^3-x^2}{x^5}$

4. วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร่งตามแนวแกน X ขณะเวลา t ใด ๆ เป็น

$$6t + \cos t \quad \text{เมตร/วินาที}^2$$

เมื่อ $t = 0$ วัตถุอยู่ห่างจากจุดกำเนิดไปทางขวา 20 เมตร และเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 10 เมตร/วินาที จงหาสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้

5. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดโดยการกำหนดตัวแปรต่อไปนี้

5.1 $\int x^2\sqrt{1-x}\,dx$ ให้ $u = 1-x$

5.2 $\int \dfrac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3}\,dx$ ให้ $u = \sqrt{x}+1$

5.3 $\int \dfrac{1-\sin x}{(x+\cos x)^2}\,dx$ ให้ $u = x+\cos x$

5.4 $\int \dfrac{\ell n(x)}{x}\,dx$ ให้ $u = \ell n x$

6. กำหนดให้ $\int_1^5 f(x)\,dx = 5$, $\int_3^5 f(x)\,dx = 8$ และ $\int_1^{10} f(x)\,dx = 15$ จงหาค่าของ

6.1 $\int_1^3 f(x)\,dx$

6.2 $\int_5^1 f(x)\,dx$

6.3 $\int_5^{10} f(x)\,dx$

6.4 $\int_3^{10} f(x)\,dx$

6.5 $\int_5^3 f(x)\,dx$

6.6 $\int_5^5 f(x)\,dx$

7. จงหาปริพันธ์ไม่จำกัดเขตต่อไปนี้

7.1 $\int x^4(\sqrt{x}+2)\,dx$

7.2 $\int \sqrt[3]{x^2}(x-2)^2\,dx$

7.3 $\int (1+\frac{1}{t})^2\,dt$

7.4 $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$

7.5 $\int \frac{x^2}{1+x^2}\,dx$

7.6 $\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx$

7.7 $\int \sqrt[3]{3x+1}\,dx$

7.8 $\int (x+1)^2\sqrt{1-x}\,dx$

7.9 $\int (x^2-2x+1)^{10}\,dx$

7.10 $\int \sqrt{1+\sqrt{1+x}}\,dx$

7.11 $\int x\sqrt{3x^2+2}\,dx$

7.12 $\int \frac{1}{x\sqrt{x-1}}\,dx$

7.13 $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

7.14 $\int \frac{1}{x\ell\mathrm{n}x^4}\,dx$

7.15 $\int \frac{\sin e^{-x}}{e^x\cos e^{-x}}\,dx$

7.16 $\int \sec x(\tan x-2\cos x)\,dx$

7.17 $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$

7.18 $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\,dx$

7.19 $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$

7.20 $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\,dx$

8. จงหาปริพันธ์จำกัดเขตโดยใช้พื้นที่ใต้กราฟ

8.1 $\int_{-3}^{4}(2x+8)\,dx$

8.2 $\int_{1}^{2}|3x-2|\,dx$

8.3 $\int_{-2}^{3}|x+1|+|x|\,dx$

8.4 $\int_{-2}^{2}x+|x|\,dx$

8.5 $\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}\,dx$

8.6 $\int_{0}^{1}\sqrt{2-x^2}\,dx$

8.7 $\int_{0}^{3}3+\sqrt{4-x^2}\,dx$

8.8 $\int_{0}^{3}4+\sqrt{9-x^2}\,dx$

8.9 $\int_{0}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{1-x^2}\,dx$

9. กำหนดให้ $F(x)=\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2+3}}\,dt$ จงหา

9.1 $F(1)$

9.2 $F'(1)$

9.3 $F''(1)$

10. จงหา $F'(x)$ เมื่อกำหนดให้

10.1 $F(x)=\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt$

10.2 $F(x)=\int_x^3 \cos t^2\,dt$

10.3 $F(x)=\int_{1-x}^{1+x} e^t\arctan t\,dt$

10.4 $F(x)=\int_{\sqrt{x}}^{\cos x} t\ell\mathrm{n}(\tan t)\,dt$

11. กำหนดให้ $\int_1^2 f(x)\,dx = 1$ จงหาค่าต่อไปนี้

11.1 $\int_{0.5}^1 f(2t)\,dt$

11.2 $\int_1^4 \frac{f(\sqrt{t})}{\sqrt{t}}dt$

12. จงหาค่าปริพันธ์จำกัดเขตต่อไปนี้

12.1 $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + x\right)\,dx$

12.2 $\int_1^3 \sqrt{x}\left(3 - x + \frac{1}{\sqrt{x^3}}\right)\,dx$

12.3 $\int_0^1 |3 - 4x|\,dx$

12.4 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(x + \frac{2}{\sin^2 x}\right)\,dx$

12.5 $\int_{-2}^1 |x^2 + 3x + 2|\,dx$

12.6 $\int_0^{\frac{3\pi}{4}} |\cos x|\,dx$

12.7 $\int_{-1}^4 ||x - 2| - 1|\,dx$

12.8 $\int_{-1}^2 \sqrt{2 + |x|}\,dx$

12.9 $\int_1^4 \sqrt{x}(x - 1)^2\,dx$

12.10 $\int_0^2 |1 - x|\,dx$

12.11 $\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{4 - 3t}}\,dt$

12.12 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \sin x)^2\,dx$

12.13 $\int_{-1}^1 \frac{1}{(1 + |x|)^3}\,dx$

12.14 $\int_1^8 \frac{1}{(\sqrt[3]{t} + 1)^4}\,dt$

12.15 $\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{(1 + y^2)^3}}\,dy$

12.16 $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin 3x \cos 5x\,dx$

12.17 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^4 x}{1 + \sin x}\,dx$

12.18 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3z}{\sqrt{7 - 2\sin 3z}}\,dz$

4.5 สมการเชิงอนุพันธ์เบื้องต้น

สมการที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง ฟังก์ชันกับอนุพันธ์ของฟังก์ชันนั้น เรียกว่า**สมการเชิงอนุพันธ์** (differential equation) ตัวอย่างเช่น

1. สมการการเคลื่อนที่ (Equation of motion)

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = f(t)$$

2. สมการการเติบโตของจำนวนประชากร (Population growth equation)

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

3. สมการคลื่นในหนึ่งมิติ (One-dimensional wave equation)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

บทนิยาม 4.5.1 สมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันตัวแปรเดียวเรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์สามัญ** (Ordinary Differential Equation : ODE) ถ้าสมการเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชันมากกว่าหนึ่งตัวแปร เรียกว่า **สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย** (Partial Differential Equation : PDE)

ตัวอย่าง 4.5.2 จงตรวจสอบว่าสมการเชิงอนุพันธ์ต่อไปนี้เป็น ODE หรือ PDE

สมการเชิงอนุพันธ์	ODE	PDE
$\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} = e^x$		
$\frac{d^3x}{dt^3} - 2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}$		
$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \lambda\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2\sin x$		

บทนิยาม 4.5.3 อันดับ (order) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คืออันดับสูงสุดของอนุพันธ์ที่ปรากฏในสมการนั้น **ดีกรี** (degree) ของสมการเชิงอนุพันธ์ คือกำลังสูงสุดของอนุพันธ์อันดับสูงสุดที่ปรากฏที่ปรากฏในสมการนั้น เมื่อจัดทุก ๆ กำลังเป็นจำนวนเต็มบวก

บทนิยาม 4.5.4 เรียกสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation) ถ้า

1. ทุก ๆ ตัวแปรตามและอนุพันธ์ของตัวแปรตามมีเลขชี้กำลังเป็น 1
2. ไม่มีพจน์ในรูปผลคูณของตัวแปรตาม และ/หรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ
3. ไม่มีพจน์ในรูปฟังก์ชันอดิศัยของตัวแปรตามหรือ อนุพันธ์ของตัวแปรตามปรากฏในสมการ

และเรียกสมการเชิงอนุพันธ์ที่ไม่เป็นสมการเชิงเส้นว่า **สมการไม่เชิงเส้น** (nonlinear equation)

สมการเชิงอนุพันธ์อันดับหนึ่งดีกรีหนึ่งจะเขียนได้เป็น

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad \text{หรือ} \qquad M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

บทนิยาม 4.5.5 เราจะเรียกฟังก์ชันซึ่งไม่เป็นฟังก์ชันของอนุพันธ์ และสอดคล้องสมการเชิงอนุพันธ์ว่า **ผลเฉลย** (solution) ของสมการ

ผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์อาจจะอยู่ในรูปของฟังก์ชันที่นิยามแบบแจ่มชัด (explicite function) หรือฟังก์ชันที่นิยามโดยปริยาย (implicite function) ก็ได้ เราเรียกผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์ที่มีค่าคงตัวไม่เจาะจงว่า **ผลเฉลยทั่วไป** (general solution) และผลเฉลยที่กำหนดค่าคงตัวแน่นอนว่า **ผลเฉลยเฉพาะ** (particular solution)

ตัวอย่าง 4.5.6 จงแสดงว่า $y = Ae^{-3x} + Be^{x}$ ผลเฉลยทั่วไปของสมการ $y'' + 2y' = 3y$

ตัวอย่าง 4.5.7 จงแสดงว่า $x = \cos\omega t + \sin\omega t$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของสมการ

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

ตัวอย่าง 4.5.8 วัตถุหนึ่งมีการเคลื่อนที่แบบซิมเปิลฮาร์โมนิก (SHM) โดยกฎของฮุก (Hooke's law) คือ $F = -kx$ เมื่อ F คือแรงที่กระทำกับวัตถุ x คือระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่จากตำแหน่งสมดุล และ k ค่าคงตัวสปริง

1. โดยใช้กฎของนิวตันที่ว่า $F = ma$ จงแสดงว่า

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x \qquad \text{เมื่อ } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2. จงแสดงว่า $x = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของสมการ $\dfrac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$

3. ใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติแสดงว่า

$$x(t) = A\cos(\omega t - \phi)$$

เมื่อ ϕ คือเฟสเริ่มต้น

ตัวอย่าง 4.5.9 อัตราการสลายตัวของนิวเคลียสธาตุกัมมันตรังสีแปรผันตามนิวเคลียสของธาตุกัมมันตรังสีที่อยู่ขณะนั้น แสดงดังสมการ

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N$$

เมื่อ N คือจำนวนนิวเคลียส และ λ คือค่าคงที่การสลายตัว
จงหาผลเฉลยของสมการนี้

ตัวอย่าง 4.5.10 ในการเพาะแบคทีเรีย ถ้าให้ตอนเริ่มต้นมีจำนวนแบคทีเรียอยู่จำนวนหนึ่ง เมื่อเวลาผ่านไป 1 ชั่วโมงพบว่าจำนวนแบคทีเรียเพิ่มขึ้นเป็น 1.5 เท่าของจำนวนเริ่มต้น ถ้าอัตราการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียแปรผันตามจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น จงหาเวลาที่ทำให้แบคทีเรียเพิ่มจำนวนขึ้นเป็น 3 เท่าของจำนวนเริ่มต้น

ตัวอย่าง 4.5.11 ถ้าถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรแปรผันตามจำนวนประชากรในขณะนั้น ในเวลา 30 ปีพบว่ามีประชากรเพิ่มเป็น 2 เท่า อยากทราบว่าต้องใช้เวลาอีกกี่ปีประชากรจึงจะเพิ่มขึ้นเป็น 3 เท่า

แบบฝึกหัด 4.5

1. จงแสดงว่าฟังก์ชันที่กำหนดให้เป็นผลเฉลยของสมการเชิงอนุพันธ์

   1.1 $y = cx + \sqrt{1-c^2}$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $xy' + \sqrt{1-(y')^2} = y$

   1.2 $(x-c)^2 + y^2 = a^2$ เป็นผลเฉลยทั่วไปของ $y^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = a^2$

   1.3 $y^2 - x = 0$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y = 2x\dfrac{dy}{dx}$

   1.4 $y = 4 + \dfrac{4}{x}$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} = 0$

   1.5 $y = \sin x \cos x - \cos x$ เป็นผลเฉลยเฉพาะของ $y' + (\tan x)y = \cos^2 x$

2. ถ้าอัตราการสลายตัวของสารกัมมันตรังสีแปรผันตามปริมาณของสารนั้นในขณะนั้น และการตรวจสอบการสลายตัวของแร่เรเดียม พบว่าในช่วงเวลา 12 ปี เรเดียมหายไป 0.5% จงหา

   2.1 จำนวนร้อยละที่เรเดียมหายไปในเวลา 1000 ปี

   2.2 จงหาเวลาเมื่อปริมาณเรเดียมลดลงเหลือครึ่งหนึ่งของปริมาณเดิม (ครึ่งชีวิต)

3. ในการเพาะแบคทีเรียครั้งหนึ่ง พบว่าอัตราการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียแปรผันตามจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น

   3.1 เมื่อเวลาผ่านไป 4 ชั่วโมง ถ้าพบว่ามีจำนวนแบคทีเรียเป็น 2 เท่าของจำนวนเริ่มต้น จงหาจำนวนแบคทีเรียเมื่อเวลาผ่านไป 12 ชั่วโมง

   3.2 ใน 3 ชั่วโมง ถ้ามีจำนวนแบคทีเรียอยู่ 10,000 ตัว และ 5 ชั่วโมงมีจำนวนเป็น 40,000 ตัว จงหาจำนวนแบคทีเรียในตอนเริ่มต้น

4. ถ้าอัตราการเพิ่มของจำนวนแบคทีเรียแปรผันตามจำนวนแบคทีเรียในขณะนั้น และพบว่าเมื่อเวลาผ่านไป 2 ชั่วโมง มีแบคทีเรียเพิ่มเป็น 5 เท่า อยากทราบว่า เมื่อเวลาผ่านไป 4 ชั่วโมง จำนวนแบคทีเรียเพิ่มเป็นกี่เท่าของจำนวนเริ่มต้น

5. ถ้าประชากรของเมือง ๆ หนึ่งเมื่อ 50 ปีที่แล้วมี 10 ล้านคน และเมื่อ 30 ปีที่แล้วมี 30 ล้านคน ถ้าถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรแปรผันตามจำนวนประชากรในขณะนั้น จงหาว่าปัจจุบันมีประชากรในเมืองนี้เท่าใด

6. ถ้าถ้าอัตราการเพิ่มของประชากรแปรผันตามจำนวนประชากรในขณะนั้น ในเวลา 20 ปีพบว่ามีประชากรเพิ่มเป็น 2 เท่า อยากทราบว่าต้องใช้เวลาอีกกี่ปีประชากรจึงจะเพิ่มขึ้นเป็น 5 เท่า

บทที่ 5

ลำดับและอนุกรม

5.1 ลำดับ

บทนิยาม 5.1.1 ลำดับ (Sequence) **ของจำนวนจริง** คือฟังก์ชันที่โดเมนเป็น $\mathbb{N}$ และค่าเป็นจำนวนจริง

ให้ $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง นิยมเขียน $a(n)$ แทนด้วย a_n ดังนั้น

$$a = \{(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), ..., (n, a_n), ...\}$$

เนื่องจาก a_n ต้องคู่กับ n เสมอ ในคู่อันดับ (n, a_n) ดังนั้นจะเขียนลำดับ a ด้วยสัญลักษณ์

$$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\} \quad \text{หรือ} \quad a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ... \quad \text{หรือ} \quad \{a_n\}$$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงเติมคำตอบในช่องว่างให้สมบูรณ์

$\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$	$a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$	$\{a_n\}$
	$1, 2, 3, ..., n, ...$	
$\{1, 3, 5, 7, ...\}$		
		$\{(-1)^n\}$

ตัวอย่าง 5.1.3 จงหา a_n ของลำดับต่อไปนี้

1. **ลำดับเลขคณิต** (Arithmatic Sequence) ให้ $a_{n+1} = a_n + d$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, ...$

2. **ลำดับเรขาคณิต** (Geometric Sequence) ให้ $a_{n+1} = ra_n$ สำหรับ $n = 1, 2, 3, ...$

ตัวอย่าง 5.1.4 พี่อาร์มยืมเงินน้องเอม 250 บาท และตกลงกันว่าจะจ่ายเงินคืนให้น้องทุกวัน โดยวันแรกจ่ายคืน 10 บาท วันที่สองจ่ายคืน 12 บาท และวันต่อ ๆ ไปจ่ายคืนเพิ่มขึ้นจากวันก่อนหน้าวันละ 2 บาท ทุกวัน จงหาจำนวนวันที่พี่อาร์มจะจ่ายเงินคืนน้องเอมครบพอดี โดยน้องเอมไม่คิดดอกเบี้ยพี่อาร์ม

ตัวอย่าง 5.1.5 กำหนดให้ $\{b_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$b_1 = -3 \text{ และ } \quad b_{n+1} = \frac{1+b_n}{1-b_n} \quad \text{สำหรับ } n = 1, 2, 3, ...$$

จงหาค่าของ b_{2565}

ทฤษฎีบท 5.1.6 ให้ $r, t \in \mathbb{R}$ เป็นเป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^t} = 0$ เมื่อ $t > 0$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$ เมื่อ $|r| < 1$

ตัวอย่าง 5.1.7 จงหาลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim\limits_{n\to\infty} 3^{-n} \cdot 2^n$

2. $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-3}$

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}}$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n$

ทฤษฎีบท 5.1.8 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $L, M, k \in \mathbb{R}$ โดยที่ $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ และ $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$ จะได้ว่า

1. $\lim\limits_{n\to\infty} k = k$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

2. $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k \lim\limits_{n\to\infty} a_n = kL$ เมื่อ k เป็นค่าคงตัว

3. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n + b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L + M$

4. $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n - b_n] = \lim\limits_{n\to\infty} a_n - \lim\limits_{n\to\infty} b_n = L - M$

5. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n = LM$

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \dfrac{L}{M}$ เมื่อ $M \neq 0$

7. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n)^m = \left(\lim\limits_{n\to\infty} a_n\right)^m = L^m$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \sqrt[m]{L}$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ $\sqrt[m]{L} \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 5.1.9 จงหาค่าลิมิตต่อไปนี้

1. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^2+n+3}{1-3n+2n^2}$

2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3^n+2^{n+1}}{3^{n-1}-3\cdot 2^n}$

ทฤษฎีบท 5.1.10 ทฤษฎีบทการบีบ (The Squeeze Theorem)
ให้ $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ และ $\{c_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง ถ้า $n_0 \in \mathbb{N}$ เมื่อ $L \in \mathbb{R}$ ซึ่ง

$$a_n \leq b_n \leq c_n \qquad \text{ทุกจำนวนนับ } n \geq n_0$$

และ $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ แล้ว $\lim_{n\to\infty} b_n = L$

ตัวอย่าง 5.1.11 จงหาค่าลิมิต $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin n}{n}$

บทนิยาม 5.1.12 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะกล่าวว่า $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่เข้า** (convergent) ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนจริง L ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ นอกจากนั้น $\{a_n\}$ เป็น **ลำดับลู่ออก** (divergent)

ตัวอย่าง 5.1.13 จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\left\{\dfrac{(n+1)^3}{n^4+1}\right\}$

2. $\left\{\sqrt{n^2+n}-n\right\}$

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหากรณฑ์ที่สองของพจน์ที่ 6 ของลำดับ 49, 4489, 444889, 44448889,....

2. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับซึ่งสอดคล้องเงื่อนไข

$$\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_{n+1}} \quad \text{สำหรับทุกจำนวนนับ } n$$

ถ้า $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100} = 250$ จงหาค่าของ $|a_{2565} - 2.5|$

3. จงหาลิมิตต่อไปนี้

3.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4n^2+1}+n}{\sqrt[3]{n^3+3}}$

3.2 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(2n+1)^5(1-n)^2}{n^4(2n-1)^3}$

3.3 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$

3.4 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+1}-n+1\right)$

3.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}$

3.6 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5-3n}{\sqrt{n+5}}$

3.7 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(e^n+n^2)}{e^n+n}$

3.8 $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$

3.9 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(n)-2n^2}{n^2+1}$

3.10 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ell\text{n}(3n^2+1)}{\ell\text{n}(n+1)}$

4. จงพิจารณาว่าลำดับต่อไปนี้เป็นลำดับลู่เข้าหรือลู่ออก

4.1 $\left\{\dfrac{\ell\text{n}n}{n^2}\right\}$

4.2 $\left\{\dfrac{n\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{n+1}\right\}$

4.3 $\left\{\dfrac{(3n+1)^2}{\sqrt{n^4+4}}\right\}$

4.4 $\left\{\dfrac{\sqrt{9^n+n}}{2^n+3^n}\right\}$

4.5 $\left\{\dfrac{n}{\ell\text{n}(e^n+1)}\right\}$

4.6 $\left\{\dfrac{3^n+2}{2^n+1}\right\}$

4.7 $\left\{\dfrac{n+(-1)^n}{2n+1}\right\}$

4.8 $\left\{\dfrac{n}{n(-1)^n+2}\right\}$

4.9 $\left\{\dfrac{\ell\text{n}n}{\ell\text{n}(n+1)}\right\}$

5. จงหา 5 พจน์แรกของลำดับ $\{a_n\}$ ที่นิยามต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบว่าเป็นลำดับลู่เข้าหรือลำดับลู่ออก

5.1 $a_1 = 1,\ a_{n+1} = 5a_n - 3$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

5.2 $a_1 = 6,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

5.3 $a_1 = 2,\ a_{n+1} = \dfrac{a_n}{1+a_n}$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$

6. จงหาลิมิตของลำดับ $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, ...\right\}$

5.2 ผลบวกย่อย

บทนิยาม 5.2.1 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \end{aligned}$$

เรียก S_n ว่า **ผลบวกย่อย (partial sum)** ของ n พจน์แรกของ $\{a_n\}$

ตัวอย่าง 5.2.2 จงหาผลบวกย่อย 5 พจน์แรกของลำดับ $1, 3, 5, 7, ...$

ทฤษฎีบท 5.2.3 ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ และ c เป็นค่าคงที่ จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} c = cn$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} ca_k = c\sum_{k=1}^{n} a_k$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \pm \sum_{k=1}^{n} b_k$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{m} a_k + \sum_{k=m+1}^{n} a_k$ เมื่อ $1 < m < n$

ตัวอย่าง 5.2.4 ถ้า $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} a_k = 10$ และ $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} b_k = 15$ จงหาค่าของ

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} 2a_k$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} (a_k + b_k)$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{8} (a_k + 2)$
4. $\displaystyle\sum_{k=1}^{5} (3 + a_k) + \sum_{k=6}^{8} a_k$

ทฤษฎีบท 5.2.5 อนุกรมเทเลสโคปิค (Telescoping Series)
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง จะได้ว่า

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k+1}) = a_1 - a_n$$

ตัวอย่าง 5.2.6 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{k(k+1)}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{80} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

ทฤษฎีบท 5.2.7 สูตรของเกาส์ (Gauss' Formula)

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

ทฤษฎีบท 5.2.8 จะได้ว่า

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

ตัวอย่าง 5.2.9 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} (3k+1)$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} (2k^2 + k - 1)$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} k(k-1)^2$

ตัวอย่าง 5.2.10 ถ้า $\sum_{k=1}^{5}(k^2 + ck - c) = 265$ จงหาค่า c

ตัวอย่าง 5.2.11 จงแสดงว่าผลบวกย่อยของลำดับเลขคณิต $\{a_1 + (n-1)d\}$ คือ

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$$

ตัวอย่าง 5.2.12 ถ้านิชาวางแผนไว้ว่าจะฝากเงินกับธนาคารทุก ๆ เดือน เริ่มเดือนแรก 100 บาท เดือนที่สอง 110 บาท โดยนิชาฝากเพิ่มขึ้น 10 บาทจากเดือนที่ผ่านมา ถ้านิชาไม่ถอนเงินออกมาจากบัญชีนี้ จงหาว่านิชาต้องฝากเงินกี่เดือนจึงจะมีเงินต้นอย่างน้อย 10,000 บาท

ตัวอย่าง 5.2.13 จงแสดงว่าผลบวกย่อยของลำดับเรขาคณิต $\{a_1 r^{n-1}\}$ คือ

$$S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1} \qquad \text{เมื่อ } r \neq 1$$

ตัวอย่าง 5.2.14 จงหาผลบวกของ

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(n + 2^n)$
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} n2^n$

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงหาค่าต่อไปนี้

   1.1 $\sum_{i=1}^{15}(i+1)$ 1.2 $\sum_{i=1}^{15}(i+1)^2$ 1.3 $\sum_{i=1}^{15}(2i+1)(2i-1)$

2. จงหาผลบวก 50 พจน์แรกของลำดับ $1, 5, 9, 13, ...$

3. หนังสือเล่มหนึ่งมี 500 หน้า หน้าแรกมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 1 หน้า หน้าที่สามมีคำผิด 1 คำ เว้นไป 3 หน้า หน้าที่เจ็ดมีคำผิดอีก 1 คำ เว้นไป 5 หน้า เป็นเช่นนี้ไปเรื่อย ๆ จำนวนหน้าที่ไม่มีคำผิดเพิ่มขึ้นที่ละ 2 หน้า จำนวนคำผิดในหนังสือเล่มนี้มีกี่คำ

4. ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับเลขคณิตซึ่ง

$$a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{49} = a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{50} = 1275$$

   และ $a_{100} = 200$ จงหาค่าของ $a_{51} + a_{52} + a_{53} + \cdots + a_{100}$

5. จงหาผลบวกของ

   5.1 $\sum_{n=1}^{20}(3n-1)$ 5.4 $\sum_{p=1}^{20}(1+p^2)p$ 5.7 $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

   5.2 $\sum_{k=1}^{10}(3+3^k)$ 5.5 $\sum_{k=1}^{10}(1+2^k)^2$ 5.8 $\sum_{k=1}^{100}\frac{1}{k(k+2)}$

   5.3 $\sum_{n=1}^{10}n3^{n+1}$ 5.6 $\sum_{n=1}^{10}n^2 2^n$ 5.9 $\sum_{n=1}^{100}\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

6. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนเต็ม โดยที่

$$a_k + a_{k+1} + a_{k+1} = 2576 - k \qquad \text{เมื่อ } k = 1, 2, 3, ...$$

   ถ้า $a_1 = 12$, $a_2 = 2556$ และ $a_3 = 7$ จงหาค่าของ a_{2565}

7. ถ้าลำดับเลขคณิตชุดหนึ่งมีผลบวก 10 พจน์แรกเท่ากับ 205 และผลบวกอีก 10 พจน์ถัดไปเท่ากับ 505 แล้วผลบวก 55 พจน์แรกของลำดับนี้เท่ากับเท่าใด

8. กำหนดให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่

$$a_{n+1} = n^2 - a_n \quad \text{สำหรับ } n = 1, 2, 3, ...$$

   ค่าของ a_1 ที่ทำให้ $a_{101} = 5100$ เท่ากับเท่าใด

5.3 อนุกรมอนันต์

บทนิยาม 5.3.1 ให้ S_n เป็นผลบวกย่อย ของลำดับ $\{a_n\}$ จะเรียกลำดับ $\{S_n\}$ ว่า **อนุกรมอนันต์** (infinite series) หรือ **อนุกรม** (series) ซึ่งจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

บทนิยาม 5.3.2 ถ้า $\{S_n\}$ เป็นลำดับลู่เข้า ซึ่ง $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ เมื่อ $S \in \mathbb{R}$ จะกล่าวว่า $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็น **อนุกรมลู่เข้า** และเรียก S ว่า **ผลบวกของอนุกรม** ซึ่งเขียนแทนด้วย

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$$

ทฤษฎีบท 5.3.3 ให้ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมของจำนวนจริง และ $m \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ก็ต่อเมื่อ $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมออก ก็ต่อเมื่อ $\sum\limits_{n=m}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.3.4 จงพิจารณาว่าอนุกรม $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

ตัวอย่าง 5.3.5 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell\text{n}\left(\frac{n}{n+1}\right)$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}$

ทฤษฎีบท 5.3.6 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้วจะได้ว่า $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

การทดสอบอนุกรมลู่ออก (Divergent Test)
โดยใช้กฎแย้งสลับที่ของทฤษฎีบทนี้จะได้ว่า

$$\text{ถ้า } \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \text{ แล้ว } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 5.3.7 จงแสดงว่าอนุกรม $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2-1}$ ลู่ออก

ทฤษฎีบท 5.3.8 อนุกรมเรขาคณิต $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$

$$\text{เป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ } |r| < 1 \text{ โดยมีผลบวกของอนุกรมเป็น } \frac{a}{1-r}$$

และเป็นอนุกรมลู่ออกเมื่อ $|r| \geq 1$

ตัวอย่าง 5.3.9 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n}$

ทฤษฎีบท 5.3.10 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า โดยที่ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่เข้า}$$

และ $\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n) = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \beta \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

ทฤษฎีบท 5.3.11 ให้ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า และ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก จะได้ว่า

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) \text{ เป็นอนุกรมลู่ออก}$$

ตัวอย่าง 5.3.12 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^{n+1}}{4^n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{n}{n+1}\right)$

ตัวอย่าง 5.3.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n+\frac{1}{n(n+1)}\right)$ เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก ถ้าลู่เข้าจงหาผลบวกของอนุกรมนั้น

1.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)}$

1.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^4+n-1}}{3n^2+1}$

1.3 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$

1.4 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ell\text{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

1.5 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{3^n}+\left(-\frac{3}{5}\right)^n\right)$

1.6 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{3^n+5^n}$

1.7 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}-4^n}{10^n}$

1.8 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{-n}+1}{2^n}$

1.9 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2+4n+3}+4^{-n}\right)$

1.10 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$

1.11 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

1.12 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)$

1.13 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

1.14 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$

1.15 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$

1.16 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

1.17 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3-n}$

1.18 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$

2. จงยกตัวอย่างอนุกรม $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ และ $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก ที่ทำให้

2.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่ออก

2.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

5.4 การทดสอบอนุกรม

บทนิยาม 5.4.1 อนุกรมพี (p-Series) คืออนุกรมที่เขียนในรูป $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ เมื่อ $p \in \mathbb{R}$ เป็นค่าคงตัว

ทฤษฎีบท 5.4.2 อนุกรมพีจะเป็นอนุกรมลู่เข้า เมื่อ $p > 1$ และเป็นอนุกรมลู่ออก เมื่อ $p \leq 1$

ตัวอย่าง 5.4.3 จงพิจารณาว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{\sqrt{n}}$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^n + \dfrac{1}{n^3}\right)$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^{-2} + (-2)^n\right)$

ทฤษฎีบท 5.4.4 การทดสอบโดยใช้การเปรียบเทียบ (The Comparision Test)
ให้ $\{a_n\}$ และ $\{b_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง สมมติว่ามี $n_0 \in \mathbb{N}$ ที่ทำให้

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \text{สำหรับ} \quad n \geq n_0$$

จะได้ว่า

1. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก

ตัวอย่าง 5.4.5 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$

บทนิยาม 5.4.6 ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ $a_n > 0$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ อนุกรมในรูป

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n \quad \text{หรือ} \quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} a_n$$

เรียกว่า **อนุกรมสลับ** (alternating series)

ทฤษฎีบท 5.4.7 อนุกรมสลับ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า ถ้าสอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$
2. มี $n_0 \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $a_{n+1} < a_n$ ทุก $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 5.4.8 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$

ทฤษฎีบท 5.4.9 ถ้า $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ เป็นอนุกรมลู่เข้า แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า

ตัวอย่าง 5.4.10 จงตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 5.4.9

ตัวอย่าง 5.4.11 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n^2)}{2^n}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3}$

ทฤษฎีบท 5.4.12 การทดสอบโดยใช้อัตราส่วน (The Ratio Test)
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง โดยที่ $a_n \neq 0$ ทุก ๆ $n \in \mathbb{N}$ และ

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 5.4.13 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{2^n}$

ทฤษฎีบท 5.4.14 การทดสอบโดยใช้การถอดกรณฑ์ (The Root Test)
ให้ $\{a_n\}$ เป็นลำดับของจำนวนจริง และ

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L$$

เมื่อ L เป็นจำนวนจริง หรือ ∞ จะได้ว่า

1. ถ้า $L < 1$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่เข้า
2. ถ้า $L > 1$ และ $L = \infty$ แล้ว $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ เป็นอนุกรมลู่ออก
3. ถ้า $L = 1$ สรุปไม่ได้

ตัวอย่าง 5.4.15 จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n^2}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^{n}$

แบบฝึกหัด 5.4

1. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

1.1 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n^5}}$

1.2 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}$

1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-n} + \frac{1}{n\sqrt[3]{n}}\right)$

1.4 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ell\text{n}n}{n} + \frac{1}{n^4}\right)$

2. จงทดสอบว่าอนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้าหรือลู่ออก

2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{(3n-1)^4}$

2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos n}{n+1}\right)^2$

2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n3^n+5}$

2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+(-1)^n}{n}$

2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^5}$

2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$

2.7 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell\text{n}n}{2^n}$

2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{-n^3}$

2.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

2.10 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

2.11 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\ell\text{n}(n+2)}$

2.12 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{\ell\text{n}n}}$

2.13 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^4-n+1}$

2.14 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$

2.15 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{4^n+3^n}$

2.16 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{4n^3-1}$

2.17 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$

2.18 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arctan n$

2.19 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ell\text{n}(n+1)}{e^n}$

2.20 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$

2.21 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

2.22 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{4^n+n+1}$

2.23 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^n}$

2.24 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n5^n}$

2.25 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$

2.26 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{\ell\text{n}(n+1)}\right)^n$

2.27 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\ell\text{n}(n+1)}{3^n}$

2.28 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\ell\text{n}(n+1)}$

2.29 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^3}$

2.30 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{(2n+1)!}$

2.31 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{2}{3}\right)^n$

2.32 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n^n}$

2.33 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{2n}{n+1}\right)^{-5n}$

2.34 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{100}100^n}{n!}$

3. จงหาค่า p ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

3.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$

3.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{p^n}$

3.3 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+p}$

3.4 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\ell\mathrm{n}\, n)^p}{n}$

4. จงหาจำนวนจริง x ที่ทำให้อนุกรมต่อไปนี้เป็นอนุกรมลู่เข้า

4.1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{x^n}$

4.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

บทที่ 6

เมทริกซ์

6.1 ระบบสมการเชิงเส้น

สมการเส้นตรงในระนาบ XY อยู่ในรูป

$$ax + by = c$$

เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนจริงคงที่โดยที่ a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกันเรียกสมการนี้ว่า **สมการเชิงเส้น** (linear equation) ในตัวแปร xและ y ขยายแนวคิดได้ดังบทนิยาม

บทนิยาม 6.1.1 สมการเชิงเส้นใน n ตัวแปร $x_1, x_2, ., , , x_n$ จะเขียนได้ในรูป

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

เมื่อ $a_1, a_2, ..., a_n$ และ b เป็นจำนวนจริงคงที่ เรียกตัวแปรในสมการนี้ว่า **ตัวแปรไม่ทราบค่า** (unknowns) เรียก $x_1 = s_1, x_2 = s_2, ..., x_n = s_n$ เขียนแทนด้วย $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ว่า **ผลเฉลย** (solution) ของสมการนี้ ถ้า

$$a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots + a_ns_n = b$$

โดยเรียกผลเฉลยทั้งหมดว่า **เซตผลเฉลย** (solution set)

บทนิยาม 6.1.2 เซตของสมการเชิงเส้นใน n ตัวแปร $x_1, x_2, ., , , x_n$ เรียกว่า **ระบบสมการเชิงเส้น** (linear system) และเรียก $(s_1, s_2, ..., s_n)$ ว่า **ผลเฉลย** ของระบบสมการเชิงเส้นนี้ ถ้า $(s_1, s_2, ..., s_n)$ เป็นผลเฉลยของทุก ๆ สมการเชิงเส้นในเซตนี้ โดยเรียกผลเฉลยทั้งหมดว่า **เซตผลเฉลย**

ตัวอย่าง 6.1.3 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นต่อไปนี้

1. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$

ผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นเป็นไปได้ 3 แบบคือ

1. ไม่มีผลเฉลย
2. มีผลเฉลยเพียงชุดเดียว
3. มีผลเฉลยอนันต์ชุด

ตัวอย่าง 6.1.4 จงแสดงว่า $S = \{(x, y, z) : x = 1, y = t, z = 2 + t\}$ เป็นเซตผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases}$$

สมการเชิงเส้น r สมการ ในตัวแปรไม่ทราบค่า k ตัว

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1k}x_k &= b_1\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2k}x_k &= b_2\\
&\vdots\\
a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rk}x_k &= b_r
\end{aligned}$$

เขียนในรูป เมตริกซ์แต่งเติม (augmented matrix) ได้เป็น

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rk} & b_r \end{array}\right].$$

ในการผลเฉลยของระบบสมการ เราจะใช้ **การดำเนินการแถวขั้นมูลฐาน** (elementary row operation) ลดรูปเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งการดำเนินการแถวขั้นมูลฐานแบบใดแบบหนึ่งได้ดังนี้

1. **การสับเปลี่ยน** (Interchange) สับเปลี่ยนแถวที่ p และแถวที่ q เขียนแทนด้วย R_{pq}
2. **การปรับมาตรา** (Scaling) คูณแถวที่ q ด้วยค่าคงที่ $c \neq 0$ เขียนแทนด้วย cR_q
3. **การแทนที่** (Replacement) เปลี่ยนแถวที่ p โดยนำ c ไปคูณแถวที่ q (ไม่ใช้แถวที่ต้องการเปลี่ยน) แล้วนำไปบวกแถวที่ p เขียนแทนด้วย $R_p + cR_q$

เรียกการดำเนินการแถวขั้นมูลฐาน สั้น ๆ ว่า การดำเนินการแถว เมติกซ์ B เกิดจากการดำเนินการแถวของเมติกซ์ A จะเขียนแทนด้วย $A \sim B$ เรียกว่า B สมมูลแถวกับ A

ทฤษฎีบท 6.1.5 ถ้าระบบสมการเชิงเส้นมีเมทริกซ์แต่งเติมซึ่งสมมูลกัน แล้วระบบสมการเชิงเส้นจะมีเซตผลเฉลยเดียวกัน

ตัวอย่าง 6.1.6 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

1. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$
2. $\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

1. $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

2. $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$

ตัวอย่าง 6.1.8 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการแถว

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} x & + & y & = & 3 \\ 2x & - & y & = & 3 \end{array}\right.$$

ตัวอย่าง 6.1.9 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการแถว

$$\begin{cases} x + y - z = 3 \\ 2x + y - 3z = 2 \\ y - 5z = 6 \end{cases}$$

ตัวอย่าง 6.1.10 จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินการแถว

$$\begin{cases} \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & y & + & 2z & = & 1 \\ 2x & & & - & z & = & 1 \end{array} \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นที่มีเมทริกซ์แต่งเติมต่อไปนี้

1.1 $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$

1.2 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

1.3 $\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

2. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นโดยใช้การดำเนินแถว

2.1 $\begin{cases} x + y + 2z &= 8 \\ -x - 2y + 3z &= 1 \\ 3x - 7y + 4z &= 10 \end{cases}$

2.2 $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{cases}$

2.3 $\begin{cases} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{cases}$

2.4 $\begin{cases} 2x - 3y &= -2 \\ 2x + y &= 1 \\ 3x + 2y &= 1 \end{cases}$

2.5 $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -15 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &= 11 \\ -6x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 30 \end{cases}$

2.6 $\begin{cases} 10y - 4z + w &= 1 \\ x + 4y - z + w &= 2 \\ 3x + 2y + z + 2w &= 5 \\ -2x - 8y + 2z - 2w &= -4 \\ x - 6y + 3z &= 1 \end{cases}$

2.7 $\begin{cases} 2s - 3t + 4u - w &= 0 \\ 7s + t - 8u + 9w &= 0 \\ 2s + 8t + u - w &= 0 \end{cases}$

2.8 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$

3. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น

3.1 $\begin{cases} 4x - 8y &= 12 \\ 3x - 6y &= 9 \\ -2x + 4y &= -6 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 &= 4 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} a - 2b + c &= 10 \\ 3a + 5b - 2c &= -5 \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} v + 3w - 2x &= 0 \\ 2u + v - 4w + 3x &= 0 \\ 2u + 3v + 2w - x &= 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x &= 0 \end{cases}$

4. จงหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $\begin{cases} 3x + 2y &= a \\ 2x - 3y &= b \end{cases}$ เมื่อ a และ b เป็นค่าคงที่

6.2 เมทริกซ์และการดำเนินการ

เมทริกซ์ (Matrix) คือกลุ่มของจำนวนซึ่งนำมาจัดเรียงในรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าในเครื่องหมาย [ ] หรือ ( ) โดยแนวนอนเรียกว่า **แถว** (row) แนวตั้งเรียกว่า **หลัก** (column) ตัวอย่างเช่น

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

รูปแบบทั่วไปของ $\boldsymbol{m \times n}$ **เมทริกซ์** ($\boldsymbol{m \times n}$ matrix) เขียนได้เป็น

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

นิยมใช้อักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่แทนเมทริกซ์ เช่น $m \times n$ เมทริกซ์ A เขียนแทนด้วย

$$[a_{ij}]_{m\times n} \qquad \text{หรือ} \qquad [a_{ij}]$$

เรียก a_{ij} ว่า **สมาชิก** (element **หรือ** entry) ของเมทริกซ์ที่อยู่แถวที่ i หลักที่ j และในกรณีที่จำนวนแถวเท่ากับจำนวนหลัก เรียกว่า **เมทริกซ์จตุรัส** (square matrix)

การเท่ากันของสองเมทริกซ์หมายถึงเมทริกซ์ที่มีขนาดเดียวกันและทุกตำแหน่งในเมทริกซ์ทั้งสองเท่ากัน และ**เมทริกซ์ศูนย์** (zero matrix) หมายถึงทุกตำแหน่งมีค่าเป็นศูนย์เขียนแทนด้วย $\underline{0}$

ตัวอย่าง 6.2.1 จงหา x และ y ที่ทำให้ $A = B$ เมื่อ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x+1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \qquad \text{และ} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & y+2 \\ 1-y & 2 \end{bmatrix}$$

บทนิยาม 6.2.2 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ และ $B = [b_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ และ c เป็นจำนวนจริง แล้วนิยาม

1. $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$
2. $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]$
3. $cA = [ca_{ij}]$

ตัวอย่าง 6.2.3 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 10 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 9 & 5 \\ 7 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

จงหา

1. $A + B$

2. $B - C$

3. $C - (A - B)$

4. $(2A + B) - 2C$

ทฤษฎีบท 6.2.4 ให้ $m \times n$ เมทริกซ์ A และ B โดยที่ $\underline{0} = [0]_{m\times n}$ จะได้ว่า

1. $A + B = B + A$
2. $(A + B) + C = A + (B + C)$
3. $A + \underline{0} = A = \underline{0} + A$
4. $A + (-A) = \underline{0} = (-A) + A$

บทนิยาม 6.2.5 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times r}$ และ $B = [b_{ij}]_{r\times n}$ เป็นเมทริกซ์ แล้ว

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ b_{r1} & b_{r2} & \cdots & b_{rj} & \cdots b_{rn} \end{bmatrix} = [c_{ij}]_{m\times n}$$

โดยที่ $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ir}b_{rj}$

ถ้า A เป็นเมทริกซ์จตุรัส แล้วผลคูณเมทริกซ์ $AA, AAA, AAAA, ...$ เขียนแทนด้วย $A^2, A^3, A^4, ...$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง 6.2.6 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 6 & -1 \\ 5 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

จงหา

1. AB

2. BA

3. AC

4. BC

ทฤษฎีบท 6.2.7 ให้ A, B และ C เป็นเมทริกซ์ โดยที่ a, b เป็นจำนวนจริง สมมติการบวกและคูณเมทริกซ์ต่อไปนี้หาค่าได้ จะได้ว่า

1. $A + B = B + A$
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$
3. $A(BC) = (AB)C$
4. $A(B + C) = AB + AC$
5. $(B + C)A = BA + CA$
6. $A(B - C) = AB - AC$ และ $(B - C)A = BA - CA$
7. $a(B + C) = aB + aC$ และ $a(B - C) = aB - aC$
8. $(a + b)C = aC + bC$ และ $(a - b)C = aC - bC$
9. $(ab)C = a(bC) = b(aC)$ และ $a(BC) = B(aC) = (aB)C$

บทนิยาม 6.2.8 ให้ $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ เป็นเมทริกซ์ แล้ว **ทรานสโพส** (traspose) ของ A เขียนแทนด้วย A^T คือ $n \times m$ เมทริกซ์ซึ่ง

$$A^T = [a_{ji}]_{n\times m}$$

ตัวอย่าง 6.2.9 จงหาทรานสโพสของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 7 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \end{bmatrix} \text{ และ } D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 6.2.10 ให้ A และ B เป็นเมทริกซ์ โดยที่ a เป็นจำนวนจริง สมมติการบวกและคูณเมทริกซ์ต่อไปนี้หาค่าได้ จะได้ว่า

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$ และ $(A - B)^T = A^T - B^T$
2. $(AB)^T = B^T A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(aA)^T = a(A^T)$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงหา a, b, c และ d ที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$\begin{bmatrix} a-b & b+c \\ 3d+c & 2a-4d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

2. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ และ }$$
$$E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

จงหาผลลัพธ์เมทริกซ์ต่อไปนี้ (ถ้าหาค่าได้)

2.1 $D+E$

2.2 $D-E$

2.3 $3A$

2.4 $-6D$

2.5 $2B-C$

2.6 $4E-2D$

2.7 $3(D+2E)$

2.8 $-(A-2A)$

2.9 $(D+E)^T$

2.10 $2A^TD$

2.11 $(2D^T-5E)^T$

2.12 $(C^T)B$

2.13 AB

2.14 DA

2.15 DE

2.16 EDE^T

2.17 $(AC)^T$

2.18 A^TD

2.19 $DD+EE$

2.20 $(EA+DA)B$

2.21 $(AB)^TB+A$

3. จงเขียนเมทริกซ์ $A=[a_{ij}]_{4\times 4}$ ต่อไปนี้เมื่อกำหนดเงื่อนไขของสมาชิกดังนี้

3.1 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i=j \\ 0 & \text{ถ้า } i\neq j \end{cases}$

3.2 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i\geq j \\ 0 & \text{ถ้า } i<j \end{cases}$

3.3 $a_{ij} = \begin{cases} 2^{i-j} & \text{ถ้า } i\geq j \\ 1 & \text{ถ้า } i<j \end{cases}$

3.4 $a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } |i-j|>1 \\ -1 & \text{ถ้า } |i-j|\geq 1 \end{cases}$

3.5 $a_{ij}=0$ ถ้า $i\neq j$

3.6 $a_{ij}=0$ ถ้า $i<j$

3.7 $a_{ij}=0$ ถ้า $i>j$

3.8 $a_{ij}=i+j$

3.9 $a_{ij}=ij$

3.10 $a_{ij}=i^j$

6.3 เมทริกซ์ผกผัน

บทนิยาม 6.3.1 เมทริกซ์เอกลักษณ์ (identity matrix) เขียนแทนด้วย I คือเมทริกซ์จตุรัสที่มีสมาชิกในแนวทแยงเป็น 1 สมาชิกนอกนั้นเป็น 0 ทุกตัว

อาจเขียน I_n สำหรับ $n \times n$ เมทริกซ์ เช่น

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 6.3.2 สำหรับเมทริกซ์ $A = [a_{ij}]_{2\times 3}$ ใด ๆ จงหา I_2A และ AI_3

บทนิยาม 6.3.3 ให้ A เป็นเมทริกซ์จตุรัส ถ้ามีเมทริกซ์ B ซึ่ง

$$AB = I = BA$$

เรียก A ว่าเป็น **เมทริกซ์ผกผันได้** (invertible matrix) และ B เรียกว่า **ตัวผกผัน** (inverse) หรือเมทริกซ์ผกผันของ A เขียน B แทนด้วย A^{-1}
ถ้าไม่มีเมทริกซ์ B ที่สอดคล้องเงื่อนไขดังกล่าว เรียก A ว่า **เมทริกซ์เอกฐาน** (singular matrix)

ตัวอย่าง 6.3.4 จงแสดงว่า B เป็นเมทริกซ์ผกผันของ A

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 6.3.5 สำหรับเมทริกซ์จตุรัส A ซึ่งผกผันได้ จะได้ว่ามีเมทริกซ์ B ซึ่ง

$$[A \mid I] \sim [I \mid B]$$

นั่นคือ $B = A^{-1}$

ตัวอย่าง 6.3.6 จงหาเมทริกซ์ผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 6.3.7 จงหาเมทริกซ์ผกผัน (ถ้ามี) ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 6.3.8 จงหาเมทริกซ์ผกผัน (ถ้ามี) ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

ตัวอย่าง 6.3.9 จงหาเมทริกซ์ผกผัน (ถ้ามี) ของ $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 6.3.10 ให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ซึ่งผกผันได้ แล้ว

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

ทฤษฎีบท 6.3.11 ให้ A เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ซึ่งผกผันได้ และ n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$
3. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
4. $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ เมื่อ $k \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $k \neq 0$

ตัวอย่าง 6.3.12 กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

1. A^2

2. $(A^T)^{-1}$

3. A^{-3}

4. $(2A)^{-4}$

ระบบสมการเชิงเส้น m สมการ ใน n ตัวแปรไม่ทราบค่า

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{12}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

เขียนเป็นสมการในรูปเมทริกซ์ได้ดังนี้

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

แทนที่เมทริกซ์ในสมการดังกล่าวด้วย A, $\boldsymbol{x}$ และ $\boldsymbol{b}$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

เรียก A ว่า เมทริกซ์สัมประสิทธิ์ (cofficient matrix) ของระบบสมการ โดยมีเมทริกซ์แต่งเติมคือ

$$[\,A \mid \boldsymbol{b}\,] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

ทฤษฎีบท 6.3.13 ถ้าระบบสมการเชิงเส้น $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ มีคำตอบเดียวแล้ว

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$$

ตัวอย่าง 6.3.14 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} 3x_1 & + & 2x_2 & = & 5 \\ 7x_1 & + & 5x_2 & = & 3 \end{array} \right.$$

ตัวอย่าง 6.3.15 จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \\ x_1 & & & + & 8x_3 & = & 11 \end{array}\right.$$

แบบฝึกหัด 6.3

1. ให้ $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ เป็นเมทริกซ์ผกผันได้ จงแสดงว่า

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

2. ใช้ผลของข้อ 1 หาตัวผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

2.1 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ 2.2 $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ 2.3 $C = \begin{bmatrix} -2 & 9 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ 2.4 $D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

3. ใช้เมริกซ์ในจ้อ 2 คำนวนหาเมทริกซ์ต่อไปนี้

3.1 $(2A)^{-1}$ 3.3 $A^{-1} + B^{-1}$ 3.5 $A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ 3.7 $D^{-1}D^T$

3.2 $(A+B)^{-1}$ 3.4 $(ABC)^{-1}$ 3.6 $C^{-1}B^{-1}A^{-1}$ 3.8 $D^{-1}BD$

4. จงเงื่อนไขที่กำหนดให้ จงหาเมทริกซ์ A

4.1 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ 4.3 $(5A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

4.2 $(2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 4.4 $(I+2A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

5. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$. จงหา A^2, A^{-3} และ $A^2 - 2A + I$.

6. จงหาตัวผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

6.1 $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 6.2 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \\ \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) & \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \end{bmatrix}$

7. จงแสดงว่า ถ้าเมทริกซ์จตุรัส A ที่สอดคล้อง $A^2 - 2A + I = 0$ แล้ว $A^{-1} = 2I - A$

8. จงหาตัวผกผัน (ถ้ามี) ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

8.1 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & -3 \\ 1 & -4 & 7 \end{bmatrix}$ 8.3 $\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ 8.5 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 7 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

8.2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$ 8.4 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ 8.6 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. ถ้า $k \neq 0$ จงหาตัวผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \begin{bmatrix} k & 0 & 0 & 0 \\ 1 & k & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k \end{bmatrix}$$

10. จงแสดงว่า

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & d & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & f & 0 & g \\ 0 & 0 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}$$

เป็นเมทริกซ์ผกผันไม่ได้ ไม่ว่าตัวแปรต่าง ๆ จะมีค่าเป็นจำนวนใดก็ตาม

11. จงหาคำตอบของระบบสมการเชิงเส้น

11.1 $\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 & = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 & = 7 \end{cases}$

11.2 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 & = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 & = -3 \end{cases}$

11.3 $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 & = 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & = -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 & = 3 \end{cases}$

11.4 $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 2 \\ x_2 + x_3 & = 5 \end{cases}$

11.5 $\begin{cases} x + y + z & = 4 \\ x + y - 4z & = 10 \\ -4x + y + z & = 0 \end{cases}$

11.6 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = a \\ 2x_1 + 5x_2 + 5x_3 & = b \\ 3x_1 + 5x_2 + 8x_3 & = c \end{cases}$

11.7 $\begin{cases} -x_2 - 2x_3 - 3x_4 & = 0 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 + 4x_4 & = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 9x_4 & = 4 \\ -x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 6x_4 & = 6 \end{cases}$

12. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{และ} \quad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

12.1 จงแสดงว่าสมการ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ เขียนในรูป $(A-I)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ ใช้ผลลัพธ์นี้หาคำตอบของสมการ $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$

12.2 หาคำตอบของสมการ $A\boldsymbol{x} = 4\boldsymbol{x}$

6.4 ดีเทอร์มิแนนท์

ดีเทอร์มิแนนท์ (determinance) ของ 2×2 เมทริกซ์

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

เขียนแทนด้วย $\text{det}(A)$ หรือ $|A|$ นิยามค่าเป็นจำนวนจริงโดย

$$\text{det}(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

ดีเทอร์มิแนนท์ของ 3×3 เมทริกซ์

$$B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\text{det}(B) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}$$

หมายเหตุ กรณีเมทริกซ์จตุรัส $n \times n$ เมื่อ $n > 3$ ต้องใช้การดำเนินการแถวหรือโคแฟคเตอร์

ตัวอย่าง 6.4.1 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$

ทฤษฎีบท 6.4.2 สำหรับเมทริกซ์จตุรัส A ใด ๆ

1. ถ้าแถวใดแถวหนึ่ง หรือหลักใดหลักหนึ่งมีสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด จะได้ว่า $\det(A) = 0$
2. ถ้าแถวสอง หรือสองหลัก เป็นอัตราส่วนกันและกัน จะได้ว่า $\det(A) = 0$
3. ถ้าสมาชิกใต้แนวทแยงหลัก (diagonal) หรือเหนือแนวทแยงหลัก มีสมาชิกเป็น 0 ทั้งหมด $\det(A)$ เท่ากับผลคูณของสมาชิกในแนวทแยงหลัก
4. $\det(A^T) = \det(A)$

ตัวอย่าง 6.4.3 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

1. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix}$
5. $\begin{vmatrix} 6 & x & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & 6 & -5 \\ 0 & -3 & 9 & -3 \end{vmatrix}$
6. $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 1 & -8 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

ตัวอย่าง 6.4.4 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

1. $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$
2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 0 & -2 \end{vmatrix}$
3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}$
4. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

สำหรับเมทริกซ์จตุรัส A โดยมี $B \sim A$ ซึ่ง

1. ถ้า B เป็นเมทรกซ์ที่เกิดจาก การสับเปลี่ยนแถวที่ p และแถวที่ q ของ A แล้ว
$$\det(B) = -\det(A)$$

2. ถ้า B เป็นเมทรกซ์ที่เกิดจาก การคูณแถวที่ q ด้วยค่าคงที่ k ของ A แล้ว
$$\det(B) = k\det(A)$$

3. ถ้า B เป็นเมทรกซ์ที่เกิดจาก การเปลี่ยนแถวที่ p โดยนำ c ไปคูณแถวที่ q แล้วนำไปบวกแถวที่ p ของ A แล้ว
$$\det(B) = \det(A)$$

หมายเหตุ เปลี่ยนจากกำดำเนินแถว เป็นดำเนินการหลัก ก็จะได้ผลลัพธ์เช่นเดียวกัน

ตัวอย่าง 6.4.5 กำหนดให้ $\det(A) = 5$ เมื่อ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ จงดีเทอร์มิแนนซ์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

1. $\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 2a_{31} & 2a_{32} & 2a_{33} \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} - 3a_{11} & a_{22} - 3a_{12} & a_{23} - 3a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{23} \\ a_{22} & a_{21} & a_{13} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$

5. $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 4a_{31} & 4a_{32} & 4a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -2a_{21} & -2a_{22} & -2a_{23} \\ 3a_{11} + a_{31} & 3a_{12} + a_{32} & 3a_{13} + a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$

การหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์จตุรัส A โดยใช้การดำเนินแถว (หลัก) อาจเขียนได้ดังตัวอย่าง

ความสัมพันธ์	การดำเนินการแถว
$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	คูณแถวที่ 1 ด้วย k
$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	สับเปลี่ยนแถวที่ 1 กับแถวที่ 2
$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{21} & a_{12}+ka_{22} & a_{13}+ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	คูณแถวที่ 2 ด้วย k แล้วนำไปบวกแถวที่ 1

ตัวอย่าง 6.4.6 จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้ โดยใช้การดำเนินการแถว

1. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix}$

2. $B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 7 & 0 & 6 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ 7 & 3 & 1 & -5 \end{vmatrix}$

ทฤษฎีบท 6.4.7 ให้ A และ B เป็น $n \times n$ เมทริกซ์ เมื่อ k เป็นจำนวนจริง

1. $\det(kA) = k^n \det(A)$
2. $\det(AB) = \det(A)\det(B)$
3. $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ เมื่อ $\det(A) \neq 0$
4. $\det(A^m) = [\det(A)]^m$

ตัวอย่าง 6.4.8 กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 11 & 4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$

จงหา

1. $\det(AB)$
2. $\det(3B)$
3. $\det(2A^{-1})$
4. $\det(2AB^{-1})$
5. $\det(-3AB^TC)$
6. $\det(2C(A^{-1}B^2)^T)$
7. $\det(A^2B^3C^{-2})$
8. $\det(A + A^T)$

บทนิยาม 6.4.9 ให้ A เป็นเมทริกซ์จตุรัส

1. **ไมเนอร์** (minor) ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย M_{ij} คือดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ที่เกิดจากการตัดแถวที่ i และหลักที่ j ของ A
2. **โคแฟคเตอร์** (cofactor) ของ a_{ij} เขียนแทนด้วย C_{ij} นิยามโดย

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

ตัวอย่าง 6.4.10 จงหาไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ทั้งหมดของ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 6.4.11 การกระจายโคแฟคเตอร์ (Cofactor expansion)
ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์

1. การกระจายโคแฟคเตอร์หลักที่ j : $\det(A) = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj}$
2. การกระจายโคแฟคเตอร์แถวที่ i: $\det(A) = a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in}$

สำหรับ $1 \le i \le n$ และ $1 \le j \le n$

ตัวอย่าง 6.4.12 จงหา $\det(A)$ ของตัวอย่าง 6.4.10 โดยวิธีการกระจายโคแฟคเตอร์

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 6.4.13 จงหาดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีการกระจายโคแฟคเตอร์

1. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$

3. $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 3 & 5 & -2 & 6 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 5 \\ 3 & 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

บทนิยาม 6.4.14 ให้ $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ เป็นเมทริกซ์ โดยที่ C_{ij} เป็นโคแฟคเตอร์ของ a_{ij} แล้ว

$$\text{cof}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}$$

เรียกว่า **เมทริกซ์โคแฟคเตอร์** (matrix of cofactor) ของ A และ **เมทริกซ์ผูกผัน** (adjoint) ของ A เขียนแทนด้วย adj(A) นิยามโดย

$$\text{adj}(A) = [\text{cof}(A)]^T$$

ทฤษฎีบท 6.4.15 สำหรับเมทริกซ์จตุรัส A ซึ่งผกผันได้ แล้ว

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\text{adj}(A)$$

ตัวอย่าง 6.4.16 จงใช้เมทริกซ์ผูกผันหาตัวผกผันของ A ในตัวอย่าง 6.4.10

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

ตัวอย่าง 6.4.17 จงใช้เมทริกซ์ผูกผันหาตัวผกผันของ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 6 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

ทฤษฎีบท 6.4.18 กฎของคาร์เมอร์ (Cramer's Rule)
ระบบสมการเชิงเส้น n สมการใน n ตัวแปรไม่ทราบค่า

$$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

ซึ่ง $\det(A) \neq 0$ แล้วจะมีคำตอบเดียวคือ

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)}, \qquad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)}, ..., \qquad x_n = \frac{\det(A_n)}{\det(A)}$$

เมื่อ A_j คือเมทริกซ์ที่แทนที่ด้วยหลักที่ j ของ A ด้วยหลักในเมทริกซ์ $\boldsymbol{b}$

ตัวอย่าง 6.4.19 จงใช้กฎของคาร์เมอร์หาคำตอบของระบบสมการ

$$\begin{cases} x_1 & & + & x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & -2 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 5 \end{cases}$$

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ต่อไปนี้

1.1 $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}$

1.2 $\begin{vmatrix} 10 & 8 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}$

1.3 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

1.4 $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

1.5 $\begin{vmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$

1.6 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 0 & 9 \end{vmatrix}$

1.7 $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ a & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

1.8 $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2a & 10 \end{vmatrix}$

1.9 $\begin{vmatrix} 2550 & 2551 & 2552 \\ 2553 & 2554 & 2555 \\ 2556 & 2557 & 2558 \end{vmatrix}$

2. จงหา λ ที่ทำให้ $\det(A) = 0$

2.1 $\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{vmatrix}$

2.2 $\begin{vmatrix} \lambda - 4 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 2 \\ 0 & 3 & \lambda - 1 \end{vmatrix}$

3. จงหา x ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$

4. จงแสดงว่าดีเทอร์มิแนนท์ $\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta - \cos\theta & \sin\theta + \cos\theta & 1 \end{vmatrix}$ ไม่ขึ้นกับ θ

5. กำหนดให้

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & f \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & f \\ x_2 & y_2 & z_z \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & d & f \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{bmatrix}.$$

จงแสดงว่า $\det(C) = \det(A) + \det(B)$

6. จงหาดีเทอร์มิแนนท์ของเมทริกซ์ต่อไปนี้

6.1 $\begin{bmatrix} 2 & -12 & 1 \\ 0 & 5 & -9 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6.2 $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 \\ 6 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

6.3 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 7 & 5 & -9 \\ 4 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

6.4 $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

6.5 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.6 $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6.7 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$

6.8 $\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-7&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$

6.9 $\begin{bmatrix}3&6&-9\\0&0&2\\-5&2&1\end{bmatrix}$

6.10 $\begin{bmatrix}0&3&1\\1&1&2\\3&2&4\end{bmatrix}$

6.11 $\begin{bmatrix}1&-3&0\\-2&4&1\\5&-2&-2\end{bmatrix}$

6.12 $\begin{bmatrix}3&-6&9\\-2&7&-2\\0&1&5\end{bmatrix}$

6.13 $\begin{bmatrix}1&-2&3&1\\5&-9&6&3\\-1&2&-6&2\\2&8&6&1\end{bmatrix}$

6.14 $\begin{bmatrix}2&1&3&1\\1&0&1&1\\0&2&1&0\\0&1&2&3\end{bmatrix}$

6.15 $\begin{bmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}$

6.16 $\begin{bmatrix}1&0&3&0&2\\0&1&0&3&0\\2&0&1&0&1\\1&-2&0&1&-1\\1&0&0&1&-1\end{bmatrix}$

7. กำหนดให้ $\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix} = -3$ จงหา

7.1 $\begin{vmatrix}2a&2b&2c\\d&e&f\\-g&-h&-i\end{vmatrix}$

7.2 $\begin{vmatrix}d&e&f\\g&h&i\\a&b&c\end{vmatrix}$

7.3 $\begin{vmatrix}a+g&b+h&c+i\\g&h&i\\3d&3e&3f\end{vmatrix}$

7.4 $\begin{vmatrix}4a&4b&4c\\d&e&f\\5g-d&5h-e&5i-f\end{vmatrix}$

8. จงหาไมเนอร์และโคแฟคเตอร์ทั้งหมดของ $A = \begin{bmatrix}1&-2&3\\6&7&1\\5&3&4\end{bmatrix}$

9. กำหนดให้ $A = \begin{bmatrix}4&-1&1&6\\0&0&-3&3\\4&1&0&9\\4&1&2&3\end{bmatrix}$ จงหา

9.1 M_{13} และ C_{13} 9.2 M_{24} และ C_{24} 9.3 M_{32} และ C_{32} 9.4 M_{41} และ C_{41}

10. จงหาดีเทอร์มิแนนท์โดยวิธีการกระจายโคแฟคเตอร์

10.1 $A = \begin{bmatrix}-3&0&7\\2&5&1\\-1&0&5\end{bmatrix}$

10.2 $A = \begin{bmatrix}3&3&1\\1&0&-4\\1&-3&5\end{bmatrix}$

10.3 $A = \begin{bmatrix}1&k&k^2\\1&k&k^2\\1&k&k^2\end{bmatrix}$

10.4 $A = \begin{bmatrix}k+1&k-1&7\\2&k-3&4\\5&k+1&k\end{bmatrix}$

10.5 $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 5 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & 10 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

10.6 $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 9 & 4 & 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

11. จงใช้เมทริกซ์ผูกผันหาตัวผกผันของเมทริกซ์ต่อไปนี้

11.1 $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$

11.3 $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

11.2 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

11.4 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

12. จงใช้กฎของคาร์เมอร์หาคำตอบของระบบสมการ

12.1 $\begin{cases} x_1 + x_3 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 & = 2 \end{cases}$

12.4 $\begin{cases} x - 3y + z & = 4 \\ 2x - y & = -2 \\ 4x - 3z & = 0 \end{cases}$

12.2 $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 & = 2 \\ 11x_1 + x_2 + 2x_3 & = 3 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = 1 \end{cases}$

12.5 $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 & = 4 \\ -x_1 + 7x_2 - 2x_3 & = 1 \\ 2x_1 + 6x_2 - x_3 & = 5 \end{cases}$

12.3 $\begin{cases} x - 4y + z & = 6 \\ 4x - y + 2z & = -1 \\ 2x + 2y - 3z & = -20 \end{cases}$

12.6 $\begin{cases} -x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 & = -32 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 9x_4 & = 14 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 & = 11 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 & = -4 \end{cases}$

13. จงใช้กฎของคาร์เมอร์ในการหา z

$$\begin{cases} 4x + y + z + w & = 6 \\ 3x + 7y - z + w & = 1 \\ 7x + 3y - 5z + 8w & = -3 \\ x + y + z + 2w & = 3 \end{cases}$$

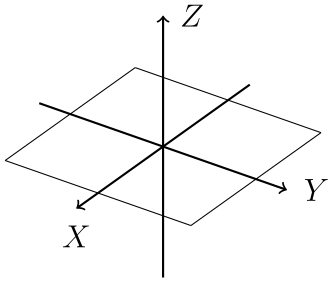
บทที่ 7

เวกเตอร์

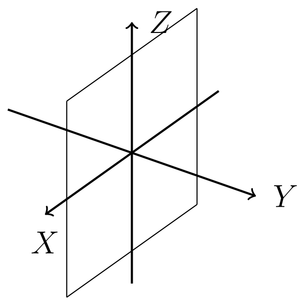
7.1 เวกเตอร์บนระนาบ

การบอกตำแหน่งของจุดใน **ปริภูมิสามมิติ** (three-dimensional space) ทำได้จากการอ้างอิงเส้นตรงสามเส้นคือ แกน X แกน Y และแกน Z ซึ่งตัดการที่จุด O เรียกว่า **จุดกำเนิด** (origin) และเรียก

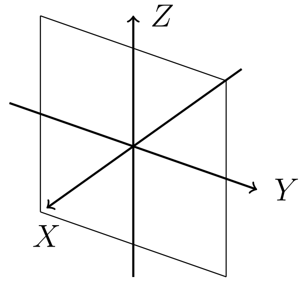
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Y ว่า ระนาบ XY (XY-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน X และแกน Z ว่า ระนาบ XZ (XZ-plane)
ระนาบที่ผ่าน แกน Y และแกน Z ว่า ระนาบ YZ (YZ-plane)



ระนาบ XY

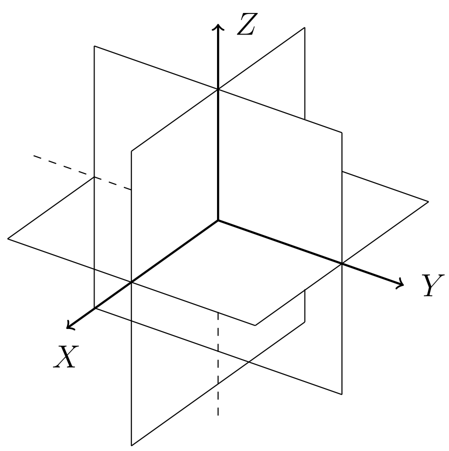


ระนาบ XZ

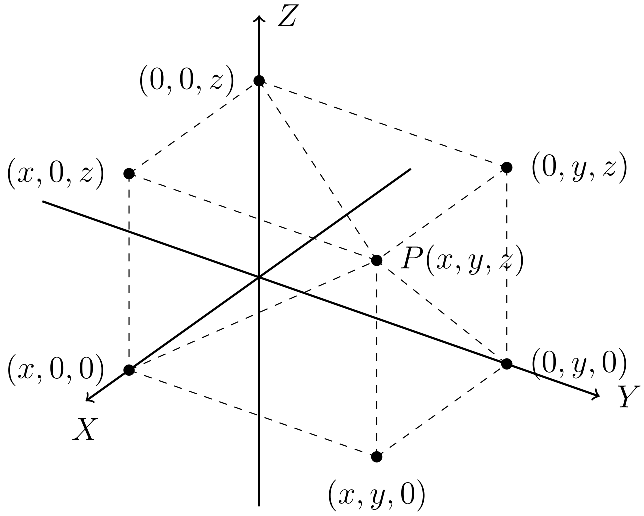


ระนาบ YZ

ระนาบพิกัดฉากทั้งสามจะแบ่งปริภูมิสามมิติออกเป็น 8 ส่วนเรียกว่า **อัฐภาค** (Octance)

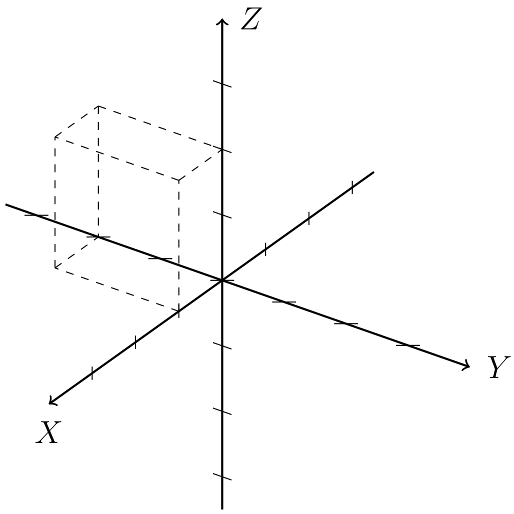


การบอกตำแหน่งของจุด P ในปริภูมิสามมิติ มีแกนพิกัดเป็นที่อ้างอิงบอกได้โดยใช้จำนวนจริง (x, y, z) เรียกว่าพิกัดฉากของจุด P และใช้ $\mathbb{R}^3$ แทนเซตของจุด (x, y, z) ในปริภูมิสามมิติ

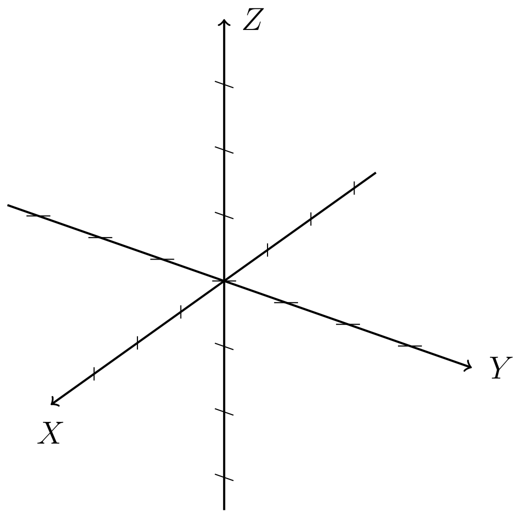


ตัวอย่าง 7.1.1 จงเขียนกราฟในปริภูมิสามมิติแสดงจุดดังต่อไปนี้

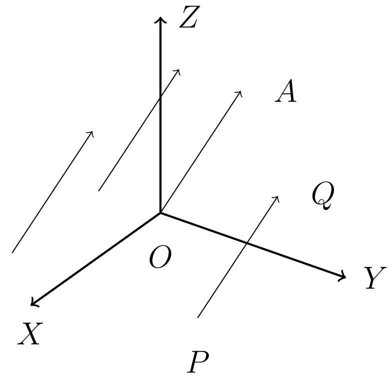
1. $P(1, -2, 2)$



2. $Q(1, 2, 2)$



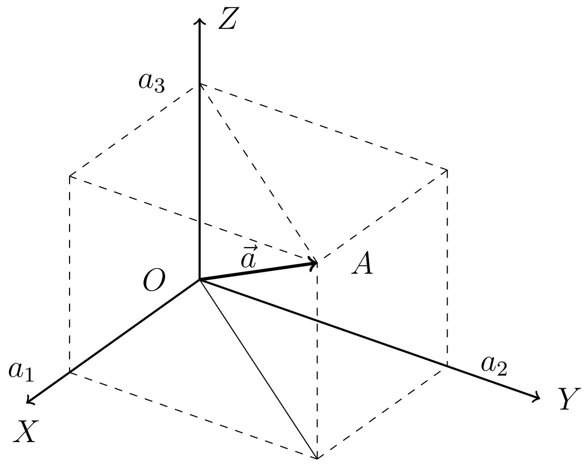
เวกเตอร์ (vector) คือปริมาณที่มีทั้งขนาดและทิศทาง โดยทั่วไปใช้ส่วนของเส้นตรงเชื่อมโยงกันระหว่างจุดสองจุดและมีลูกศรกำกับแทนเวกเตอร์ และความยาวของเส้นตรงแทนขนาดของเวกเตอร์ ใช้สัญญาลักษณ์ $\overrightarrow{PQ}$ แทนเวกเตอร์ที่มีจุดเริ่มต้นที่จุด P สิ้นสุดที่จุด Q มีทิศทางจาก P ไป Q และใช้ $\|\overrightarrow{PQ}\|$ แทนความยาวหรือขนาด (length/magnitude/norm) ของ $\overrightarrow{PQ}$ และเวกเตอร์ทั้งสองจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีขนาดเท่ากันและทิศทางเดียวกัน



บทนิยาม 7.1.2 กำหนดให้ $P(x_1, y_1, z_1)$ และ $Q(x_2, y_2, z_2)$
แล้ว $\vec{a}$ เป็น**เวกเตอร์ตำแหน่ง** (position vector) ของ $\overrightarrow{PQ}$ คือ

$$\vec{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle$$

ถ้า $a_1 = x_2 - x_1, a_2 = y_2 - y_1$ และ $a_3 = z_2 - z_1$ ดังนั้น $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ เรียก a_1, a_2 และ a_3 ว่า**ส่วนประกอบ** (component) ของ $\vec{a}$ ตามแกน X แกน Y และ แกน Z ตามลำดับ



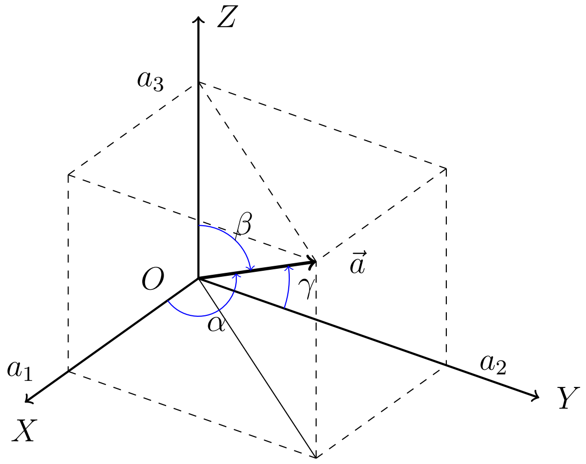
จากรูปโดยใช้ความสัมพันธ์ของสามเหลี่ยมมุมฉากจะได้ว่า

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

บทนิยาม 7.1.3 เวกเตอร์ที่มีตัวประกอบทุกตัวเป็นศูนย์เรียกว่า **เวกเตอร์ศูนย์** (zero vector) เขียนแทนด้วย $\vec{0} = \langle 0, 0, 0 \rangle$

ข้อตกลง เมื่อ P เป็นจุดใน $\mathbb{R}^3$ และ O เป็นจุดกำเนิด เราจะเขียนเวกเตอร์ $\overrightarrow{OP}$ แทนด้วย $\vec{P}$

บทนิยาม 7.1.4 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ที่ทำมุม $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ กับแกน X แกน Y และแกน Z ด้านบวกตามลำดับโดยที่ $\alpha, \beta, \gamma \in [0, \pi]$ เรียก $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ ว่า**มุมแสดงทิศทาง** (direction angles) ของ $\vec{a}$ และ cosα, cosβ, cosγ ว่า**โคไซน์แสดงทิศทาง** (direction cosines) ของ $\vec{a}$



จากรูปจะได้ว่า $\quad \cos\alpha = \dfrac{a_1}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\beta = \dfrac{a_2}{\|\vec{a}\|} \qquad \cos\gamma = \dfrac{a_3}{\|\vec{a}\|}$

ตัวอย่าง 7.1.5 จงหาเวกเตอร์ตำแหน่งของ $\overrightarrow{PQ}$ ขนาดและโคไซน์แสดงทิศทางของเวกเตอร์นั้น

1. $P(1, 2, -3)$ และ $Q(-1, 0 - 4)$
2. $P(4, -1, 2)$ และ $Q(5, -2, 3)$

ตัวอย่าง 7.1.6 จงหามุมแสดงทิศทางของแรง $\vec{F} = \langle -1, 1, \sqrt{2} \rangle$

บทนิยาม 7.1.7 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3\rangle$ และ $k \in \mathbb{R}$

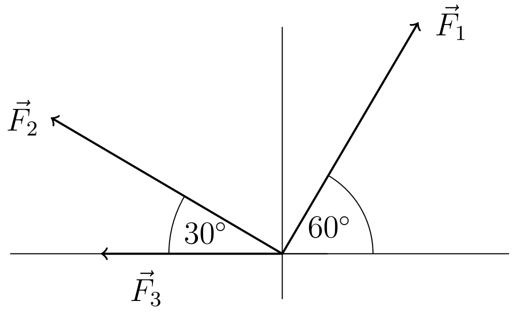
1. $\vec{a} = \vec{b}$ ก็ต่อเมื่อ $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$ และ $a_3 = b_3$
2. $\vec{a} + \vec{b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\rangle$
3. $k\vec{a} = \langle ka_1, ka_2, ka_3\rangle$
4. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

ตัวอย่าง 7.1.8 ให้ $\vec{F_1} = \langle 1, -2, 5\rangle$ และ $\vec{F_2} = \langle -1, -4, 7\rangle$ จงหาเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\vec{F_1} + \vec{F_2}$
2. $2\vec{F_1} + 3\vec{F_2}$
3. $3\vec{F_2} - 2\vec{F_1}$

ตัวอย่าง 7.1.9 ถ้าแรง $\vec{F} = \langle 2, -4, 4\rangle$ กระทำกับวัตถุมวล 2 กิโลกรัม เกิดเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ จงหาเวกเตอร์ความเร่งพร้อมทั้งขนาดความเร่ง

ตัวอย่าง 7.1.10 กำหนดให้แรง $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ และ $\vec{F_3}$ ที่มีขนาด 10, 6 และ 5 นิวตันตามลำดับ กระทำกับวัตถุชิ้นหนึ่งมีทิศทางดังภาพ



1. จงเขียนแต่ละแรงในรูปเวกเตอร์ตำแหน่ง
2. จงหาแรงลัพธ์

ทฤษฎีบท 7.1.11 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ และ $c, k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $(ck)\vec{a}=c(k\vec{a})=k(c\vec{a})$
6. $c(\vec{a}+\vec{b})=c\vec{a}+c\vec{b}$
7. $(c+k)\vec{a}=c\vec{a}+k\vec{a}$
8. $1\vec{a}=\vec{a}$
9. $0\vec{a}=\vec{0}$

บทนิยาม 7.1.12 เราเรียกเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วยว่า **เวกเตอร์หนึ่งหน่วย** (unit vector)

ให้ $\vec{a}$ เป็นเวกเตอร์ที่ไม่ใช่เวกเตอร์ศูนย์ใน $\mathbb{R}^3$ และจะได้ว่า

$\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศเดียว**กับ $\vec{a}$

$-\dfrac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วยที่มี**ทิศตรงข้าม**กับ $\vec{a}$

ตัวอย่าง 7.1.13 จงหาเวกเตอร์หนึ่งหน่วยของเวกเตอร์ต่อไปนี้

1. $\langle 1, -2, 2\rangle$
2. $\langle 1, 1, \sqrt{2}\rangle$

ตัวอย่าง 7.1.14 จงหาเวกเตอร์ 3 หน่วยที่มีทิศตรงกันข้ามกับแรง $\vec{F}=\langle 6, -3, 2\rangle$

เวกเตอร์หนึ่งหน่วยตามแนวแกน X แกน Y และ แกน Z คือ $\vec{i}, \vec{j}$ และ $\vec{k}$ ตามลำดับ

$$\vec{i}=\langle 1,0,0\rangle \qquad \vec{j}=\langle 0,1,0\rangle \qquad \vec{k}=\langle 0,0,1\rangle$$

ให้ $\vec{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ แล้วจะได้ว่า

$$\vec{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle = a_1\langle 1,0,0\rangle + a_2\langle 0,1,0\rangle + a_3\langle 0,0,1\rangle = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$$

แบบฝึกหัด 7.1

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1,2,0\rangle$, $\vec{b} = \langle 1,-1,2\rangle$, $\vec{c} = \langle 1,0,3\rangle$ และ $\vec{d} = \langle -2,1,5\rangle$ จงหา

   1.1 $\vec{a} - 3\vec{b}$

   1.2 $2\vec{a} - \vec{c}$

   1.3 $\vec{d} - \vec{b} + \vec{a}$

   1.4 $(\vec{a} - 2\vec{b}) + 3\vec{c}$

   1.5 $\|\vec{c} + 2\vec{d}\|$

   1.6 $\|2\vec{a} + \vec{b}\|$

   1.7 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{a}$

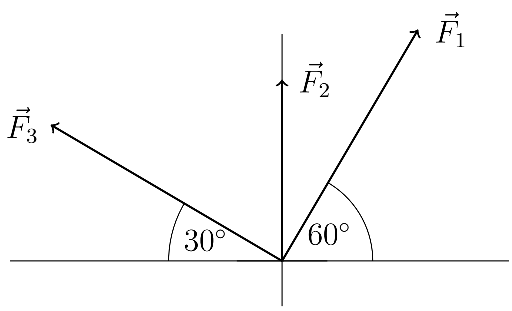
   1.8 โคไซน์แสดงทิศทางของ $\vec{b} + \vec{c}$

   1.9 เวกเตอร์หนึ่งหน่วยของ $2\vec{c} - \vec{d}$

   1.10 เวกเตอร์ 3 หน่วยที่มีทิศเดียวกับ $2\vec{a} + \vec{d}$

2. ถ้าแรง $\vec{F} = \langle 2,-6,3\rangle$ กระทำกับวัตถุมวล 0.5 กิโลกรัม เกิดเวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}$ จงหาเวกเตอร์ความเร่งพร้อมทั้งขนาดความเร่ง

3. กำหนดให้แรง $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ และ $\vec{F}_3$ ที่มีขนาด 8, 4 และ 6 นิวตันตามลำดับ กระทำกับวัตถุชิ้นหนึ่งมีทิศทางดังภาพ



   3.1 จงเขียนแต่ละแรงในรูปเวกเตอร์ตำแหน่ง

   3.2 จงหาแรงลัพธ์

7.2 ผลคูณเชิงสเกลาร์

บทนิยาม 7.2.1 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$
ผลคูณเชิงสเกลาร์ (scalar product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \cdot \vec{b}$ นิยามโดย

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงหาผลคูณเชิงสเกลาร์ของเวกเตอร์ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 3, -1, 5 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, 6, -3 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 2, 1 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 4, 6 \rangle$

3. $\vec{a} = \langle a, 1, -a \rangle$ และ $\vec{b} = \langle a, a, a+1 \rangle$

4. $\vec{a} = \langle 2\text{sin}x, \text{cos}x \rangle$ และ $\vec{b} = \langle \text{sin}x, 2\text{cos}x \rangle$

ทฤษฎีบท 7.2.3 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$
3. $k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$

ตัวอย่าง 7.2.4 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์บนระนาบ จงแสดงว่า

1. $\vec{a} \cdot \vec{a} = 0$ ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} = \vec{0}$

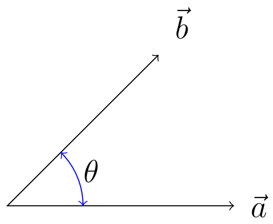
2. $\|\vec{a} + \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

3. $\|\vec{a} - \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \|\vec{b}\|^2$

ทฤษฎีบท 7.2.5 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ในระนาบ แล้ว

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{cos}\theta$$

เมื่อ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เมื่อ $0 \leq \theta \leq \pi$ ดังรูป



ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ตั้งฉากกัน** (orthogonal) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ หรือ $\theta = \dfrac{\pi}{2}$

ตัวอย่าง 7.2.6 งาน W ที่เกิดขึ้นเมื่อมีแรง $\vec{F}$ กระทำกับวัตถุทำให้เกิดการกระจัด $\vec{s}$ จะได้ว่า

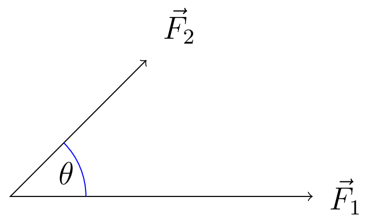
$$W = \vec{F} \cdot \vec{s}$$

จงหางานที่เกิดขึ้นเมื่อออกแรงขนาด 10 นิวตัวทำมุมกับแกน X 60 องศา ทำให้เกิดการกระจัดในแนวแกน X 5 เมตร

ตัวอย่าง 7.2.7 ให้ $A(1,2,0)$, $B(0,4,2)$ และ $C(3,2,-2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหามุม $B\hat{A}C$

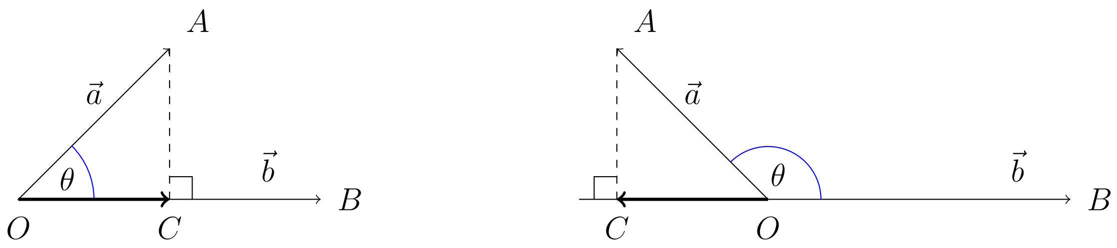
ตัวอย่าง 7.2.8 ให้ $\vec{a} = \langle 3,2,-1\rangle,\ \vec{b} = \langle 1,-1,1\rangle$ และ $\vec{c} = \langle 3,4,-2\rangle$ จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดตั้งฉากกัน

ตัวอย่าง 7.2.9 กำหนดแรง $\vec{F_1}$ และ $\vec{F_2}$ ดังแผน



จงหาขนาดขแรงแรงลัพธ์ หรือ $\|\vec{F_1} + \vec{F_2}\|$ และทิศทาง (ตอบในรูปมุม)

บทนิยาม 7.2.10 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ ลากเส้นตรงจาก A ไปตั้งฉากกับ $\overrightarrow{OB}$ ที่จุด C ดังรูป



เรียก $\overrightarrow{OC}$ ว่า **ภาพฉายเวกเตอร์ (vector projection)** ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a}$

ทฤษฎีบท 7.2.11 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ แล้วจะได้ว่า $\text{Proj}_{\vec{b}}\vec{a} = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2}\vec{b}$

ตัวอย่าง 7.2.12 จงหาภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

1. $\vec{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2, -2 \rangle$

2. $\vec{a} = \langle 3, 1 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 1, -2 \rangle$

แบบฝึกหัด 7.2

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 1, -1\rangle$, $\vec{b} = \langle 1, 0, 3\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -3, 2, 5\rangle$ จงหา

    1.1 $\vec{b} \cdot \vec{c}$

    1.2 $\vec{c} \cdot 2\vec{b} + 2\vec{a} \cdot \vec{b}$

    1.3 $(\vec{c} + \vec{b}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$

    1.4 มุมระหว่าง $\vec{a}$ กับ $\vec{c}$

    1.5 มุมระหว่าง $\vec{a} + \vec{b}$ กับ $\vec{a} - \vec{b}$

    1.6 ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{b}$ บน $\vec{c}$

    1.7 ภาพฉายเวกเตอร์ของ $\vec{a}$ บน $\vec{b}$

2. จงตรวจสอบว่าเวกเตอร์คู่ใดต่อไปนี้ตั้งฉากกันบ้าง

$$\vec{a} = \langle 1, 2, 1\rangle,\ \vec{b} = \langle 1, -2, 3\rangle,\ \vec{c} = \langle -3, 3, 1\rangle \text{ และ } \vec{d} = \langle -1, 1, 7\rangle$$

3. ให้ $A(1, 2)$, $B(3, 1)$ และ $C(2, -2)$ เป็นจุดยอดของสามเหลี่ยม ABC จงหามุม $A\hat{B}C$

4. เมื่อออกแรง $\vec{F}_1$ และ $\vec{F}_2$ ทำมุมกัน 60 องศา และมีขนาด 10 และ 20 นิวตันตามลำดับ จงหาขนาดและทิศทางของแรงลัพธ์ที่เกิดกับวัตถุชิ้นนี้

5. จงอธิบายงานที่เกิดขึ้นเมื่อแบกสิ่งของเดินไปตามแนวราบ

7.3 ผลคูณเชิงเวกเตอร์

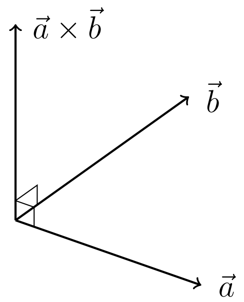
บทนิยาม 7.3.1 ให้ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$
ผลคูณเชิงเวกเตอร์ (vector product/cross product) ของ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เขียนแทนด้วย $\vec{a} \times \vec{b}$ คือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1 \rangle$$

หรือ

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

เมื่อ $|M|$ แทนดีเทอร์มิแนนท์ของเมตริกซ์ M



ตัวอย่าง 7.3.2 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, -1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 2, 1 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -3, 1, -1 \rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \times \vec{b}$

2. $\vec{b} \times \vec{c}$

ทฤษฎีบท 7.3.3 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ $k \in \mathbb{R}$ แล้ว

1. $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$
2. $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) + (\vec{a} \times \vec{c})$
3. $k(\vec{a} \times \vec{b}) = (k\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (k\vec{b})$
4. $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = 0 = \vec{b} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

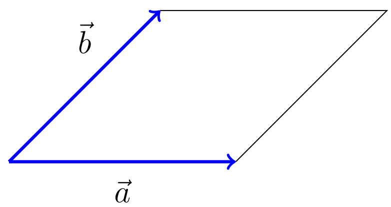
ตัวอย่าง 7.3.4 จงหาเวกเตอร์ที่ตั้งฉากกับ $\vec{a} = \langle 1, -3, 4 \rangle$ และ $\vec{b} = \langle 2, 2, 1 \rangle$

ทฤษฎีบท 7.3.5 ให้ $\vec{a} \neq \vec{0}$ และ $\vec{b} \neq \vec{0}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ และ θ เป็นมุมระหว่าง $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ แล้ว

$$\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\text{sin}\theta$$

ข้อสังเกต $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ **ขนานกัน** (paralell) ก็ต่อเมื่อ $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ หรือ $\theta = 0$ หรือ π

ทฤษฎีบท 7.3.6 ให้ $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้วพื้นที่**สี่เหลี่ยมด้านขนาน** (parallelogram) ที่มีด้านประชิดเป็น $\vec{a}$ และ $\vec{b}$ มีค่าเท่ากับ $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$



ตัวอย่าง 7.3.7 จงหาพื้นที่ของสามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $A(2, 1, 1)$, $B(-1, 3, 1)$ และ $C(0, 2, -3)$

ตัวอย่าง 7.3.8 แรง F ที่เกิดกับประจุ q ในสนามแม่เหล็ก B จนทำให้เกิดความเร็ว v สัมพันธ์กันดังนี้

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

จงหาแรงที่เกิดขึ้นกับกระจุ 10 ไมโครคูลอมบ์เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว 50 เมตรต่อวินาที ในทิศตั้งฉากกับสนามแม่เหล็กที่ขนาด 0.2 เทสลา

บทนิยาม 7.3.9 ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ แล้ว**ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์** (scalar triple products) ของ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ คือ $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$ หรือ $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$ นั่นคือ

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

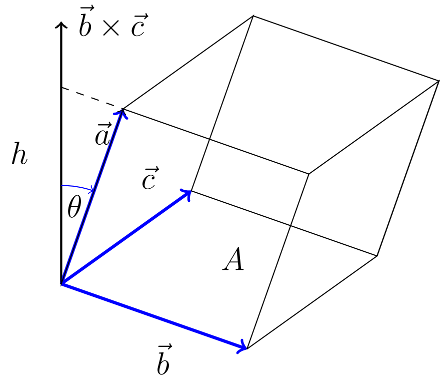
เมื่อ $\vec{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\vec{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$

โดยสมบัติของดีเทอร์มิแนนท์จะได้ว่า $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} \times \vec{a} = \vec{c} \cdot \vec{a} \times \vec{b}$

ตัวอย่าง 7.3.10 กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$, $\vec{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 0, 1 \rangle$ จงหา

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}$
2. $\vec{c} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$

ทฤษฎีบท 7.3.11 ปริมาตรของ**รูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนาน** (parallepiped) ซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เท่ากับ $|\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$



จากรูป $V = Ah = \|\vec{b} \times \vec{c}\| \|\vec{a}\| |\cos\theta| = |\vec{a} \cdot \vec{b} \times \vec{c}|$

ตัวอย่าง 7.3.12 จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\langle 1, 1, -1 \rangle$, $\langle 2, 1, 0 \rangle$ และ $\langle 0, 1, 3 \rangle$

ตัวอย่าง 7.3.13 จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 4, -7 \rangle$, $\langle 2, -1, 4 \rangle$ และ $\langle 0, -9, 18 \rangle$ อยู่บน**ระนาบเดียวกัน** (coplanar)

แบบฝึกหัด 7.3

1. กำหนดให้ $\vec{a} = \langle 1, 2, 1\rangle$, $\vec{b} = \langle 2, 3, 0\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 3, 2\rangle$ จงหา

   1.1 $\vec{a} \times \vec{b}$

   1.2 $\vec{a} \times \vec{c}$

   1.3 $(\vec{a} \times \vec{c}) \times \vec{b}$

   1.4 $(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{a})$

   1.5 $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

   1.6 $\|\vec{c} \times \vec{d}\|$

   1.7 $\|2\vec{a} \times \vec{b}\|$

   1.8 $\|\vec{a} \times 3\vec{c}\| + |\vec{a} \cdot \vec{c}|$

2. จงหาพื้นที่สามเหลี่ยมที่มีจุดยอดเป็น $(-3, 1, 2)$, $(-5, 1, 0)$ และ $(4, -2, 1)$

3. กำหนดให้ $A(1, 1, 2)$, $B(2, 0, 3)$, $C(3, 0, 0)$ และ $D(2, 1, -1)$ จงแสดงว่ารูปสี่เหลี่ยม $ABCD$ เป็นสี่เหลี่ยมด้านขนาน และหาพื้นที่ของรูปสี่เหลี่ยมนี้

4. จงหาปริมาตรของรูปทรงสี่เหลี่ยมหน้าขนานซึ่งมีด้านประชิดเป็น $\vec{a} = \langle 2, 1, -3\rangle$, $\vec{b} = \langle 4, -1, 0\rangle$ และ $\vec{c} = \langle -1, 4, -1\rangle$

5. จงยกตัวอย่างเวกเตอร์ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ ที่ทำให้ $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$

6. จงใช้ผลคูณเชิงสเกลาร์ของสามเวกเตอร์แสดงว่า $\langle 1, 5, -2\rangle$, $\langle 3, -1, 0\rangle$ และ $\langle 5, 9, -4\rangle$ อยู่บนระนาบเดียวกัน

7. ให้ $\vec{a}, \vec{b}$ และ $\vec{c}$ เป็นเวกเตอร์ใน $\mathbb{R}^3$ จงแสดงว่า

   7.1 $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})$

   7.2 ถ้า $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$ แล้ว $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$

   7.3 $(\vec{a} - \vec{b}) \times (\vec{a} + \vec{b}) = 2(\vec{a} \times \vec{b})$

   7.4 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

   7.5 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}$

8. ทอร์ก $\vec{\tau}$ คือความพยายามของแรง $\vec{F}$ ที่จะหมุนวัตถุรอบแกนหมุนด้วยระยะห่างจากจุดหมุน $\vec{r}$ สัมพันธ์กันดังนี้

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

   จงหาทอร์กที่เกิดขึ้นเมื่อออกแรง 10 นิวตันห่างจากจุดหมุน 50 เซนติเมตร โดยแรงทำมุมกับแนวเส้นแกนหมุน 60 องศา

7.4 ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

บทนิยาม 7.4.1 กำหนดให้ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงบนช่วง I แล้ว
$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ เป็น**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** (vector value function) จาก I ไป $\mathbb{R}^2$
$\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็น**ฟังก์ชันค่าเวกเตอร์** จาก I ไป $\mathbb{R}^3$

ตัวอย่าง 7.4.2 ให้ $\vec{F}(t) = \langle t, t^2 \rangle$, $0 \le t \le 2$ และ $\vec{G}(t) = \langle \text{sin}t, \text{cos}t, t \rangle$, $0 \le t \le \pi$ จงหา

1. $\vec{F}(1)$
2. $\vec{G}\left(\frac{\pi}{3}\right)$

บทนิยาม 7.4.3 ให้ $\vec{F}$ และ $\vec{G}$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์ และ u เป็นฟังก์ชันจาก I ไป $\mathbb{R}$ และ $t \in I$ แล้ว

1. $(\vec{F} + \vec{G})(t) = \vec{F}(t) + \vec{G}(t)$
2. $(u\vec{G})(t) = u(t)\vec{F}(t)$
3. $(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{G}(t)$
4. $(\vec{F} \times \vec{G})(t) = \vec{F}(t) \times \vec{G}(t)$

ทฤษฎีบท 7.4.4 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เมื่อ $t \in I$ และ x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่มีอนุพันธ์บนช่วง I จะได้ว่า $\vec{F}$ มีอนุพันธ์ที่ t และ

$$\vec{F}'(t) = \langle x'(t), y'(t), z'(t) \rangle$$

ตัวอย่าง 7.4.5 จงหาอนุพันธ์ของ $\vec{F}(t) = \left\langle t^2 + t - 3, \text{cos}2t, 2e^t \right\rangle$

ตัวอย่าง 7.4.6 กำหนดให้ $\vec{F} = \langle 1, t, \text{sin}t \rangle$ และ $\vec{G} = \langle t^2, t, 1 \rangle$ จงหา

1. $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t)$
2. $\vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)$

บทนิยาม 7.4.7 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle x(t), y(t), z(t) \rangle$ เป็นฟังก์ชันค่าเวกเตอร์บนโดเมน $D \subset \mathbb{R}$ ถ้า x, y, z เป็นฟังก์ชันค่าจริงที่อินทิเกรตได้บนช่วง $[a, b]$ แล้ว $\vec{F}$ เป็นฟังก์ชันที่ **อินทิเกรตได้** (integrable) บนช่วง $[a, b] \subset D$ และ

$$\int_a^b \vec{F}(t)dt = \left\langle \int_a^b x(t)dt, \int_a^b y(t)dt, \int_a^b z(t)dt \right\rangle$$

ตัวอย่าง 7.4.8 กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, 1 \rangle$ และ $\vec{C} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ จงหา

1. $\displaystyle\int_0^\pi \vec{F}(t)dt$
2. $\displaystyle\int_1^2 \vec{C} \cdot \vec{F}(t)dt$

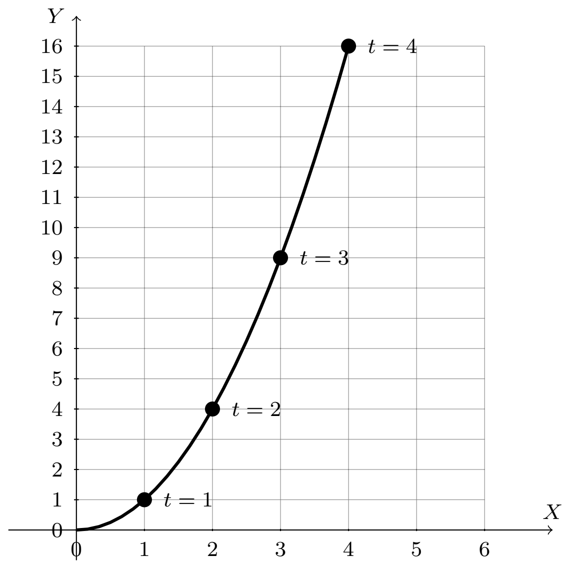
ตัวอย่าง 7.4.9 จงหา $\displaystyle\int_0^{2\pi} \|\langle \text{cos}t, \text{sin}t, 1 \rangle\| dt$

กราฟแสดงการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันค่าเวกเตอร์

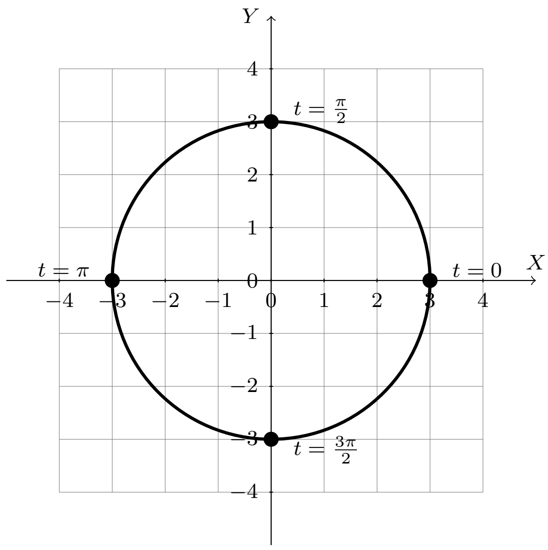
กราฟของการเคลื่อนที่ $\vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle$ เมื่อ $a \leq x \leq b$ คือ

$$\text{กราฟความสัมพันธ์ } \{(x(t), y(t)) : \vec{r}(t) = \langle x(t), y(t) \rangle \text{ เมื่อ } a \leq x \leq b\}$$

$\vec{r}(t) = \langle t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 4$

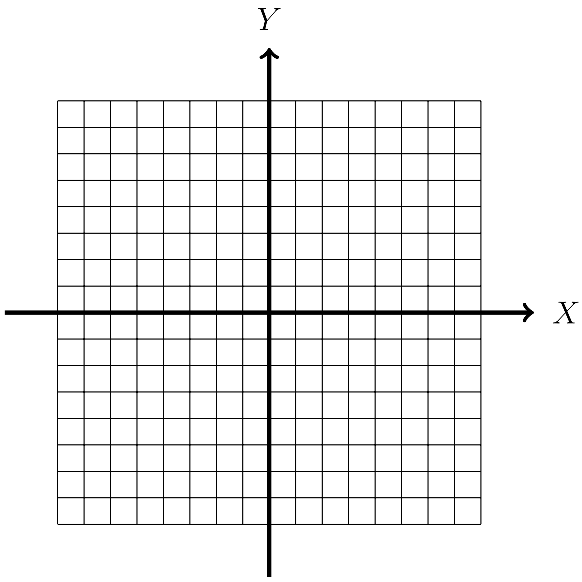


$\vec{r}(t) = \langle 3\sin t, 3\cos t \rangle$ เมื่อ $0 \leq t \leq 2\pi$

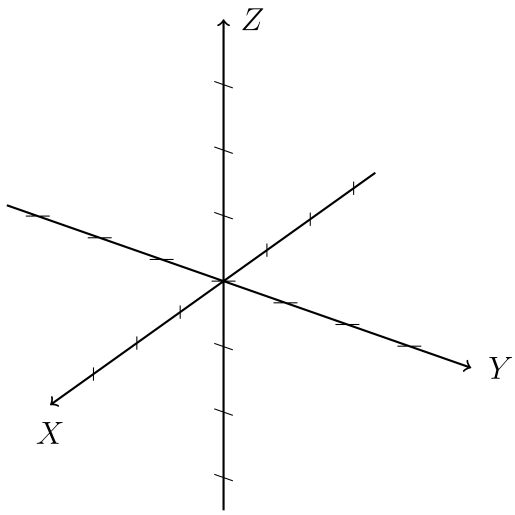


ตัวอย่าง 7.4.10 จงเขียนกราฟแสดงการเคลื่อนที่ต่อไปนี้ เมื่อ $0 \leq t \leq 4$

1. $\vec{r}(t) = \langle t, t+1 \rangle$



2. $\vec{r}(t) = \langle t, t+1, 3+2t \rangle$



ให้ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ (หรือ $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ ใน 3 มิติ) เป็นฟังก์ชันการเคลื่อนที่หรือเวกเตอร์ตำแหน่ง

เวกเตอร์ความเร็ว $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = x'(t)\vec{i} + y'(t)\vec{j} = v_x(t)\vec{i} + v_y(t)\vec{j}$

อัตราความเร็ว $v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

เวกเตอร์ความเร่ง $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = x''(t)\vec{i} + y''(t)\vec{j} = a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j}$

อัตราความเร่ง $a(t) = \|\vec{a}(t)\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$

ตัวอย่าง 7.4.11 ให้ $\vec{r}(t) = \vec{i} + 2t\vec{j} + 3t^2\vec{k}$ เมื่อ $0 \le t \le 2$ เป็นสมการการเคลื่อนที่ของวัตถุ จงหาตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่งและอัตราเร่ง เมื่อเวลา $t = 1$

ตัวอย่าง 7.4.12 เรือลำนี้เคลื่อนที่ในระนาบ XY โดยมีฟังก์ชันตำแหน่งที่เวลาใด ๆ ในระบบพิกัดฉากเป็น $x(t) = 3t^2 - 2t + 1$ และ $y(t) = -t^2 + 2t - 3$ จงหาเวกเตอร์ตำแหน่ง และความเร็วของเรือลำนี้ที่เวลา 3 วินาที

ตัวอย่าง 7.4.13 รถคันหนึ่งเคลื่อนที่ในระนาบ XY ด้วยความเร่ง $\vec{a}(t) = 2\vec{i}\ m/s^2$ ถ้ารถคันนี้เริ่มเคลื่อนเมื่อเวลา 0 วินาที มีความเร็วเริ่มต้น $\vec{v}_0 = 10\vec{i} - 5\vec{j}\ m/s$

1. ความเร็วที่เวลาใด ๆ จากสมการ $\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$
2. ความเร็วและอัตราเร็วที่เวลา 5 วินาที
3. เวกเตอร์ตำแหน่งที่เวลาใด ๆ

แบบฝึกหัด 7.4

1. กำหนดให้ $\vec{F}(t) = \langle 1+t, 1+2t, 1+3t \rangle$ และ $\vec{G}(t) = \langle \text{cos}t, \text{sin}t, t \rangle$ จงหา

    1.1 $\vec{F}'(t) + \vec{G}'(t)$

    1.2 $(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t)$

    1.3 $(\vec{F}' \times \vec{G}')(t)$

    1.4 $(\vec{F} \cdot \vec{G}')(t)$

2. จงหาค่าต่อไปนี้

    2.1 $\displaystyle\int_1^3 \left\langle t, 2t+1, t^2 \right\rangle dt$

    2.2 $\displaystyle\int_0^\pi \langle \text{sin}t, \text{cos}t, t+1 \rangle\, dt$

3. จงเขียนกราฟแสดงการการเคลื่อนที่ของฟังก์ชันเวกเตอร์ต่อไปนี้

    3.1 $\vec{r}(t) = \langle t, \sqrt{t^2-1} \rangle$ เมื่อ $1 \le t \le 3$

    3.2 $\vec{r}(t) = \left\langle t + \dfrac{1}{t}, t - \dfrac{1}{t} \right\rangle$ เมื่อ $1 \le t \le 4$

    3.3 $\vec{r}(t) = \langle 1+t, 2+t \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 5$

    3.4 $\vec{r}(t) = \langle 1, t, t^2 \rangle$ เมื่อ $0 \le t \le 2$

4. จงหา ตำแหน่งของการเคลื่อนที่ เวกเตอร์ความเร็ว อัตราเร็ว เวกเตอร์ความเร่ง อัตราเร่ง เมื่อกำหนดสมการการเคลื่อนที่ดังนี้ ขณะเวลาที่กำหนดให้

    4.1 $\vec{r}(t) = t\vec{i} + (t^2+1)\vec{j}$ เมื่อ $t = 2$

    4.2 $\vec{r}(t) = (t + \frac{1}{t})\vec{i} + (t - \frac{1}{t})\vec{j}$ เมื่อ $t = 1$

    4.3 $\vec{r}(t) = (t^2 - 2t)\vec{i} + (t+1)\vec{j} - 3t\vec{k}$ เมื่อ $t = 1$

    4.4 $\vec{r}(t) = \text{sin}3t\vec{i} + \text{cos}2t\vec{j}$ เมื่อ $t = \frac{\pi}{4}$

    4.5 $\vec{r}(t) = \text{sin}^2 t\vec{j} + e^t\text{cos}t\vec{j} + t\vec{k}$ เมื่อ $t = 0$

5. ถ้าการเดินทางของอนุภาคตัวหนึ่งเป็น $\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$ โดยมี $x(t) = at^2 + bt + c$ และ $y(t) = dt + e$ เมื่อ a, b, c, d, e เป็นค่าคงที่ จงหาการกระจัดของอนุภาคนี้ที่เวลา 0 วินาที

6. เรือมีฟังก์ชันความเร็วเป็น $\vec{v}(t) = at^2\vec{i} + bt\vec{j}$ โดยกำหนดให้ $a = 10\ m/s^2$ และ $b = -5\ m/s^2$ จงหา

    6.1 ความเร็วที่เวลา 1 วินาที และ 2 วินาที

    6.2 ความเร่งที่เวลา 1.5 วินาที

    6.3 ความเร่งเฉลี่ยระหว่างช่วงเวลา 1 ถึง 2 วินาที

บทที่ 8

สถิติเบื้องต้น

8.1 ความรู้เบื้องต้นเกี่ยวกับสถิติ

คำว่า **สถิติ** ตรงกับคำในภาษาอังกฤษ Statistics ซึ่งเป็นคำที่แปลมาจากศัพท์ Statistik ในภาษาเยอรมัน ซึ่งคิดค้นขึ้นโดย Got fried Ache wall (ค.ศ. 1719-1772) เป็นคำที่มีรากศัพท์เดียวกับคำว่า “State” ซึ่งแปลว่า “รัฐ” มีความหมายถึงข้อมูลหรือข่าวสาร ซึ่งเป็นประโยชน์ต่อการบริหารงานของรัฐในด้านต่าง ๆ แต่ในปัจจุบันมีนักวิชาการให้ความหมายของคำว่าสถิติไว้หลายความหมาย เช่น

1. สถิติหมายถึงตัวเลขที่แสดงข้อเท็จจริงเกี่ยวกับเรื่องใดเรื่องหนึ่ง เช่น

    - สถิติที่แสดงปริมาณน้ำฝนในกรุงเทพมหานครในเดือนมกราคม พ.ศ. 2563
    - สถิติอุบัติเหตุที่เกิดในประเทศไทย พ.ศ.2562
    - สถิตินักเรียนที่มาสายของโรงเรียนแห่งหนึ่งในปีการศึกษา 2560

2. สถิติหมายถึงค่าตัวเลขที่คำนวณได้จากข้อมูลกลุ่มตัวอย่าง ค่าที่คำนวณได้ออกมานั้นเรียกว่า ค่าสถิติ เช่น ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐาน ค่าฐานนิยม และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เป็นต้น

3. สถิติหมายถึงศาสตร์ที่ว่าด้วยการเก็บรวมรวมข้อมูล การนำเสนอข้อมูล และการวิเคราะห์ข้อมูล

ข้อมูล (Data) คือ สิ่งที่แสดงถึงลักษณะของข้อเท็จจริงเกี่ยวกับบุคคล สิ่งของหรือเหตุการณ์ในรูปแบบของตัวเลข ภาพ ตัวอักษร และสัญลักษณ์ต่าง ๆ ซึ่งอาจเป็นตัวเลขหรือไม่ก็ได้ และต้องจำนวนมากพอที่จะแสดงลักษณะของเรื่องนั้นได้ เช่น อายุ น้ำหนัก ความสูง รายได้ เพศ ระดับการศึกษา อาชีพ เป็นต้น ข้อมูลที่เก็บรวบรวมมาได้เรียกว่า **ข้อมูลดิบ** (raw data) จากนั้นจะนำข้อมูลไปวิเคราะห์และประมวลผลต่อไป ซึ่งจะเรียกว่า **สารสนเทศ** (Information) ดังนั้นสารสนเทศหมายถึง ข้อมูลได้ผ่านการเปลี่ยนแปลงหรือมีการประมวลผลหรือวิเคราะห์สรุปผลด้วยวิธีการต่าง ๆ

ข้อมูลดิบ	สารสนเทศ
- คะแนนนักเรียนในห้อง	- นักเรียนส่วนใหญ่ในห้องนี้มีคะแนนสูงกว่าเกณฑ์
- รายได้ของครูในพื้นที่ กทม.	- ครูในพื้นที่ กทม. มีรายได้เฉลี่ย 35,000 ต่อเดือน
- จำนวนพายุที่ผัดผ่านประเทศไทย	- โดยเฉลี่ยแล้วพายุจะผัดผ่านประเทศไทยปีละ 15 ครั้ง
- จำนวนคนที่กดไลค์เฟสบุค	- คนที่กดไลค์เพจแมทโคตรส่วนใหญ่มีอายุช่วง 20-30 ปี

ข้อมูลที่นำมาวิเคราะห์ประกอบด้วยข้อมูลหลายประเภท อาจพิจารณาตามลักษณะต่าง ๆ ดังนี้

แบ่งตามลักษณะของข้อมูล

1. **ข้อมูลเชิงปริมาณ** (Quantitative data) คือข้อมูลที่วัดค่าได้ว่ามากหรือน้อย จึงแสดงเป็นตัวเลข เช่น รายได้ น้ำหนัก ส่วนสูง คะแนนสอบ อายุ เป็นต้น แบ่งออกเป็น 2 แบบคือ

   1.1 **ข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่อง** (Discrete data) หมายถึงข้อมูลที่มีค่าเป็นจำนวนเต็มหรือจำนวนนับ

   1.2 **ข้อมูลแบบต่อเนื่อง** (Continunous data) หมายถึงข้อมูลที่มีค่าได้ทุกค่าในช่วงที่กำหนดที่มีความหมาย

ข้อมูลแบบไม่ต่อเนื่อง	ข้อมูลแบบต่อเนื่อง
- จำนวนไข่ไก่ในตะกร้า	- น้ำหนักของไข่ไก่ 1 ฟอง
- จำนวนเด็กในห้องเรียน	- ส่วนสูงของนักเรียน
- จำนวนพายุที่ผัดผ่านในฤดูกาลหนึ่ง	- ความเร็วลม
- จำนวนคนที่กดไลค์เฟสบุค	- อุณหภูมิของน้ำ

2. **ข้อมูลเชิงคุณภาพ** (Qualitative data) หรือข้อมูลจำแนกประเภท (Categorical data) หรือบางครั้งเรียกว่าข้อมูลเชิงกลุ่มเป็นข้อมูลที่ไม่สามารถระบุค่าได้ว่ามากหรือน้อย มักจะเป็นข้อความ เช่น ระดับการศึกษา การนับถือศาสนา เพศ เป็นต้น

แบ่งตามแหล่งที่มาของข้อมูล

1. **ข้อมูลปฐมภูมิ** (Primary data) คือข้อมูลที่เก็บรวบรวมด้วยตัวเองหรือจากแหล่งที่ให้ข้อมูลโดยตรง เช่น การทดลอง การสอบถาม การทำสำมะโน การสัมภาษณ์ เป็นต้น ข้อมูลปฐมภูมิจะเป็นข้อมูลที่มีรายละเอียดตรงตามที่ผู้ใช้ต้องการ อาจเสียเวลาและค่าใช้จ่ายมาก และเป็นข้อมูลยังไม่ทำการวิเคราะห์

2. **ข้อมูลทุติยภูมิ** (Secondary data) คือข้อมูลที่รวบรวมได้จากแหล่งอื่นที่มีผู้รวบรวมไว้ให้ เช่น รายงานต่าง ๆ ของหน่วยราชการหรือเอกชน เป็นต้น ผู้ใช้ข้อมูลเพียงนำข้อมูลมาใช้เท่านั้น จึงประหยัดทั้งเวลาและค่าใช้จ่าย ดังนั้นข้อมูลทตุยภูมิคือข้อมูลที่ทำการวิเคราะห์เบื้องต้นมาแล้ว การนำข้อมูลชนิดนี้มาใช้อาจมีรายละเอียดไม่เพียงพอ หรือไม่ตรงตามต้องการ ดังนั้นผู้ใช้อาจไม่ทราบถึงข้อผิดพลาดของข้อมูล จึงควรระมัดระวังในการใช้

ข้อมูลปฐมภูมิ	ข้อมูลทุติยภูมิ
- คะแนนที่ได้จากการสอบถามเพื่อน ๆ ในห้อง - อุณหภูมิของสารต่าง ๆ ที่ได้จากทดลอง - จำนวนนักเรียนที่มาสายในแต่ละวัน จากการสังเกตหน้าโรงเรียน	- คะแนนที่ได้จากการบันทึกของครูผู้สอน - ค่าความชื้นในอากาศที่ได้จากเว็ปไซค์ ของกรมอุตุนิยมวิทยา - น้ำหนักของผู้สูงวัยใน กทม. ที่ได้จากสำนักสถิติแห่งชาติ

หากต้องการทราบข้อมูลทางสถิติบางอย่าง เช่น รายได้ของคนไทย สิ่งแรกที่ต้องทำคือการสำรวจหรือเก็บข้อมูลของรายได้ของคนไทย จะเรียกคนไทยทุกคนว่า **ประชากร** (Population) ของการสำรวจในครั้งนี้ ถ้าสนใจน้ำหนักของนักเรียนในกรุงเทพมหานคร ประชากรคือ นักเรียนทุกคนในกรุงเทพมหานคร ดังนั้นประชากรในทางสถิติจึงมีความหมายกว้างกว่าความคำว่าประชากรโดยทั่วไป ดังจะนิยามดังนี้

บทนิยาม 8.1.1 ประชากร คือเซตของค่าสังเกตทั้งหมดในการทดลอง หรือในการสำรวจทางสถิติ

จำนวนของค่าสังเกตทั้งหมดของประชากร คือตัวเลขที่บอกขนาดของประชากร เช่นสำรวจคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนชั้น ม. 3 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งที่มีจำนวนทั้งหมด 450 คน จะได้ว่าขนาดของประชากรในการสำรวจครั้งนี้คือ 450 ประชากรอาจแบ่งตามขนาดได้ 2 ชนิดคือ

1. **ประชากรที่มีจำนวนแน่นอน** (Finite population) เช่น จำนวนรถโดยสารประจำทางในกรุงเทพมหานคร จำนวนนักศึกษาสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา เป็นต้น
2. **ประชากรที่มีจำนวนอนันต์** (Infinite population) เช่น จำนวนข้าวที่เก็บเกี่ยวได้ในปีหนึ่ง ๆ และจำนวนครั้งที่ทอดลูกเต๋าจนได้แต้ม 5 เป็นต้น

จะเห็นว่าการเก็บรวบรวมข้อมูลทุกหน่วยในประชากรที่มีขนาดใหญ่ อาจเกิดความยุ่งยาก ใช้เวลามากและค่าใช้จ่ายสูง ผู้วิจัยอาจเก็บข้อมูลบางส่วนของประชากร ซึ่งจะเรียกว่า **ตัวอย่าง** (Sample) เช่น ต้องการหาอายุเฉลี่ยของประชากรไทย ประชากรคือคนไทยทุกคน ตัวอย่างคือคนไทยบางส่วนที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่าง หรือนิยามได้ดังนี้

บทนิยาม 8.1.2 ตัวอย่าง คือเซตย่อยของประชากรที่ไม่ใช่เซตว่าง

การเก็บรวบรวมข้อมูลเพื่อนำมาวิเคราะห์ อาจประกอบด้วยข้อมูลปฐมภูมิ และข้อมูลทุติยภูมิ โดยข้อมูลที่ได้อาจเป็นข้อมูลเชิงปริมาณ และเชิงคุณภาพ ในกรณีการใช้ข้อมูลปฐมภูมิหน่วยงานจะเป็นผู้เก็บข้อมูล ซึ่งมีวิธีเก็บรวบรวม 3 วิธีดังนี้

1. การเก็บรวบรวมข้อมูลจากทะเบียนหรือการบันทึก
   คือการจดบันทึกหรืองานทะเบียนของหน่วยงาน หรือองค์กรต่าง ๆ เช่น การบันทึกจำนวนนักเรียนที่มาเรียนในแต่ละวัน ของโรงเรียนแห่งหนึ่ง การบันทึกข้อมูลผู้มารักษาในโรงพยาบาลแห่งหนึ่ง เช่น อายุ เพศ และหมู่เลือด เป็นต้น ห้างสรรพสินค้าจำบันทึกยอดขายของสินค้าแต่ละแผนกทุกวัน

2. การเก็บรวมรวมข้อมูลโดยการสำรวจ
   ทำได้ 2 แบบคือ

   2.1 **การทำสำมะโน** (Census) คือข้อมูลที่เก็บรวบรวมข้อมูลทุก ๆ หน่วยของประชากร

   2.2 **การสำรวจด้วยตัวอย่าง** (Sample survey) คือการเก็บข้อมูลบางหน่วยที่เลือกมาเป็นตัวแทนจากทุก ๆ หน่วยของประชากร

3. การเก็บรวบรวมข้อมูลโดยการทดลอง
   ในบางครั้งเรื่องที่เราสนใจไม่สามารถทำการสำรวจได้ แต่ต้องเก็บข้อมูลโดยทำการทดลอง เช่น เปรียบเทียบการสอนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องจำนวนเต็ม 2 รูปแบบ หรือศึกษาผลสัมฤทธิ์ของวิชาคณิตศาสตร์เรื่องพื้นที่ผิวและปริมาตรของนักเรียนชั้น ม.4 โรงเรียนแห่งหนึ่งโดยใช้สื่อประสมร่วมกับโปรแกรม GeoGebra

การเก็บรวบรวมข้อมูลทำได้หลายแบบ เช่น

1. การสัมภาษณ์ (Interview)
   การส่งพนักงานไปสัมภาษณ์หน่วยต่าง ๆ ในประชากรหรือตัวอย่าง พนักงานจะเป็นผู้จดบันทึกคำตอบในแบบสอบถาม

2. การส่งไปรณีย์ (Mail)
   การส่งแบบสอบถามทางไปรษณีย์ไปให้ผู้ตอบแบบสอบถามที่ถูกเลือก เมื่อผู้ตอบแบบสอบถามแล้วให้ส่งคืนมาทางไปรษณีย์

3. การทอดแบบ
   การนำแบบสอบถามไปให้ผู้ตอบ แล้วนัดมารับแบบสอบถามคืน

4. โทรศัพท์
   พนักงานใช้โทรศัพท์ไปสอบถามผู้ตอบ หรือผู้ที่ถูกเลือกเป็นตัวอย่าง

5. การชั่ง ตวง วัด หรือนับ
   การศึกษาข้อมูลบางเรื่องที่ต้องการตัวเลขที่แน่นอน เช่นน้ำหนักของเด็กแรกเกิด ขนาดของแปลงเพราะปลูก จึงต้อง ชั่ง ตวง วัด หรือนับ จึงจะได้ข้อมูลที่ถูกต้อง

6. การสังเกต
   การเก็บรวบรวมข้อมูลที่พนักงานสนามต้องไปสังเกตการณ์ในปฏิกิริยาต่าง ๆ ส่วนใหญ่วิธีนี้จะใช้เมื่อไม่สามารถใช้วิธีอื่นได้ เช่นการสังเกตความพอใจในรสชาติของกาแฟยี่ห้อหนึ่ง การสังเกตความพึงพอใจต่อการจัดการเรียนการสอนของวิชาหนึ่ง เป็นต้น

หลังจากการเก็บรวบรวมข้อมูล จะต้องทำการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อนำไปสรุปผล การวิเคราะห์ข้อมูลอาจแบ่งออกเป็น 2 ชนิดคือ การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้น และการวิเคราะห์ข้อมูลขั้นสูง

1. การวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นหรือเรียกว่า **สถิติเชิงพรรณา** (Descriptive Statistics) เป็นการวิเคราะห์ขั้นต้นที่มุ่งวิเคราะห์เพื่อหาลักษณะกว้าง ๆ ของข้อมูลชุดนั้น ซึ่งข้อสรุปและผลที่ได้จะพรรณนาลักษณะหรือแจกแจงข้อมูลตามที่ได้รวบรวมมาเท่านั้น มักนำเสนอในรูปของ

ตาราง แผนภาพ แผนภูมิ ร้อยละ เปอร์เซ็นไทล์ การแจกแจงความถี่ การหาค่าเฉลี่ย เป็นต้น จะกล่าวในบทที่ 2

2. การวิเคราะห์ข้อมูลขั้นสูงหรือเรียกว่า **สถิติเชิงอนุมาน (Inferential Statistics)** เป็นการวิเคราะห์ข้อมูลที่เก็บรวบรวมได้จากตัวอย่างเพื่ออ้างอิงไปถึงข้อมูลทั้งหมดหรือประชากร การวิเคราะห์ในขั้นนี้ได้แก่ การประมาณค่า การทดสอบสมมติฐาน การวิเคราะห์ความแปรปรวน เป็นต้น จะกล่าวในบทที่ 4-10

การนำเสนอข้อมูลสถิติแบ่งออกเป็น 2 แบบ

1. การนำเสนอข้อมูลสถิติโดยปราศจากแบบแผน (Informal Presentation)
   - การนำเสนอข้อมูลสถิติเป็นบทความ
   - การนำเสนอข้อมูลสถิติเป็นบทความกึ่งตาราง
2. การนำเสนอข้อมูลสถิติโดยมีแบบแผน (Formal Presentation)
   - การเสนอข้อมูลสถิติด้วยตาราง (Tabular Presentation)
   - การเสนอข้อมูลสถิติด้วยกราฟและรูป (Graphic Presentation)

ในการเก็บรวบรวมคะแนนหรือข้อมูลต่าง ๆ ที่ได้จากการวัด เพื่อให้มีการจัดระเบียบเตรียมข้อมูลจัดให้เป็นหมวดหมู่ โดยการทำให้แปลความหรือนำไปใช้ได้ง่าย เช่น การเรียงข้อมูลจากมากไปหาน้อยหรือน้อยไปหามาก การทำตารางแจกแจงความถี่ การเขียนแผนภาพต้นใบ เป็นต้น

ฮิสโทแกรม (Histogram) คือกราฟที่แสดงถึงการกระจายของข้อมูล มีลักษณะเป็นรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากวางเรียงติดต่อกันบนแกนนอนโดยมีแกนนอนแทนค่าของตัวแปร ความกว้างของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากแทนความกว้างของอันตรภาคชั้น ความสูงของรูปสี่เหลี่ยมมุมฉากจะแสดงความถี่

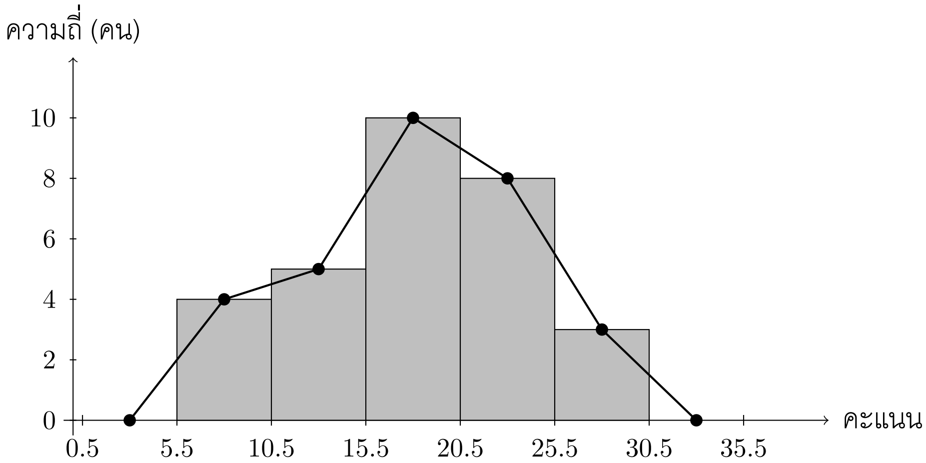
รูปหลายเหลี่ยมความถี่ (Frequency Polygon) คือรูปกราฟหลายเหลี่ยมที่เกิดจากการโยงจุดกึ่งกลางของยอดแท่งของสี่เหลี่ยมของฮิสโทแกรมด้วยเส้นตรง หรือแผนภูมิเส้นที่แสดงความถี่ของคะแนนแต่ละชั้น โดยเพิ่มฮิสโทแกรมอีก 2 ชั้นคือชั้นต่ำสุดและชั้นสูงสุดมีค่าความถี่เท่ากับ 0

ตัวอย่าง 8.1.3 ข้อมูลชุดหนึ่งแสดงตารางแจกแจงความถี่ดังนี้

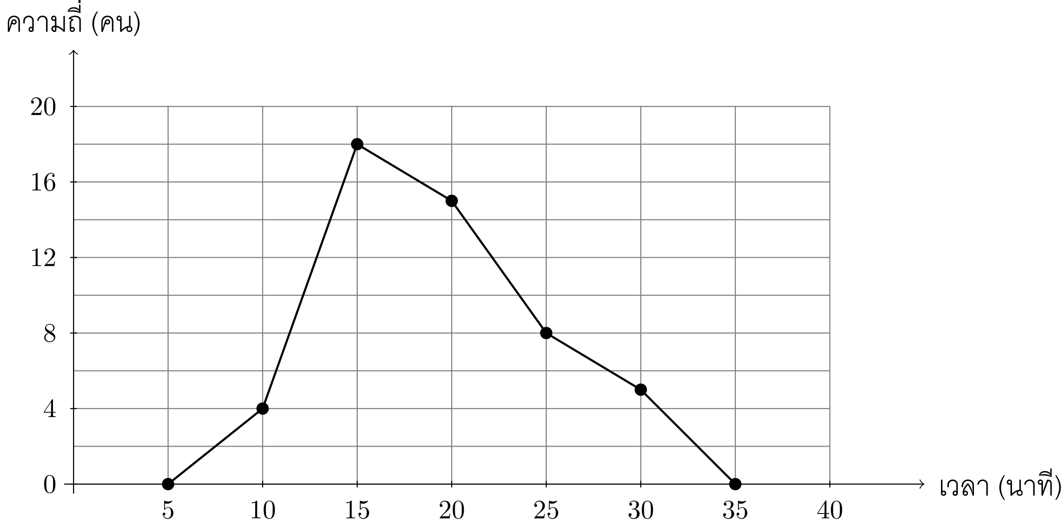
คะแนน	ความถี่ (คน)	ขอบเขตจำกัดล่าง–ขอบเขตจำกัดบน	ค่ากึ่งกลาง
$6-10$	4	$5.5-10.5$	8
$11-15$	5	$10.5-15.5$	13
$16-20$	10	$15.5-20.5$	18
$21-25$	8	$20.5-25.5$	23
$26-30$	3	$25.5-30.5$	28

จงสร้างฮิสโทแกรมและรูปหลายเหลี่ยมความถี่ของข้อมูลชุดนี้

วิธีทำ สร้างฮิสโทแกรมและรูปหลายเหลี่ยมความถี่ ได้ดังนี้



ตัวอย่าง 8.1.4 ข้อมูลเวลา (นาที) ที่ใช้ในการเดินทางมาโรงเรียนกับจำนวนนักเรียนแสดงด้วยรูปหลายเหลี่ยมความถี่ดังนี้

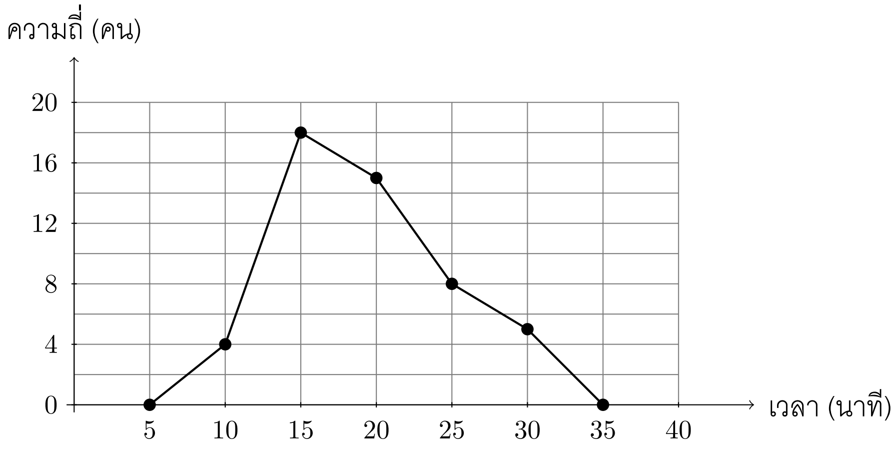


1. จงหาจำนวนชั้นและความกว้างของอันตรภาคชั้น

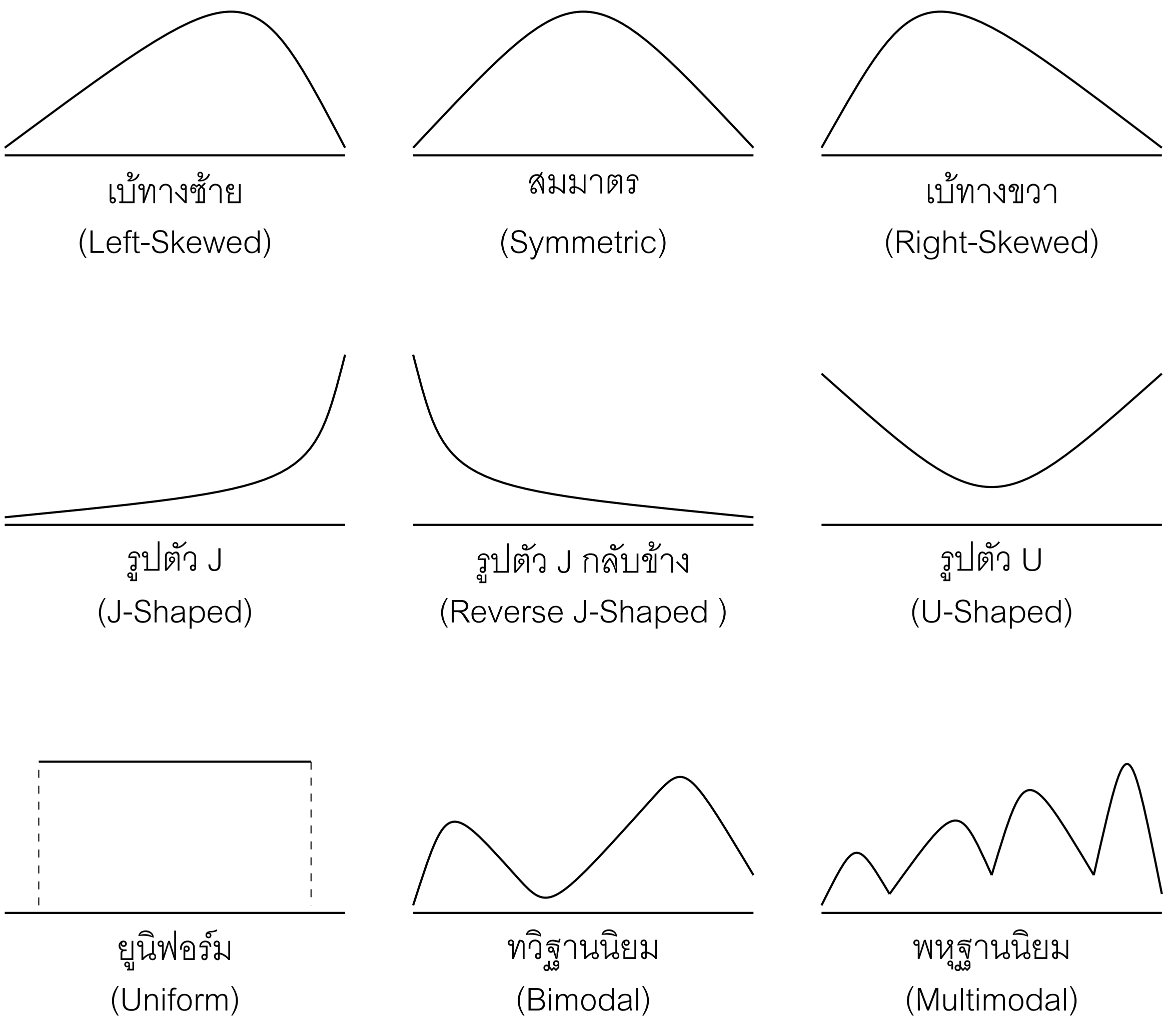
2. จงหาจำนวนนักเรียนในโรงเรียนแห่งนี้

3. นักเรียนที่ใช้เวลาเดินทางมาโรงเรียนน้อยกว่า 18 นาทีมีกี่เปอร์เซ็นต์

บางครั้งเมื่อสร้างรูปหลายเหลี่ยมความถี่แล้วสามารถปรับเส้นโค้งความถี่ให้เรียบได้เรียกว่า **เส้นโค้งความถี่** (Frequency curve) ซึ่งจะแสดงถึงลักษณะข้อมูล เส้นโค้งความถี่อาจอยู่ในรูปแบบต่าง ๆ ดังนี้ เช่น



รูปที่ 8.1: รูปแบบต่าง ๆ ของเส้นโค้งความถี่



ความถี่สะสม (Cumulative frequency) คือผลรวมความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้นกับความถี่ของทุก ๆ อันตรภาคชั้นที่อยู่ต่ำกว่าหรือสูงกว่าอย่างใดอย่างหนึ่ง มักใช้ F_i แทนความถี่สะสมของชั้นที่ i **ความถี่สัมพัทธ์** (Relative frequency) คือความถี่ของอันตรภาคชั้นนั้นหารด้วยผลรวมของความถี่ทั้งหมด **ความถี่สะสมสัมพัทธ์** (Cumulative relative frequency) คือผลรวมความถี่สะสมของอันตรภาคชั้นนั้นกับความถี่สะสมของทุก ๆ อันตรภาคชั้นที่อยู่ต่ำกว่าหรือสูงกว่าอย่างใดอย่างหนึ่ง หรืออาจบอกในรูปร้อยละหรือเปอร์เซ็นต์เมื่อคูณด้วย 100

ตัวอย่าง 8.1.5 ข้อมูลชุดหนึ่งแสดงตารางแจกแจงความถี่ดังนี้

คะแนน	ความถี่ (คน)
$6-10$	3
$11-15$	5
$16-20$	15
$21-25$	10
$26-30$	7

จากตารางแจกแจงความถี่จงหาความถี่สะสม ความถี่สัมพัทธ์ และร้อยละความถี่สะสมสัมพัทธ์

คะแนน	ความถี่ (คน)	ความถี่สะสม	ความถี่สะสมสัมพัทธ์	ร้อยละความถี่สะสมสัมพัทธ์
$6-10$	4			
$11-15$	5			
$16-20$	10			
$21-25$	8			
$26-30$	3			

ตัวอย่าง 8.1.6 ข้อมูลชุดหนึ่งมีบางส่วนถูกนำเสนอในตารางต่อไปนี้

อันตรภาคชั้น	ความถี่	ความถี่สะสม	ความถี่สัมพัทธ์
$2-\ 6$			
$7-11$		11	0.2
$12-16$		14	
$17-21$	6		0.3

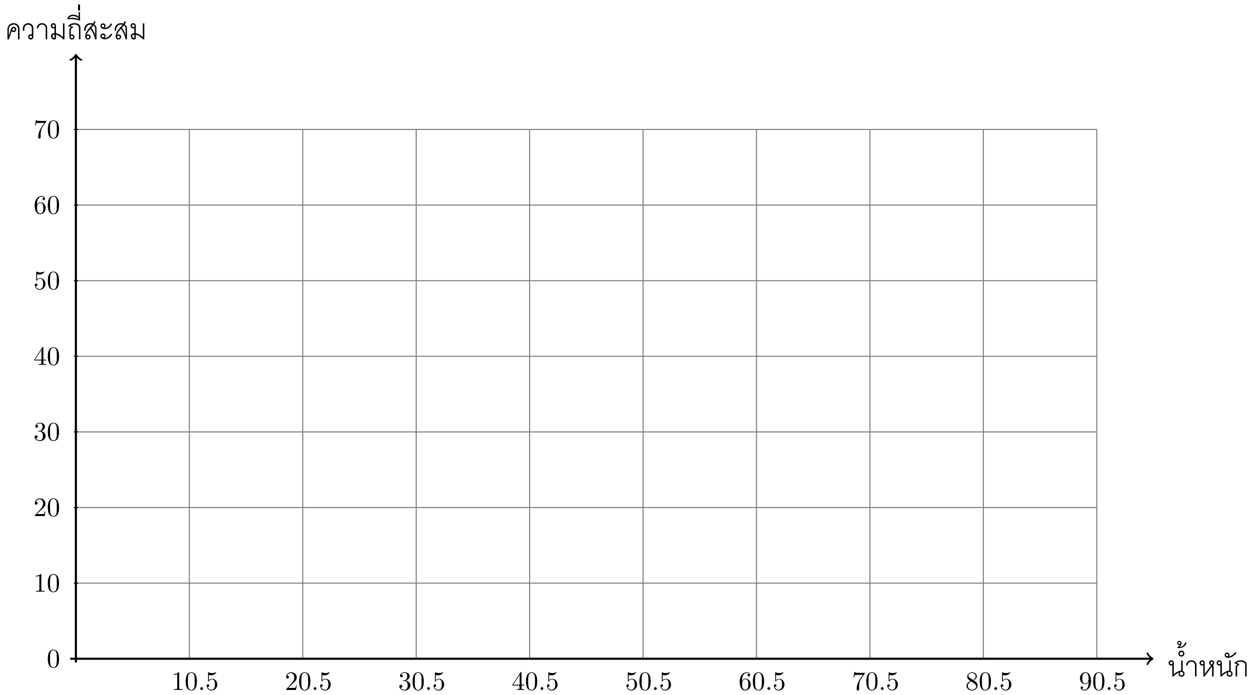
จงเติมตารางให้สมบูรณ์

เส้นโค้งความถี่สะสม (Cumulative frequency curve) **หรือเส้นโค้งโอจีฟ** (Ogive curve) เป็นโค้งที่แสดงความถี่สะสมของข้อมูลตั้งแต่ค่าต่ำสุดถึงค่าสูงสุด หลักการเขียนเส้นโค้งของความถี่สะสมทำได้ดังนี้

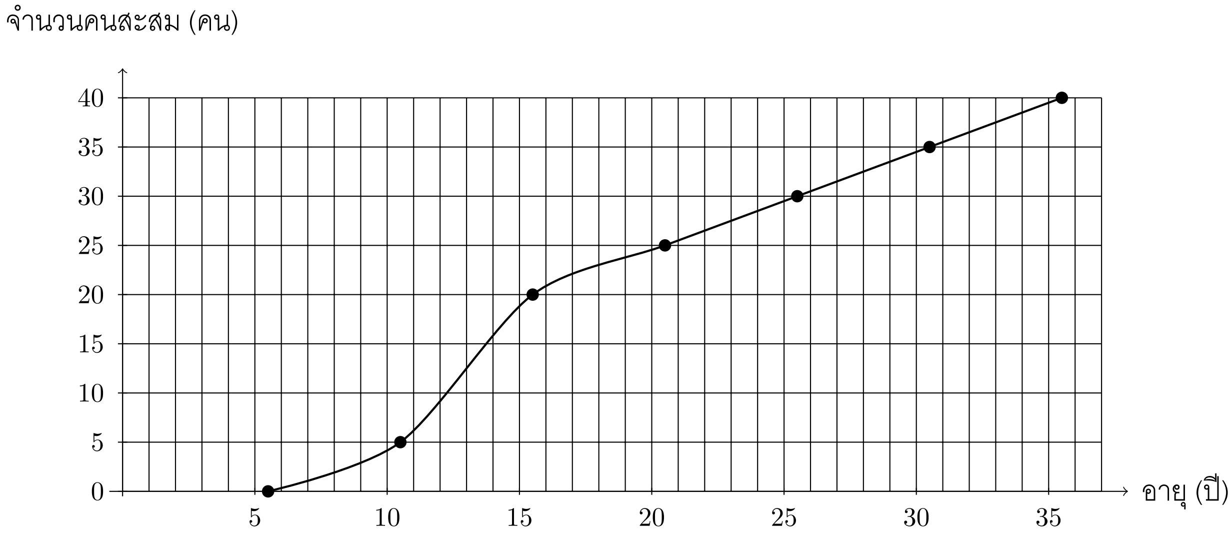
1. ให้แกนนอนเป็นคะแนน และแกนตั้งเป็นความถี่สะสม
2. หาตำแหน่งของจุด (ขอบเขตจำกัดบน, ความถี่สะสม) ของอันตรภาคชั้นแต่ละชั้นที่ไม่ใช่ชั้นแรก โดยชั้นแรกให้ใช้จุด (ขอบเขตจำกัดล่างชั้นแรก, 0)
3. ลากเส้นเชื่อมแต่ละจุดที่ติดกัน แล้วปรับโค้งให้เรียบ

ตัวอย่าง 8.1.7 จงสร้างเส้นโค้งความถี่สะสมของข้อมูลจากตารางแจกแจงความถี่นี้

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	ความถี่ (คน)	ความถี่สะสม	ขอบล่าง–ขอบบน
$11-20$	4		
$21-30$	6		
$31-40$	10		
$41-50$	20		
$51-60$	10		
$61-70$	6		
$71-80$	4		



ตัวอย่าง 8.1.8 ข้อมูลอายุของชุมชนแห่งหนึ่ง แสดงด้วย**เส้นโค้งโอจีฟ**ดังนี้



จงหาช่วงอายุที่มีจำนวนคนสูงสุด (ความถี่สูงสุด) และจงประมาณอายุของคนลำดับที่ 15 เมื่อเรียงอายุจากน้อยไปมาก

ในการจัดข้อมูลที่มีอยู่ให้เป็นกลุ่ม ๆ เพื่อความสะดวกในการนำไปวิเคราะห์ข้อมูลอาจทำได้โดยใช้ตารางแจกแจงความถี่และใช้กราฟ เช่น การสร้างฮิสโทแกรม จะเห็นว่าวิธีดังกล่าวอาจทำให้ไม่สามารถบอกได้ว่าข้อมูลที่มีอยู่มีค่าใดบ้าง เนื่องจากได้จัดแบ่งข้อมูลที่มีอยู่เป็นช่วง ๆ

การจัดข้อมูลเป็นกลุ่มมีอีกวิธีหนึ่งคือการสร้างแผนภาพเพื่อแจกแจงความถี่และวิเคราะห์ข้อมูลเบื้องต้นไปพร้อมกันคือ **แผนภาพต้น-ใบ** (stem and leaf diagram) ซึ่งทำได้ดังตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 8.1.9 น้ำหนักของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่งจำนวน 20 คน ดังนี้

34	35	36	38	39	39	40	40	41	42
42	43	44	45	46	50	51	51	52	54

ตัวอย่าง 8.1.10 คะแนนของวิชาคณิตศาสตร์และฟิสิกส์ของนักเรียนในโรงเรียนแห่งหนึ่งจำนวน 20 คน ดังนี้

วิชาคณิตศาสตร์

12	15	16	22	23	24	26	30	31	33
33	35	35	39	40	41	42	44	44	45

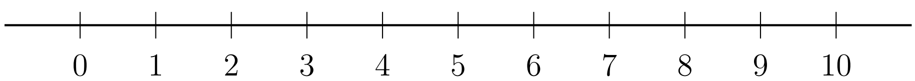
วิชาฟิสิกส์

10	11	15	19	20	21	21	23	25	27
29	32	35	35	36	37	38	40	45	49

แผนภาพจุด (Dot Plot) เป็นรูปแบบหนึ่งของการนำเสนอข้อมูลเชิงปริมาณที่ทำได้ไม่ยาก โดยจะเขียนจุดแทนข้อมูลแต่ละตัวไว้เหนือเส้นในแนวนอนที่มีสเกลให้ตรงกับตำแหน่งที่แสดงค่าของข้อมูลนั้น แผนภาพจุดช่วยให้เห็นภาพรวมของข้อมูลได้รวดเร็วกว่าการพิจารณาจากข้อมูลโดยตรงโดยเฉพาะอย่างยิ่งเมื่อสนใจจะพิจารณาลักษณะของข้อมูลว่ามีการกระจายมากน้อยเพียงใด

ตัวอย่าง 8.1.11 จงสร้างภาพจุดของคะแนนสอบย่อยวิชาแคลคูลัส 1 ที่มีคะแนนดังต่อไปนี้

0	5	1	3	7	5	7	10	9	1
5	3	8	9	4	5	4	3	1	8



แบบฝึกหัด 8.1

1. ความหมายของคำว่าสถิติที่เหมาะสมที่สุดสำหรับคุณคือความหมายใด เพราะเหตุใด
2. จงยกตัวอย่างประโยชน์ของสถิติในงานด้านต่าง ๆ มาอย่างน้อย 2 ด้าน พร้อมเหตุผลประกอบ
3. จงยกตัวอย่างข้อมูลแบบต่อเนื่อง 2 ตัวอย่าง
4. จงบอกข้อดี และข้อเสีย ของข้อมูลปฐมภูมิและข้อมูลทุติยภูมิ
5. จงยกตัวอย่างการเก็บข้อมูลที่จำเป็นต้องใช้ การทำสำมะโน มาอย่างน้อย 2 ตัวอย่าง
6. จงบอกข้อดี และข้อเสีย ของการสำมะโน และการสำรวจด้วยตัวอย่าง
7. จงยกตัวอย่างการเก็บข้อมูลที่ยังไม่ได้กล่าวถึงในบทนี้
8. จงบอกข้อแตกต่างระหว่างสถิติเชิงพรรณา และสถิติเชิงอนุมาน
9. จงเติมตารางให้สมบูรณ์

คะแนน	ความถี่ (คน)	ความถี่สะสม	ร้อยละความถี่สัมพัทธ์	จุดกึ่งกลางชั้น
$11-20$	20			
$21-30$	120			
$31-40$			25	
$41-50$	80			
	50			55.5
$61-70$		390		
$71-80$	10			

10. ข้อมูลคะแนนสอบวิชาสถิติ ของนักเรียน 36 คน ดังนี้

72	83	82	92	70	91	71	33	42	51	55	75
38	40	75	49	53	41	86	89	51	57	66	92
38	96	85	93	60	75	55	48	85	85	54	56

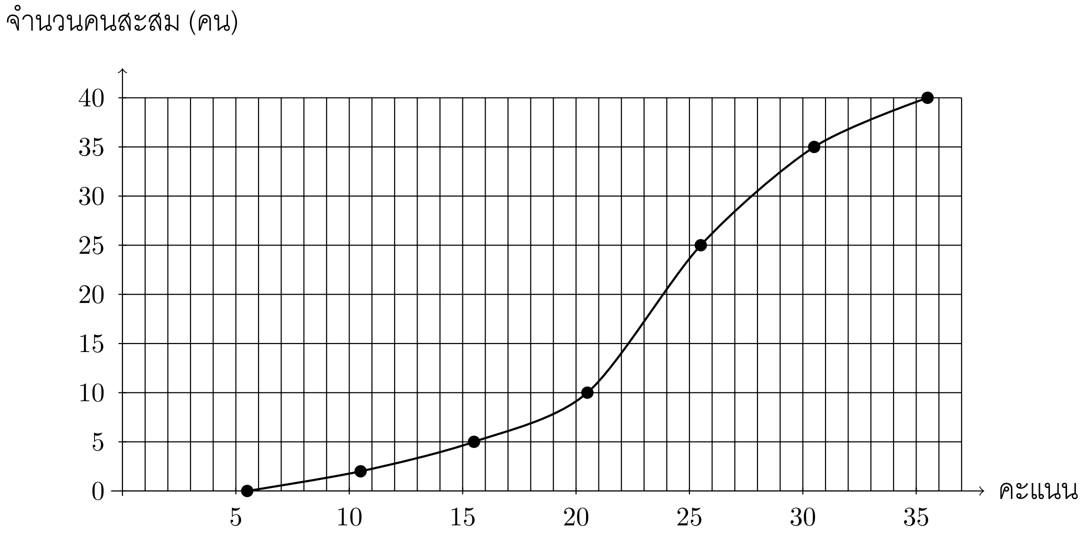
10.1 จงสร้างตารางแจกแจงความถี่ ความถี่สะสม ความถี่สัมพัทธ์ และความถี่สะสมสัมพัทธ์ ที่มีอันตรภาคชั้นเป็น $30-39$, $40-49$, $50-59$, $60-69$, $70-79$, $80-89$, $90-99$

10.2 จงหาร้อยละของจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนระหว่าง $70-79$ คะแนน

10.3 จงหาจำนวนนักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 59 คะแนน

10.4 จงหาร้อยละของนักเรียนที่ได้คะแนนน้อยกว่าหรือเท่ากับ 59 คะแนน

11. ข้อมูลคะแนนเก็บวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่ง แสดงด้วยเส้นโค้งโอจีพดังนี้



11.1 จงหาช่วงคะแนนที่มีจำนวนคนสูงสุด (ความถี่สูงสุด)

11.2 จงประมาณคะแนนของคนลำดับที่ 10 เมื่อเรียงคะแนนจากมากไปน้อย

11.3 นักเรียนที่ได้คะแนนมากกว่า 24 คะแนน ประมาณกี่เปอร์เซ็นต์

12. จงเขียนแผนภาพต้น-ใบ ของข้อมูลต่อไปนี้

44	52	46	59	104	101	46	55	43	60
66	48	54	56	100	109	74	84	49	70
44	59	88	84	40	79	71	104	49	101

13. ราคาปิด (บาท) ของหุ้น BTS ของ บริษัท บีทีเอส กรุ๊ป โฮลดิ้งส์ จำกัด (มหาชน) ย้อนหลัง 30 วัน นับจากวันที่ 9 เมษายน 2564 (ข้อมูลจากตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย) ดังนี้

9.20	9.20	9.25	9.40	9.60	9.70	9.65	9.70	9.75	9.45
9.45	9.45	9.40	9.40	9.40	9.40	9.40	9.40	9.45	9.40
9.45	9.55	9.35	9.35	9.45	9.40	9.50	9.30	9.30	9.40

จงสร้างแผนภาพต้น-ใบ โดยใช้ทศนิยม 1 ตำแหน่งเป็นต้น และทศนิยมหลักที่ 2 เป็นใบ เช่น 9.2 | 0 แทนราคาปิด 9.20 บาท

14. แผนภาพต้น-ใบที่กำหนดให้แสดงค่าที่นักเรียน 30 คนประมาณความสูงของเสาธงของโรงเรียน โดยที่ 5 | 5 แทนความสูง 5.5 เมตร

5	2 7 5 5 5 8 9
6	0 1 1 2 2 2 3 5 6 8
7	1 2 3 9

14.1 มีนักเรียนทั้งหมดกี่คนที่ประมาณความสูงเสาธงมากกว่า 61 เมตร

14.2 ถ้าเสาธงสูง 6 เมตร มีนักเรียนร้อยละเท่าใดที่ประมาณผิดพลาดเกิน ± 20 เซนติเมตร

15. จงเขียนแผนภาพต้น-ใบ ของข้อมูลต่อไปนี้

ข้อมูลชุด A

61	63	74	84	95	67	71	77	88	92
62	98	68	65	81	74	77	69	96	60

ข้อมูลชุด B

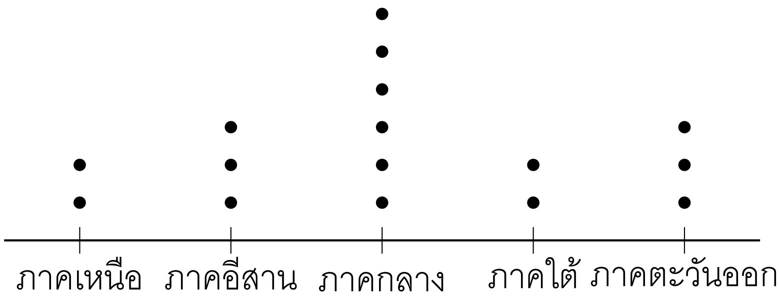
62	63	70	98	74	64	62	65	82	84
90	60	63	72	73	75	69	67	85	97

16. จากการสำรวจวันเกิดของนักเรียนในห้องเรียนหนึ่ง ปรากฏดังนี้

ลำดับที่	วันเกิด	ลำดับที่	วันเกิด	ลำดับที่	วันเกิด
1	อาทิตย์	6	เสาร์	11	ศุกร์
2	จันทร์	7	ศุกร์	12	จันทร์
3	อาทิตย์	8	อาทิตย์	13	อาทิตย์
4	อังคาร	9	พฤหัสบดี	14	ศุกร์
5	พุธ	10	พฤหัสบดี	15	พฤหัสบดี

จงสร้างภาพจุดแสดงวันเกิดของนักเรียนในห้องนี้

17. จากการสำรวจภูมิลำเนาของผู้ป่วยโควิด-19 แสดงเป็นแผนภาพจุดดังนี้ โดย ● แทนจำนวน 5 คน



17.1 จำนวนผู้ป่วยที่สำรวจในครั้งนี้มีจำนวนกี่คน

17.2 จำนวนผู้ป่วยที่มาจากภาคกลางสูงกว่าภาคเหนือคิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์

17.3 ถ้าผู้ป่วยในการสำรวจครั้งนี้มีภูมิลำเนาในกรุงเทพฯ 80% ของผู้ป่วยมีภูมิลำเนาในภาคกลาง แล้วผู้ป่วยมีภูมิลำเนาในกรุงเทพฯ คิดเป็นกี่เปอร์เซ็นต์ของการสำรวจครั้งนี้

8.2 ค่ากลางของข้อมูล

การวัดแนวโน้มสู่ศูนย์กลาง เป็นการคำนวณค่ากลางของข้อมูลซึ่ง คือค่าที่ใช้เป็นตัวแทนของข้อมูล บอกถึงลักษณะของข้อมูล ทำให้ผู้ใช้สามารถทราบถึงการแจกแจงข้อมูลว่าเป็นอย่างไร เพื่อความสะดวกในการสรุปเกี่ยวกับข้อมูลนั้น ๆ ซึ่งจะช่วยทำให้เกิดการวิเคราะห์ข้อมูลถูกต้องขึ้น

การหาค่ากลางของข้อมูลมีหลายวิธี แต่ละวิธีมีข้อดีและข้อเสีย และมีความเหมาะสมในการนำไปใช้ไม่เหมือนกัน ขึ้นอยู่กับลักษณะข้อมูลและวัตถุประสงค์ของผู้ใช้ข้อมูลนั้น ค่ากลางที่สำคัญมี 3 ชนิดดังนี้ ค่าเฉลี่ย (Mean) มัธยฐาน (Median) และ ฐานนิยม (Mode)

1. ค่าเฉลี่ย (Mean)

ค่าเฉลี่ย คือค่าที่ได้จากการเฉลี่ยข้อมูลทั้งหมดซึ่งคำนวณได้หลายแบบ แบ่งออกเป็น 3 ชนิดหลัก ๆ ซึ่งแต่ละค่าเหมาะกับข้อมูลแต่ชนิดแตกต่างกัน

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (Arithematic mean)
2. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (Geometric mean)
3. ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (Hamonic mean)

บทนิยาม 8.2.1 ข้อมูลเชิงปริมาณชุดหนึ่งประกอบด้วยข้อมูลทั้งหมด

$$X_1,\, X_2,\, X_3,\, ...,\, X_N$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร เขียนแทนด้วย μ หาได้จาก

$$\mu = \frac{X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_N}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i}{N} \qquad \text{เขียนได้ย่อ ๆ คือ} \qquad \mu = \frac{\sum X_i}{N}$$

เมื่อ N แทนขนาดของประชากร และเมื่อเลือกตัวอย่างขนาด n จากประชากร ได้ข้อมูลดังนี้

$$x_1,\, x_2,\, x_3,\, ...,\, x_n$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวอย่าง เขียนแทนด้วย $\bar{X}$ หาได้จาก

$$\bar{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \qquad \text{เขียนได้ย่อ ๆ คือ} \qquad \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเหมาะที่จะนำมาใช้เป็นค่ากลางของข้อมูลเมื่อข้อมูลนั้นๆ ไม่มีค่าใดค่าหนึ่งซึ่งสูงหรือต่ำกว่าค่าอื่น ๆ ที่เหลืออย่างผิดปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นค่าเฉลี่ยที่นิยมใช้มากที่สุดในกลุ่มค่าเฉลี่ยทั้งหมด บางครั้งอาจเรียกสั้น ๆ ว่า ค่าเฉลี่ย

ตัวอย่าง 8.2.2 ราคาปิด (บาท) ของหุ้น AOT ของ บริษัท ท่าอากาศยานไทย จำกัด (มหาชน) ย้อนหลัง 10 วัน นับจากวันที่ 31 มีนาคม 2564 (ข้อมูลจากตลาดหลักทรัพย์แห่งประเทศไทย) ดังนี้

69.0 69.00 68.25 67.75 67.00 67.00 67.25 67.25 67.25 68.25

1. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากร

2. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของตัวอย่าง เมื่อสุ่มมา 4 วัน ประกอบด้วย 69.00, 68.25, 67.25, 67.00

ตัวอย่าง 8.2.3 ในการสอบวิชาสถิติของเด็กห้องหนึ่ง ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเด็กห้องนี้เท่ากับ 53 คะแนน แต่จากการตรวจสอบพบว่าข้อมูลนักเรียนสองคนยังไม่ได้ตรวจ เมื่อตรวจเสร็จปรากฏว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของเด็กห้องนี้เป็น 55 คะแนน และผลรวมของคะแนนสอบเพิ่มขึ้นอีก 180 คะแนน จำนวนนักเรียนห้องนี้เท่ากับเท่าใด

บทนิยาม 8.2.4 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตสำหรับข้อมูลที่จัดกลุ่ม
ข้อมูลเชิงปริมาณชุดหนึ่งมีขนาดประชากร N มีการแจงแจงความถี่ k ชั้น แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของประชากรเมื่อทราบค่าข้อมูลทุกค่าของประชากร

$$\mu = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i X_i}{\sum_{i=1}^{k} f_i} = \frac{\sum f_i X_i}{\sum f_i}$$

X_i คือค่ากึ่งกลางของชั้นที่ i

f_i คือความถี่ของชั้นที่ i

N คือขนาดของประชากร หรือ $N = \sum f_i$

กรณีที่ทราบข้อมูลบางหน่วย n คือขนาดตัวอย่างซึ่ง $n = \sum f_i$ จะได้ว่า

$$\bar{X} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

ตัวอย่าง 8.2.5 นักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 10 คนมีอายุดังนี้ 7, 10, 12, 10, 15, 8, 9, 10, 17, 8 ปี

1. จงหาอายุเฉลี่ยของนักเรียนกลุ่มนี้โดยใช้ข้อมูลดิบ

2. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุของนักเรียนกลุ่มนี้โดยใช้ตารางแจกแจงความถี่ที่กำหนดให้

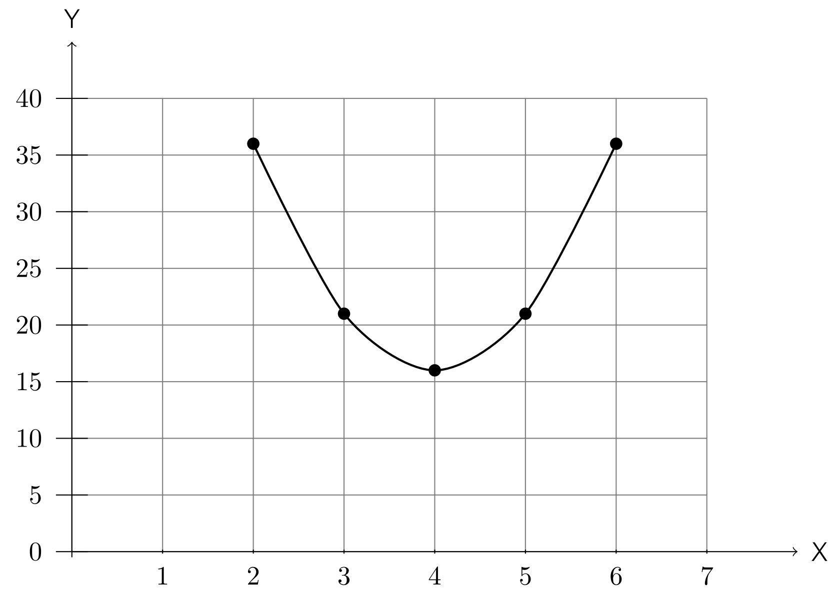
อายุ (ปี)	ความถี่ (f_i)	ค่ากึ่งกลางชั้น (x_i)	$f_i x_i$
$7-9$			
$10-12$			
$13-15$			
$16-18$			
รวม			

ทฤษฎีบท 8.2.6 ข้อมูล $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ μ แล้ว $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu) = 0$

จากข้อมูล 2, 3, 3, 5, 7 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ $\mu = \frac{2+3+3+5+7}{5} = 4$ จะได้ว่า

คะแนน (x_i)	$(x_i-2)^2$	$(x_i-3)^2$	$(x_i-\mu)^2$	$(x_i-5)^2$	$(x_i-6)^2$
2	0	1	4	9	16
3	1	0	1	4	9
3	1	0	1	4	9
5	9	4	1	0	1
7	25	16	9	4	1
รวม	36	21	16	21	36

กำหนดให้ $y = \sum_{i=1}^{5}(x_i - x)^2$ เมื่อ $x = 2, 3, 4, 5, 6$ นำไปเขียนกราฟแล้วลากเส้นไประหว่างจุดปรับโค้งให้เรียบ ได้ดังนี้



จะเห็นได้ว่ากราฟที่ได้เป็นพาราโบลาหงายที่มีจุดยอดอยู่ที่ $x = \mu$ ซึ่งจะแสดงการพิสูจน์ได้จากทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.2.7 ข้อมูล $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ μ แล้ว

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 \text{ มีค่าน้อยที่สุด}$$

ทฤษฎีบท 8.2.8 สมบัติเชิงเส้น (Linear property)
ให้ข้อมูลชุด Y ประกอบด้วย $y_1, y_2, ..., y_n$ และข้อมูลชุด X ประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_n$ โดยที่

$y_i = a + bx_i$ เมื่อ $i = 1, 2, ..., n$ และ a, b เป็นค่าคงตัว แล้ว

$$\mu_Y = a + b\,\mu_X$$

เมื่อ μ_X และ μ_Y เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุด X และ Y ตามลำดับ

ตัวอย่าง 8.2.9 ข้อมูลชุด X คือ 9, 15, 10, 9, 12 สัมพันธ์กับชุด Y คือ $y_i = 1 + 2x_i$ จงหา

1. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุด Y โดยเปลี่ยนทุกค่า

2. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุด Y โดยใช้สมบัติเชิงเส้น

ตัวอย่าง 8.2.10 ในการสำรวจน้ำหนักของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งซึ่งมี 3 ห้อง มีจำนวนนักเรียน 44, 46 และ 42 ตามลำดับ ปรากฏว่ามีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 50 กิโลกรัม แต่พบว่าเครื่องชั่งน้ำหนักได้ตัวเลขสูงเกินจริงคนละ 1 กิโลกรัม ดังนั้นค่าเฉลี่ยที่ถูกต้องของน้ำหนักของนักเรียนชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 6 นี้เท่ากับกี่กิโลกรัม

ทฤษฎีบท 8.2.11 ให้ข้อมูลทั้งหมด m ชุดแต่ละชุดมีขนาดเท่ากับ $N_1, N_2, ..., N_m$ และค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_m$ ตามลำดับแล้ว **ค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวม** (combined arithematic mean) ของข้อมมูลทั้งหมดเขียนแทนด้วย $\bar{X}_{\text{com}}$ คือ

$$\bar{X}_{\text{com}} = \frac{N_1\bar{X}_1 + N_2\bar{X}_2 + \cdots + N_m\bar{X}_m}{N_1 + N_2 + \cdots + N_m}$$

ตัวอย่าง 8.2.12 จากการสำรวจรายได้ของอาชีพต่าง ๆ หารายได้เฉลี่ยต่อเดือนของบุคคลากรในอาชีพต่าง ๆ ดังนี้

อาชีพ	จำนวนตัวอย่าง (คน)	รายได้ต่อเดือน (บาท)
ค้าขายออนไลน์	60	25,000
ครูอัตราจ้าง	30	9,000
พนักงานธุรกิจเอกชน	40	27,000
ผู้ปฏิบัติงานในโรงงาน	100	15,000
นักคณิตศาสตร์ประกันภัย	50	45,000

จงหารายได้เฉลี่ยต่อคนต่อเดือน

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ผ่านมาคำนวณจากค่าสังเกตที่มีน้ำหนักเท่ากันทุกค่า แต่ในหัวข้อนี้เราจะกำหนดค่าเฉลี่ยเลขคณิตโดยที่แต่ละค่าสังเกตไม่จำเป็นต้องมีน้ำหนักเท่ากัน เราเรียกค่าเฉลี่ยประเภทนี้ว่า **ค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนัก** (weighted arithematic mean)

บทนิยาม 8.2.13 ให้ $w_1, w_2, ..., w_n$ เป็นน้ำหนักของ $x_1, x_2, ..., x_n$ ตามลำดับ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตแบบถ่วงน้ำหนักคำนวณได้จาก

$$\bar{X}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_nx_n}{w_1 + w_2 + \cdots + w_n}$$

ตัวอย่าง 8.2.14 ถ้าอาจารย์ผู้สอนวิชาสถิติให้น้ำหนักคะแนนสอบกลางภาครวมกับปลายภาคเป็น 3 เท่าของคะแนนสอบย่อยแต่ละครั้ง ถ้านักศึกษาคนหนึ่งมีคะแนนสอบกลางภาค 60 คะแนน คะแนนสอบปลายภาค 80 คะแนน และสอบย่อย 4 ครั้ง คะแนน 8, 9, 4 และ 7 ตามลำดับ จงหาคะแนนเฉลี่ยของนักศึกษาคนนี้

ตัวอย่าง 8.2.15 ผลการสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนายการันย์ในชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เป็นดังนี้

รหัสวิชา	ค4101	ค42101	ค41102	ค41202
จำนวนหน่วยกิต	1	1.5	1	1.5
เกรด	2.5	3	3.5	2

จงหาเกรดเฉลี่ยวิชาคณิตศาสตร์ของนายการันย์

สำหรับข้อมูลที่มีค่าสังเกตเป็นค่าบวกทุกค่าและมีค่าแตกต่างกันมาก ๆ การใช้ค่ากลางของข้อมูลเป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิตจึงไม่เหมาะสม ข้อมูลลักษณะแบบนี้เราจะใช้ค่ากลางของข้อมูลที่เรียกว่า **ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต** (Geometric mean)

บทนิยาม 8.2.16 ให้ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_n$ เมื่อ $x_i > 0$ ทุก ๆ $i = 1, 2, ..., n$ **ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต** เขียนแทนด้วย GM นิยามโดย

$$\text{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot ... \cdot x_n} \qquad \text{หรือ} \qquad \ell\text{og GM} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \ell\text{og} x_i$$

ตัวอย่าง 8.2.17 จากข้อมูลแต่ละข้อต่อไปนี้ จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

1. $1, 2, 2, 4$
2. $1, 3, 243$

ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก (Hamonic mean) เป็นค่ากลางขอข้อมูลที่เหมาะสมสำหรับข้อมูลเฉพาะอย่าง เช่นระยะทางต่อเวลา จำนวนหน่วยต่อเวลา เป็นต้น กล่าวคือข้อมูลลักษณะเป็นอัตราส่วน

บทนิยาม 8.2.18 ให้ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_n$ เมื่อ $x_i > 0$ ทุกๆ $i = 1, 2, ..., n$ **ค่าเฉลี่ยฮาร์โมนิก** เขียนแทนด้วย HM นิยามโดย

$$\text{HM} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}} \qquad \text{หรือ} \qquad \text{HM} = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)^{-1}$$

ตัวอย่าง 8.2.19 อัตราเร็วของรถเด็กเล่นจำนวน 4 คัน คือ 2, 3, 4 และ 6 เมตรต่อวินาที จงหาค่าเฉลี่ยของอัตราเร็วของรถเด็กเล่น

ตัวอย่าง 8.2.20 ในการทำงานอย่างเดียวกันใช้เวลาทำงานนี้เสร็จ 1 ชิ้น ของเด็ก 5 คน ใช้เวลาต่างกันดังนี้

เด็กคนที่	เวลาที่ใช้ทำงาน (วัน)
1	4
2	10
3	6
4	5
5	12

จงหาค่าเฉลี่ยของการทำงานของเด็กทั้ง 5 คน

2. มัธยฐาน (Median)

บทนิยาม 8.2.21 มัธยฐาน (Median) ของข้อมูลชุดหนึ่งคือ ค่าของข้อมูลที่อยู่ตำแหน่งตรงกลาง เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมากหรือมากไปน้อย เขียนแทนด้วย Med

ให้ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_n$ ซึ่ง $x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_n$ แล้ว

$$\text{Med} = \begin{cases} x_{\frac{n+1}{2}} & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ \frac{1}{2}\left[x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right] & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

นั่นคือข้อมูลขนาด n เมื่อเรียงจากน้อยไปมากหรือมากไปน้อย Med จะมีค่าเท่ากับข้อมูลที่อยู่ตำแหน่งของ $\dfrac{n+1}{2}$ ซึ่งเรียกว่าตำแหน่งของมัธยฐาน

ตัวอย่าง 8.2.22 จงหามัธยฐานของข้อมูลต่อไปนี้

1. 3, 1, 5, 6, 6

2. 2, 2, 4, 5, 7, 7, 8, 10

ตัวอย่าง 8.2.23 จากแผนภาพต้น-ใบ ของข้อมูลชุดหนึ่งเป็นดังนี้

2	1	7	9	9		
3	0	1	2	2	5	7
4	2	3	4	5		
6	0	3				

จงหามัธยฐานของข้อมูลชุดนี้

สำหรับข้อมูลที่จัดกลุ่มไว้แล้วที่มีจำนวนข้อมูล N จำนวน จะเป็นข้อมูลที่เรียงลำดับจากน้อยไปมาก ดังนั้นชั้นที่มีมัธยฐานอยู่คือชั้นแรกที่มีความถี่สะสมมากกว่า $\frac{N}{2}$ ซึ่งคำนวณได้โดยการเทียบบัญญัติไตรยางค์ ซึ่งพิจารณาจาก

1. ตำแหน่งของมัธยฐานเท่ากับ $\frac{N}{2}$
2. ตำแหน่งสุดท้ายของชั้นนั้นจะมีค่าเท่ากับขอบเขตจำกัดบนของชั้นนั้นเสมอ
3. ในแต่ละชั้นจะต้องแบ่งช่องของค่าข้อมูลออกเท่า ๆ กันเท่ากับจำนวนความถี่ของชั้นนั้น

ตัวอย่าง 8.2.24 จงหามัธยฐานของข้อมูลต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่ (คน)	ความถี่สะสม
$1-5$	4	4
$6-10$	5	9
$11-15$	4	13
$16-20$	3	16

ทฤษฎีบท 8.2.25 สำหรับข้อมูลที่จัดกลุ่มในรูปตารางแจกแจงความถี่ที่มีขนาด N เมื่อเรียงข้อมูลจากน้อยไปมาก (ชั้นที่มาที่หลังมีค่ามากกว่าชั้นก่อนหน้า) จะได้ว่า

$$\text{Med } = L + \frac{I}{f_M}\left(\frac{N}{2} - \sum f_L\right)$$

L คือขอบเขตจำกัดล่างของชั้นมัธยฐาน

I คือความกว้างของอันตรภาคของชั้นมัธยฐาน

f_M คือความถี่ของชั้นมัธยฐาน

$\sum f_L$ คือความถี่สะสมก่อนถึงชั้นมัธยฐาน

ตัวอย่าง 8.2.26 จงหามัธยฐานของข้อมูลต่อไปนี้

คะแนน	ความถี่ (คน)
$11-14$	3
$15-18$	8
$19-22$	12
$23-26$	7

3. **ฐานนิยม** (Mode)

บทนิยาม 8.2.27 ฐานนิยม (Mode) คือค่าของข้อมูลที่เกิดขึ้นบ่อยที่สุดหรือมีความถี่สูงสุด

ฐานนิยมมักใช้เป็นค่ากลางของข้อมูลเชิงคุณภาพ เขียนแทนฐานนิยมด้วย Mod

ตัวอย่าง 8.2.28 จงหาฐานนิยมของข้อมูลต่อไปนี้

1. $3, 2, 5, 6, 6$

2. $7, 9, 5, 7, 2, 3, 9$

3. $1, 3, 10, 8, 6, 9$

ตัวอย่าง 8.2.29 ข้อมูลชุดที่หนึ่ง 4 จำนวนมีค่ามัธยฐานเท่ากับ 22 ฐานนิยมเท่ากับ 20 และพิสัยเท่ากับ 8 จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับข้อใด

ตัวอย่าง 8.2.30 อายุของเด็ก 10 คน มีพิสัยเท่ากับ 1 และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7.6 โดยมีอายุต่ำสุดในกลุ่มนี้เท่ากับ 7 ปี ถ้าทราบว่าอายุของเด็กทั้ง 10 เป็นจำนวนเต็ม จงหาฐานนิยมของเด็กกลุ่มนี้

ทฤษฎีบท 8.2.31 สำหรับข้อมูลที่จัดกลุ่มในรูปตารางแจกแจงความถี่ที่มีขนาด N ฐานนิยมจะเป็นค่าที่อยู่ในชั้นที่มีความถี่สูงที่สุด จะได้ว่า

$$\text{Mod } = L + I\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

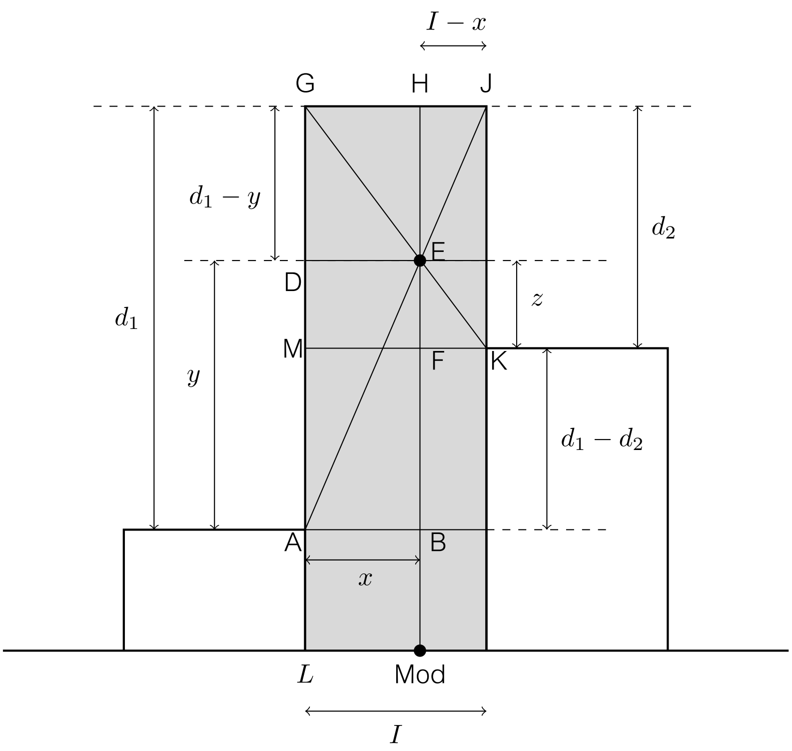
L คือขอบล่างของชั้นฐานนิยม

I คือความกว้างของอันตรภาคของชั้นฐานนิยม

d_1 คือผลต่างของความถี่ชั้นฐานนิยมกับชั้นก่อนชั้นฐานนิยม

d_2 คือผลต่างของความถี่ชั้นฐานนิยมกับชั้นหลังชั้นฐานนิยม

พิจารณาฮิสโทแกรมชั้นที่มีความถี่สูงสุด ดังรูป



ตัวอย่าง 8.2.32 จงหาฐานนิยมของคะแนนสอบย่อยวิชาสถิติ ซึ่งข้อมูลแสดงดังตารางแจกแจงความถี่ต่อไปนี้

คะแนน	จำนวนคน
$10-14$	10
$11-19$	12
$20-24$	15
$25-29$	13
$30-34$	10

แบบฝึกหัด 8.2

1. จากการเลือกตัวอย่างนักเรียนชั้น ม.3 มาจำนวน 20 คน เพื่อคำนวนคะแนนเฉลี่ยของวิชาคณิตศาสตร์ในการสอบ ONET ประจำปีการศึกษา 2560 เพื่อเป็นตัวแทนนักเรียนชั้น ม.3 ทั้งประเทศได้คะแนนดังต่อไปนี้ 45, 50, 51, 36, 24, 60, 90, 97, 100, 64, 23, 81, 77, 66, 64, 25, 50, 50, 60, 49 จงหาค่าเฉลี่ยของคะแนนของตัวอย่างดังกล่าว

2. คะแนนสอบ ONET วิชาวิทยาศาสตร์ ของนักเรียนห้องหนึ่ง แสดงดังแผนภาพต้น-ใบ ดังนี้

2	1	1	1	3	5	7	9	9
4	0	1	2	3	4			
6	2	3	5	6				
9	1	3	6					

จงหาเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม ของคะแนนสอบครั้งนี้

3. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, x_3, ..., x_{50}$ ซึ่ง $\sum_{i=1}^{50}(x_i - 99) = 250$ จงหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนี้

4. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้ 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4,...,10

5. ส่วนสูงของพี่น้อง 2 คน มีพิสัยเท่ากับ 12 เซนติเมตร มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 171 เซนติเมตร จงหาส่วนสูงของพี่และน้อง

6. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ ซึ่ง $\sum_{i=1}^{10} x_i = 30$ และ $\sum_{i=1}^{10}(x_i - 4)^2 = 18$ จงหาค่าของ $\sum_{i=1}^{10}(x_i - \mu)^2$

7. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ ซึ่ง $\sum_{i=1}^{n}(x_i - A)^2 = K$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \mu)^2 = K - n(\mu - A)^2$$

8. จากข้อมูลที่กำหนด จงหา x และ y

กลุ่มข้อมูล	ชุดที่ 1	ชุดที่ 2	ชุดที่ 2	รวมทั้ง 3 ชุด
ค่าเฉลี่ยเลขคณิต	x	25	15	24
จำนวนข้อมูล	30	y	40	100

9. ในการสอบวิชาภาษาไทยของนักเรียน 20 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 12 คะแนน ต่อมาปรากฏว่ากรอกผิดไปสองคนโดยกรอก 10 และ 12 แต่ที่ถูกต้องคือ 20 และ 13 ตามลำดับ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตที่ถูกต้องเท่ากับเท่าใด

10. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของพนักงานบริษัทแห่งหนึ่งเท่ากับ 48.01 กิโลกรัม บริษัทนี้มีพนักงานชาย 43 คนและพนักงานหญิง 57 คน ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักพนักงานหญิงเท่ากับ 45 กิโลกรัม แล้วน้ำหนักเฉลี่ยของพนักงานชายทั้งหมดรวมกันเท่ากับเท่าใด

11. เจ้าของคอกหมูเลี้ยงหมูไว้ 10 ตัว เมื่อนำไปขายปรากฏข้อมูลดังนี้

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	29	33	37	42
จำนวนหมู (ตัว)	1	4	3	2

น้ำหนักเฉลี่ยของหมูในคอกนี้ตัวละกี่กิโลกรัม

12. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, x_3, ..., x_N$ ซึ่ง $\sum_{i=1}^{N} x_i^2 = A$ และ $\sum_{i=1}^{N}(x_i+1)^2 = B$ จงหาค่าเฉลี่ยของข้อมูลชุดนี้ในรูป N, A และ B

13. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตและมัธยฐานของข้อมูลชุดนี้ $x_1, x_2, x_3, ..., x_{1000}$ เมื่อ

$$x_n = \begin{cases} n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคี่} \\ 2n & \text{เมื่อ } n \text{ เป็นจำนวนคู่} \end{cases}$$

14. ในการแข่งขันกีฬามหาวิทยาลัยโลกครั้งที่ 24 ซึ่งประเทศไทยเป็นเจ้าภาพ มีการส่งรายชื่อนักกีฬาจากประเทศไทย 379 คน มีอายุเฉลี่ย 22 ปี ถ้ามีการถอนตัวนักกีฬาไทยออก 4 คน ซึ่งมีอายุ 24, 25, 25 และ 27 ปี และมีการเพิ่มนักกีฬาไทยอีก 5 คน ซึ่งมีอายุเฉลี่ย 17 ปี แล้วอายุเฉลี่ยของนักกีฬาจากประเทศไทยจะเท่ากับเท่าใด

15. จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูล 49, 48, 50, 52, 60, 55, 52, 53 โดยใช้ทฤษฎีบท **??** เมื่อ $A = 50$

16. ให้ข้อมูลทั้งหมด m ชุดแต่ละชุดมีขนาดเท่ากัน และค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{X}_1, \bar{X}_2, ..., \bar{X}_m$ ตามลำดับ จงแสดงว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตรวมของข้อมมูลทั้งหมดเท่ากับ

$$\bar{X}_{\text{com}} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \bar{X}_i}{m}$$

17. กำหนดข้อมูลชุดหนึ่ง $10, \ 3, \ x, \ 6, \ 6$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับมัธยฐาน จงหาค่า x

18. ในการสำรวจน้ำหนักตัว ของนักเรียนในชั้นเรียนที่มีนักเรียน 30 เป็นดังนี้

น้ำหนัก (กิโลกรัม)	ความถี่สะสม (คน)
$30-49$	10
$50-69$	26
$70-89$	30

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักตัวของนักเรียนชั้นเรียนนี้เท่ากับกี่กิโลกรัม

19. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียน 50 มีการแจกแจงความถี่ดังนี้

ช่วงคะแนน	จำนวนนักเรียน (คน)
$1-20$	3
$21-40$	5
$41-60$	13
$61-80$	20
$81-100$	19

ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบนี้เท่ากับเท่าใด

20. จากตารางแจกแจงความถี่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 94.5 อันตรภาคชั้นที่มีความถี่สะสม P มีความถี่เท่ากับเท่าใด

คะแนน	ความถี่สะสม
$100-104$	20
$95-99$	35
$90-94$	45
$85-89$	53
$80-84$	P
$75-79$	60

21. ตารางต่อไปนี้เป็นข้อมูลเกี่ยวกับอายุของพนักงานจำนวน 50 คน

อายุไม่เกิน (ปี)	จำนวน (คน)
25	9
30	17
35	24
40	37
45	43
50	50

ถ้าอายุต่ำสุดของพนักงานคือ 21 ปี แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

22. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 99 จำนวนเรียงจากน้อยไปมากได้เป็น $x_1, x_2, x_3, ..., x_{99}$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้มีค่าเท่ากับมัธยฐาน จงแสดงว่า $\sum_{i=1}^{49} |x_{50} - x_i| = \sum_{i=51}^{99} |x_{50} - x_i|$

23. อายุของเด็กกลุ่มหนึ่ง มีการแจกแจงดังนี้

อายุ (ปี)	จำนวนเด็ก (คน)
$1 - 3$	3
$4 - 6$	a
$7 - 9$	6
$10 - 12$	4

ถ้ามัธยฐานของอายุเด็กคือ 7 ปี แล้ว a มีค่าเท่ากับเท่าใด

24. เมื่อสร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนนักเรียนจำนวน 36 คนโดยใช้ความกว้างของแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วปรากฏว่ามัธยฐานของคะแนนทั้งหมดอยู่ในช่วงคะแนน $50 - 59$ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 คะแนน มีอยู่จำนวน 12 คน และนักเรียนได้คะแนนต่ำกว่า 59.5 มีอยู่จำนวน 20 คน แล้วมัธยฐานของคะแนนสอบครั้งนี้เท่ากับเท่าใด

25. ข้อมูล $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ มีมัธยฐานคือ Med จงพิสูจน์ว่า $\sum_{i=1}^{n} |x_i - \text{Med}|$ มีค่าน้อยที่สุด

26. ข้อมูลชุด X คือ 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 ถ้าข้อมูลชุด Y คือ $y_i = \frac{3x_i - 1}{4}$ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุด Y คือข้อใด

27. ความสัมพันธ์ระหว่างกำไร (y) และราคาทุน (x) ของสินค้าในร้านแห่งหนึ่งเป็นไปตามสมการ $y = 2x - 30$ ถ้าราคาทุนสินค้า 5 ชนิดคือ 31, 34, 35, 36 และ 39 บาท แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของกำไรในการขายสินค้า 5 ชนิดนี้ เท่ากับเท่าใด

28. ชายคนหนึ่งตักปลาที่เลี้ยงไว้ในกระชังเพื่อส่งขายจำนวน 500 ตัว ซึ่งมีน้ำหนักโดยเฉลี่ยตัวละ 700 กรัม ในจำนวนนี้เป็นปลาจากกระชังที่หนึ่ง 300 ตัว และจากกระชังที่สอง 200 ตัว ถ้าปลาในกระชังที่หนึ่งมีน้ำหนักเฉลี่ยต่อตัวมากกว่าในกระชังที่สอง 50 กรัม แล้วเขาตักปลาจากกระชังที่สองมากี่กิโลกรัม

29. อายุเฉลี่ยของคนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 31 ปี ถ้าอายุเฉลี่ยของผู้หญิงในกลุ่มนี้เท่ากับ 35 ปี และอายุเฉลี่ยของผู้ชายกลุ่มนี้เท่ากับ 25 ปี อัตราส่วนระหว่างจำนวนผู้หญิงต่อจำนวนผู้ชายในกลุ่มนี้เท่ากับเท่าใด

30. นักเรียนกลุ่มหนึ่งเป็นนักเรียนชาย m คน เป็นนักเรียนหญิง n คน หาค่าเฉลี่ยเลขคณิตของนักเรียนทั้งหมดได้ x ปี ถ้านักเรียนชายมีอายุเฉลี่ย y ปี แล้วนักเรียนหญิงจะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุเท่ากับเท่าใด

31. จงหาค่าเฉลี่ยเรขาคณิตของข้อมูล 1, 2, 4, 8, ..., 4096 เรียงกันเป็นลำดับเรขาคณิต

32. จงหามัธยฐานของข้อมูล 3, 7, 11, 15, ..., 799 เรียงเป็นลำดับเลขคณิต

33. โรงงานแห่งหนึ่งมีพนักงานจำนวน 40 คน และตารางแจกแจงความถี่สะสมของอายุพนักงานเป็นดังนี้

อายุ (ปี)	ความถี่สะสม
$11-20$	6
$21-30$	14
$31-40$	26
$41-50$	36
$51-60$	40

ถ้าผู้จัดการมีอายุ 48.5 ปี แล้วพนักงานที่มีอายุระหว่างมัธยฐานของพนักงานและอายุของผู้จัดการมีจำนวนประมาณเท่าใด

34. จากสมบัติเชิงเส้น (ทฤษฎีบท 8.2.8) เป็นจริงสำหรับค่าเฉลี่ย คุณคิดว่าจะเป็นจริงสำหรับมัธยฐาน และฐานนิยม หรือไม่เพราะเหตุใด จงยกตัวอย่างและให้เหตุผลประกอบคำตอบ

35. ครอบครัวหนึ่งมีบุตร 4 คน บุตร 2 คนมีน้ำหนักเท่ากันและมีน้ำหนักน้อยกว่าบุตรอีก 2 คน ถ้าน้ำหนักของบุตรทั้ง 4 คนมีค่าฐานนิยม มัธยฐาน และพิสัย เท่ากับ 45, 47.5 และ 7 กิโลกรัม ตามลำดับ แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของน้ำหนักของบุตรทั้ง 4 คน มีค่าเท่ากับเท่าใด

36. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมาก 10, 20, 30, 30, a, b, 60, 60, 90, 120 ถ้าฐานนิยมและมัธยฐานคะแนนชุดนี้เป็น 30 และ 40 ตามลำดับ แล้วข้อมูลชุดต่อไปนี้คือ

$$11,\ 22,\ 33,\ 34,\ a+5,\ b+6,\ 67,\ 68,\ 99,\ 130$$

จงหาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

37. ข้อมูลชุดหนึ่ง 5 จำนวน ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็น 30.8 มัธยฐานเป็น 27 ฐานนิยมเป็น 25 และค่าเฉลี่ยเรขาคณิตเป็น 30 จะได้พิสัยของข้อมูลเป็นเท่าใด

38. เงินเดือนของพนักงาน 50 คนของบริษัทแห่งหนึ่งมีการแจกแจงความถี่ดังนี้

เงินดือน (บาท)	จำนวนพนักงาน (คน)
$10,000-19,999$	5
$20,000-29,999$	10
$30,000-49,999$	25
$50,000-59,999$	10

จงหาค่ามัธฐานและฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้

39. ข้อมูล $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตคือ $\bar{X}$ ถ้า $\sum_{i=1}^{n}(x_i - A) = B$ เมื่อ A, B เป็นค่าคงที่ จงแสดงว่า $\bar{X} = \dfrac{B}{n} + A$

40. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งเป็น 43 คะแนน ถ้าคิดค่าเฉลี่ยคะแนนสอบของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงจะได้เป็น 45 และ 40 คะแนนตามลำดับ จงหาอัตราส่วนระหว่างจำนวนนักเรียนชายและจำนวนนักเรียนหญิง

41. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 6 จำนวนคือ 2, 3, 6, 11, a, b ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 8 และมัธยฐานเท่ากับ 7 แล้ว $|a-b|$ มีค่าเท่าใด

42. สร้างตารางแจกแจงความถี่ของคะแนนการสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง โดยให้ความกว้างแต่ละอันตรภาคชั้นเป็น 10 แล้วปรากฏว่ามัธยฐานของคะแนนสอบเท่ากับ 57 คะแนนซึ่งอยู่ในช่วง $50-59$ ถ้านักเรียนที่สอบได้คะแนนต่ำกว่า 49.5 คะแนนอยู่จำนวน 12 คน และมีนักเรียนได้คะแนนต่ำหว่า 59.5 คะแนนอยู่จำนวน 20 คน จงหาว่านักเรียนกลุ่มนี้มีจำนวนกี่คน

43. กำหนดตารางแจกแจงความถี่แสดงอายุของคนในหมู่บ้านแห่งหนึ่งดังนี้

อายุ (ปี)	$0-9$	$10-19$	$20-29$	$30-39$	$40-49$	$50-59$
จำนวน (คน)	5	10	A	20	10	10

ถ้าอายุเฉลี่ยของคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับ 33.33 ปี แล้วจำนวนคนในหมู่บ้านนี้เท่ากับเท่าใด

44. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบด้วยจำนวน 11, 3, 6, 3, 5, 3, x ให้ S เป็นเซตของ x ที่เป็นไปได้ทั้งหมดซึ่งทำให้ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยมของข้อมูลชุดนี้แตกต่างกันทั้งหมด และในบรรดาค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน และฐานนิยม เหล่านี้นำมาเรียงใหม่จากน้อยไปหามากแล้วเป็นลำดับเลขคณิต จงหาผลบวกของสมาชิกทั้งหมดในเซต S

45. ในการวิจัยในชั้นเรียนเรื่องศึกษาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เรื่องพีทาโกรัสโดยใช้โปรแกรม Geogebra ผู้วิจัยให้นักเรียนทำแบบทดสอบก่อนเรียนและหลังเรียน (คะแนนเต็ม 10 คะแนน) ให้ผลดังนี้

คนที่	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
คะแนนก่อนเรียน	3	4	5	5	2	6	6	7	9	3	4	6
คะแนนหลังเรียน	5	6	4	9	7	8	9	10	10	9	9	8

45.1 จงหาค่าเฉลี่ยของคะแนนก่อนสอบ และหลังสอบ

45.2 จงหาค่าเฉลี่ยของคะแนนผลต่างระหว่างก่อนสอบและหลังสอบ

45.3 จงบอกความสัมพันธ์ของคะแนนเฉลี่ยก่อนสอบ คะแนนเฉลี่ยชหลังสอบ และคะแนนเฉลี่ยผลต่าง

8.3 การวัดการกระจายของข้อมูล

สำหรับข้อมูลเชิงปริมาณเมื่อเรียงลำดับจากน้อยไปมาก เราจะทราบได้ว่าค่าใดมีค่ามากเพียงใดซึ่งระบุด้วยตำแหน่ง แต่ในหัวข้อนี้เราสนใจการแบ่งข้อมูลออกส่วน ๆ เท่ากัน ๆ กัน ที่นิยมใช้กันคือการแบ่งข้อมูลออกเป็น 4, 10 และ 100 ส่วน ที่เรียกว่า ควอไทล์ เดไซล์ และ เปอร์เซ็นต์ไทล์ ประโยชน์ของการแบ่งข้อมูลเพื่ออ้างอิงข้อมูลที่สนใจกับข้อมูลทั้งหมด เช่น นาย ก มีคะแนนสอบคณิตศาสตร์เท่ากับเปอร์เซ็นต์ไทล์ที่ 80 หมายถึงนาย ก ได้คะแนนสูงสุดของกลุ่ม 80% คะแนนต่ำสุด หรือมีนักเรียนที่เขาสอบได้คะแนนน้อยกว่านาย ก อยู่ 80%

บทนิยาม 8.3.1 ควอไทล์ คือค่าของข้อมูลในตำแหน่งของข้อมูลแต่ละส่วนที่เกิดจากการแบ่งข้อมูลออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กันเมื่อเรียงลำดับจากน้อยไปมาก นิยมหาควอไทล์ 3 ตำแหน่ง คือ Q_1 (first quartile หรือ lower quartile), Q_2 (second quartile หรือ median) และ Q_3 (third quartile หรือ upper quartile)

ข้อสังเกต จะเห็นว่า Q_2 เท่ากับค่ามัธยฐานของข้อมูล

ตัวอย่าง 8.3.2 จงหาควอไทล์ทั้ง 3 ตำแหน่งของข้อมูล 2, 2, 3, 3, 5, 6, 9

2	2	3	3	5	6	9

บทนิยาม 8.3.3 เดไซล์ คือค่าของข้อมูลในตำแหน่งของข้อมูลแต่ละส่วนที่เกิดจากการแบ่งข้อมูลออกเป็น 10 ส่วนเท่า ๆ กันเมื่อเรียงลำดับจากน้อยไปมาก เรานิยมหาเดไซล์ 9 ตำแหน่ง คือ D_1, $D_2, D_3, ..., D_9$

ข้อสังเกต จะเห็นว่า $D_5 = Q_2 =$ Med และ D_r หมายถึงมีจำนวนที่น้อยกว่า D_r อยู่ $r \times 10\%$ หรือมากกว่าอยู่ $(100 - 10r)\%$

บทนิยาม 8.3.4 เปอร์เซ็นไทล์ คือค่าของข้อมูลในตำแหน่งของข้อมูลแต่ละส่วนที่เกิดจากการแบ่งข้อมูลออกเป็น 100 ส่วนเท่า ๆ กันเมื่อเรียงลำดับจากน้อยไปมาก เรานิยมหาเปอร์เซ็นไทล์ 99 ตำแหน่ง คือ P_1, $P_2, P_3, ..., P_{99}$

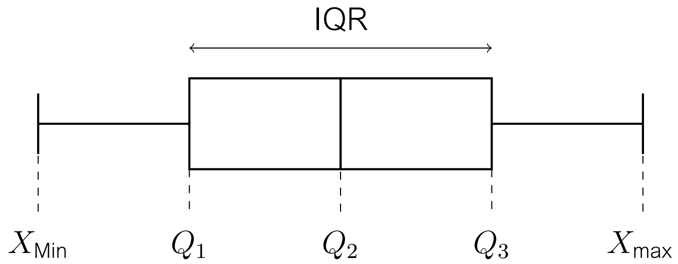
ข้อสังเกต จะเห็นว่า $P_{50} = D_5 = Q_2 =$ Med และ $P_{25} = Q_1$, $P_{75} = Q_3$ โดยที่ P_r หมายถึงมีจำนวนที่น้อยกว่า P_r อยู่ $r\%$ หรือมากกว่าอยู่ $(100 - r)\%$

บทนิยาม 8.3.5 พิสัยควอไทล์ (Inter Quartile Range) ของข้อมูลชุดหนึ่ง เขียนแทนด้วย IQR หมายถึง $Q_3 - Q_1$

แผนภาพกล่อง (Box plot) คือแผนภาพที่แสดงค่าสำคัญ 5 ค่าคือ

$$X_{\text{Min}},\ \ Q_1,\ \ Q_2,\ \ Q_3\ \ \text{และ}\ \ X_{\text{max}}$$

แสดงได้ดังแผนภาพนี้



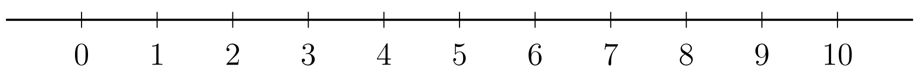
จากการกำหนดค่าดังกล่าวคือการแบ่งข้อมูลทั้งหมดออกเป็น 4 ส่วนเท่า ๆ กันส่วนละ 25% โดยมีเงื่อนไข

1. X_{Min} เป็นค่าต่ำสุดยังไม่ต่ำผิดปกติ ถ้ามีค่าไม่น้อยกว่า $Q_1 - 1.5$IQR
2. X_{max} เป็นค่าสูงสุดยังไม่สูงผิดปกติ ถ้ามีค่าไม่เกินกว่า $Q_3 + 1.5$IQR

และเรียกว่า IQR ว่าความกว้างของกล่อง

ตัวอย่าง 8.3.6 จงสร้างแผนภาพกล่องของข้อมูล 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9

1	2	3	4	5	6	9



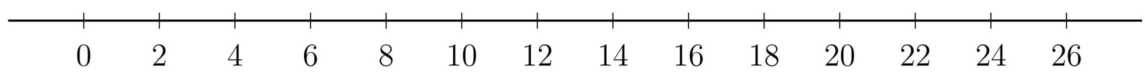
ในกรณีที่มี x เป็นข้อมูลหนึ่งในกลุ่ม ถ้า

$$x < Q_1 - 1.5\text{IQR} \qquad \text{หรือ} \qquad x > Q_3 + 1.5\text{IQR}$$

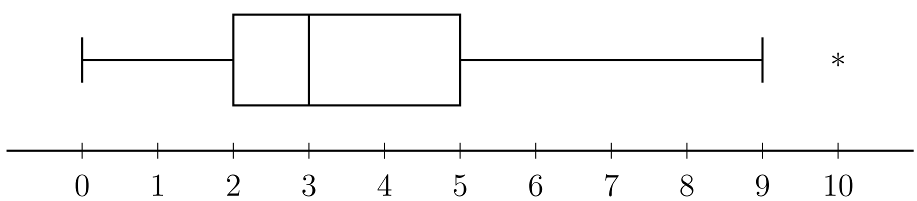
เรียก x ว่า **ค่าผิดปกติ (Outlier)** หรือกล่าวว่า x มีค่า**ต่ำผิดปกติ**หรือ**สูงผิดปกติ** ตามลำดับ ในการสร้างแผนภาพกล่องให้เขียนแทนด้วย $*$ ถ้า x มีค่าต่ำผิดปกติให้ใช้ค่าต่ำสุดตัวแรกที่ไม่ผิดปกติ และถ้า x มีค่าสูงผิดปกติให้ใช้ค่าสูงสุดตัวสุดท้ายที่ไม่ผิดปกติ

ตัวอย่าง 8.3.7 จงสร้างแผนภาพกล่องของข้อมูล 1, 8, 11, 11, 12, 12, 13, 14, 15, 20, 25

1	8	11	11	12	12	13	14	15	20	25



ตัวอย่าง 8.3.8 คะแนนสอบย่อยวิชาแคลคูลัส ๒ ของนักศึกษาจำนวน 30 คน แสดงแผนภาพกล่องได้ดังนี้

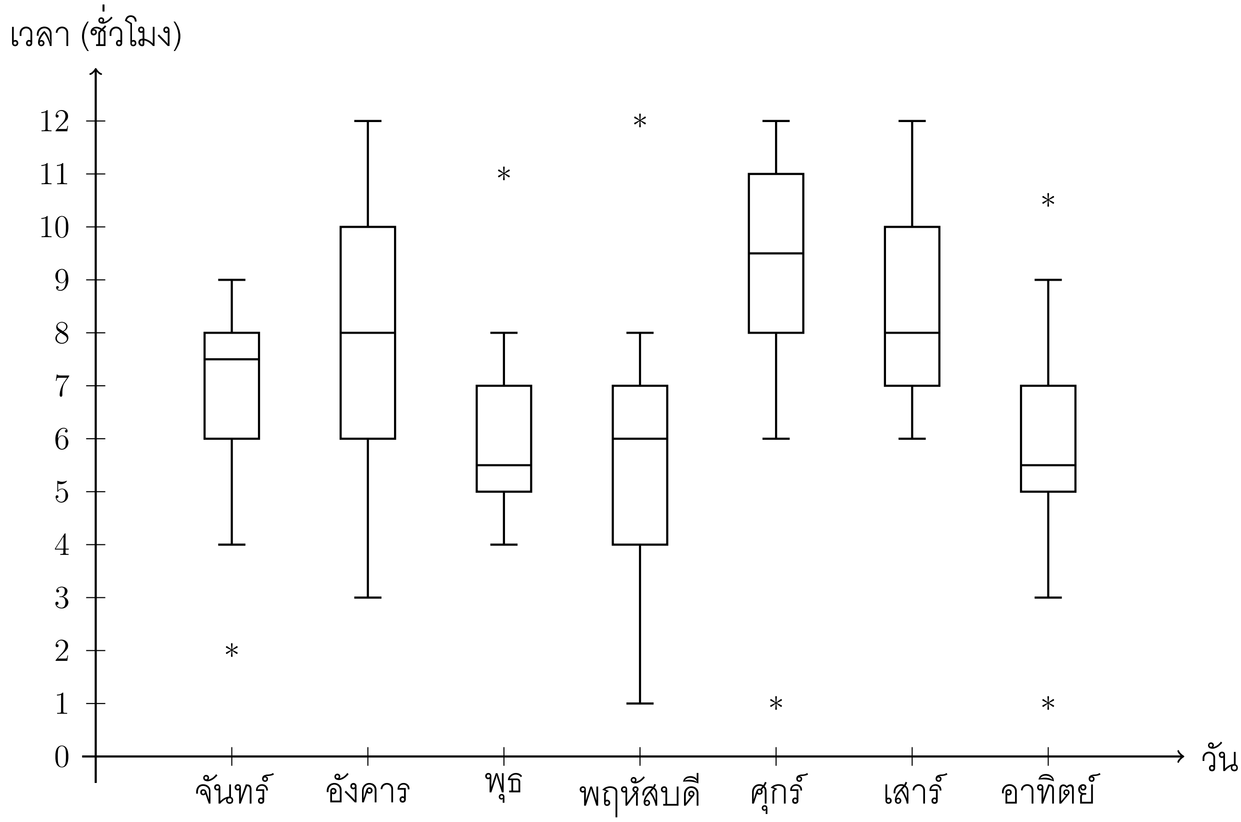


1. จงหาคะแนนต่ำสุดและสูงสุดของการสอบย่อยครั้งนี้

2. จงหาพิสัยควอไทล์

3. ถ้านาย ก อยู่ในกลุ่มนี้ และมีคนได้คะแนนมากกว่านาย ก อยู่ประมาณ 25% แล้วนาย ก มีคะแนนเท่าใด

ตัวอย่าง 8.3.9 ในสถานการณ์โรคระบาดโควิด-19 โรงพยาบาลแห่งหนึ่ง จึงสำรวจเวลา (ชั่วโมง) ของผู้มาใช้บริการโรงพยาบาลในแต่ละวันเพื่อปรับปรุงการให้บริการ แสดงได้ดังนี้



1. ในสัปดาห์นี้ผู้มาใช้บริการโรงพยาบาลที่ใช้เวลานานสุดวันใดบ้าง และเป็นเวลากี่ชั่วโมง

2. ถ้านาย ก และนาย ข ไปใช้บริการโรงพยาบาลแห่งนี้วันอังคารและวันอาทิตย์ตามลำดับ ทั้งคู่ใช้เวลาตรงกับควอไทล์ที่ 3 ของแต่ละวัน ถามว่าใครใช้เวลาในโรงพยาบาลมากกว่ากันและมากกว่าเท่าใด

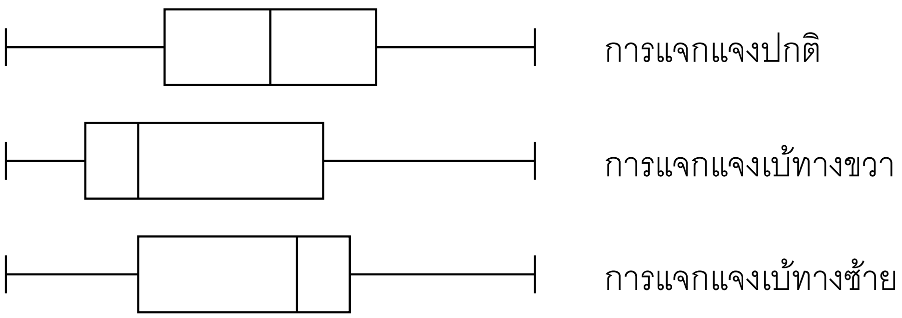
3. จงหาค่าผิดปกติทั้งหมดของการบริการครั้งนี้

แผนภาพกล่องนั้นอาจทำให้บอกถึงลักษณะการกระจายของข้อมูลหรือการแจกแจงของข้อมูลซึ่งมี 3 ชนิดหลัก ๆ คือ

1. การแจกแจงปกติหรือการแจกแจงสมมาตร (Normal or Symmetric distribution)
2. การแจกแจงเบ้ทางขวา (Right-skewed distribution)
3. การแจกแจงเบ้ทางซ้าย (Left-skewed distribution)

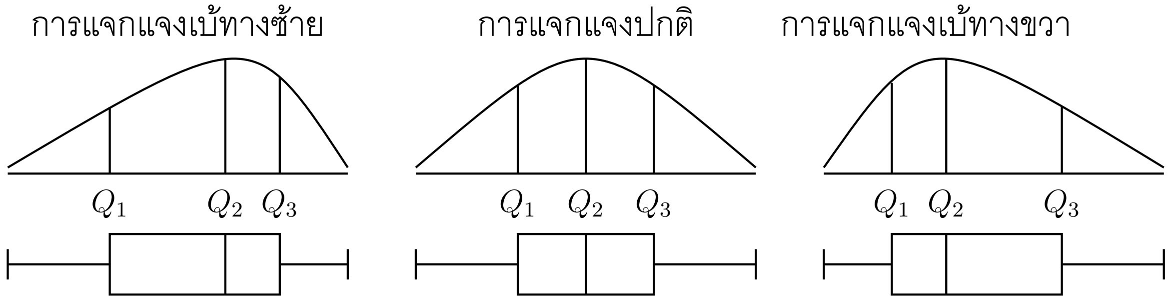
ความสัมพันธ์ของการแจกแจงกับแผนภาพกล่องแสดงได้ดังนี้

รูปที่ 8.2: ความสัมพันธ์ของการแจกแจงกับแผนภาพกล่อง



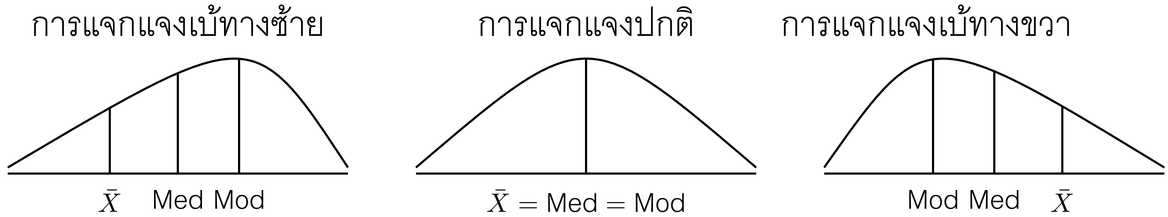
จากรูปที่ 8.2 แผนภาพกล่องที่มีลักษณะสมมาตรจะมีการแจกแจงปกติ แผนภาพกล่องที่มีจำนวนข้อมูลส่วนใหญ่มีค่าน้อยจะมีการแจกแจงเบ้ทางขวา และแผนภาพกล่องที่มีจำนวนข้อมูลส่วนใหญ่มีค่ามากจะมีการแจกแจงเบ้ทางซ้าย และแผนภาพกล่องอาจจะสัมพันธ์กับเส้นโค้งความถี่แสดงได้ดังรูป ต่อไปนี้

รูปที่ 8.3: ความสัมพันธ์ของเส้นโค้งความถี่กับแผนภาพกล่อง



เส้นโค้งความถี่ทั้ง 3 รูปแบบนี้จะสัมพันธ์กับค่ากลาง 3 ค่าคือ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐาน และค่าฐานนิยม แสดงดังรูปต่อไปนี้

รูปที่ 8.4: ความสัมพันธ์ของเส้นโค้งความถี่กับค่ากลางของข้อมูล



การนำเสนอข้อมูลด้วยแผนภาพกล่องก็อาจทำให้ทราบเพียงลักษณะการกระจายเท่านั้นแต่ยังไม่มีค่าบ่งชี้ว่ากระจายมากหรือน้อย ต่อไปนี้จะกล่าวค่าในการวัดการกระจายของข้อมูลทั้งแบบไม่เปรียบกับกลุ่มอื่น และเปรียบเทียบกับกลุ่มอื่น ซึ่งมี 2 แบบคือ การวัดการกระจายสัมบูรณ์ (Absolute Variation) และ การวัดการกระจายสัมพัทธ์ (Relative Variation)

1. การวัดกระจายสัมบูรณ์

การวัดการกระจายสัมบูรณ์ คือการวัดการกระจายของข้อมูลเพียงชุดเดียวเพื่อดูว่าข้อมูลชุดนี้แต่ละค่ามีความแตกต่างกันมากหรือน้อยเพียงใด การวัดการกระจายแบบสัมบูรณ์ไม่สามารถนำไปเปรียบเทียบกับข้อมูลชุดอื่นได้ การวัดการกระจายสัมบูรณ์ที่นิยมใช้มี 4 วิธี คือ

1. พิสัย (Range)
2. ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ (Quartile Deviation)
3. ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย (Mean Deviation)
4. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard Deviation)

พิสัยคือค่าสูงสุดลบค่าต่ำสุดใช้ในการวัดการกระจายของข้อมูลได้ไม่ละเอียดนัก นิยมใช้เมื่อต้องการความรวดเร็วเท่านั้น ข้อเสียของพิสัยของข้อมูลแต่ละชุด คือมีการใช้เฉพาะคะแนนสูงสุดและคะแนนต่ำสุดเท่านั้น บางครั้งทำให้เกิดการเข้าใจถึงลักษณะของข้อมูลผิดไปได้ แต่ก็ใช่ว่าพิสัยจะไม่มีข้อดีเสียเลย ถ้าพิสัยมีค่าน้อยก็อาจคาดได้ว่าข้อมูลส่วนใหญ่ก็ไม่ห่างกันมากนัก เช่น คะแนนสอบย่อยวิชาคณิตศาสตร์ซึ่งมีคะแนนเต็ม 10 คะแนน ถ้าพิสัยมีค่าเท่ากับ 2 คะแนน แสดงว่าคะแนนของนักเรียนต่างกันไม่เกิน 2 คะแนน ยิ่งไปกว่านั้นถ้าพิสัยมีค่าเท่ากับ 0 ก็จะหมายความว่านักเรียนทุกคนได้คะแนนเท่ากันนั่นเอง

ถ้าข้อมูลใดใช้ค่ากลางเป็นมัธยฐานเป็นตัวแทนข้อมูล มักจะนิยมใช้ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เป็นการวัดการกระจายของข้อมูล โดยที่ **ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์** คือครึ่งหนึ่งของพิสัยควอไทล์ เขียนแทนด้วย $Q.D.$ นั่นคือ

$$Q.D. = \frac{\text{IQR}}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

ตัวอย่าง 8.3.10 คะแนนสอบย่อยวิชาแคลคูลัส ๑ ของนักเรียนกลุ่มหนึ่ง ประกอบด้วย 0, 1, 3, 3, 10
จงหาพิสัยและส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ พร้อมเลือกค่าการวัดที่คิดว่าเหมาะสมโดยให้เหตุผลประกอบ

พิสัยและส่วนเบี่ยงควอไทล์นั้นเป็นการวัดที่ใช้ข้อมูลบางส่วนเท่านั้นอาจทำให้เกิดความเข้าใจลักษณะของข้อมูลที่ผิดพลาดไปได้ จึงมีการวัดโดยใช้ทุกข้อมูลเข้ามาเกี่ยวข้องซึ่งอาศัยหลักการที่ว่าถ้าข้อมูลชุดนั้นเหมาะกับค่ากลางที่เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต แล้วจะวัดผลต่างของทุกข้อมูลแล้วหาค่าเฉลี่ยเหล่านั้นเรียกว่า ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และเป็นที่นิยมอย่างมากคือหารากที่สองของค่าเฉลี่ยของผลต่างกำลังสองจะเรียกว่า ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ดังจะกล่าวต่อไปนี้

บทนิยาม 8.3.11 กำหนดให้ประชากรขนาด N คือ $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$ และสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรดังกล่าวมาได้เป็น $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ โดยที่ประชากรและตัวอย่างมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ และ $\bar{X}$ ตามลำดับ

1. **ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย** เขียนแทนด้วย M.D. คือค่านิยามโดย

$$\text{สำหรับตัวอย่าง: } M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{X}|}{n} \qquad \text{สำหรับประชากร: } M.D. = \frac{\sum_{i=1}^{N} |X_i - \mu|}{N}$$

2. **ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน**

   สำหรับตัวอย่าง ให้ S แทนสวนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คำนวณได้จาก

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{X})^2}{n-1}}$$

   สำหรับประชากร ให้ σ แทนสวนเบี่ยงเบนมาตรฐาน คำนวณได้จาก

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (X_i - \mu)^2}{N}}$$

   กำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเรียกว่า **ความแปรปรวน** (Variance) สำหรับตัวอย่างความแปรปรวนคือ S^2 สำหรับประชากรความแปรปรวนคือ σ^2

ตัวอย่าง 8.3.12 จากการสอบถามเวลา (นาที) ในการเดินทางมายังโรงเรียนของนักเรียน 10 คน

30 35 40 45 50 60 60 70 70 90

จงหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน เมื่อ

1. ข้อมูลเป็นประชากร
2. ข้อมูลเป็นตัวอย่าง

ทฤษฎีบท 8.3.13 กำหนดให้ประชากรขนาด N คือ $X_1, X_2, X_3, ..., X_N$ และสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรดังกล่าวมาได้เป็น $x_1, x_2, x_3, ...x_n$ โดยที่ประชากรและตัวอย่างมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ และ $\bar{X}$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\text{สำหรับตัวอย่าง } S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n(\bar{X})^2}{n-1} \quad \text{และ} \quad \text{สำหรับประชากร } \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{N} X_i^2}{N} - \mu^2$$

ตัวอย่าง 8.3.14 ถ้าความยาวรัศมีวงกลม 10 วงมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 3 และมีความแปรปรวนเท่ากับ 5 แล้วผลรวมของพื้นที่วงกลมทั้ง 10 วงนี้มีค่าเท่ากับเท่าใด ถ้าข้อมูลดังกล่าวเป็นประชากร

สำหรับข้อมูลจัดกลุ่ม ในรูปตารางแจกแจงความถี่ที่มีจำนวน k ชั้น แต่ละชั้นมีความถี่ f_i และ X_i เป็นจุดกึ่งกลางของชั้นที่ i เมื่อ $i = 1, 2, ..., k$ จะได้ว่า

สำหรับตัวอย่าง	สำหรับประชากร
$M.D. = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i\|X_i - \bar{X}\|}{n}$	$M.D. = \dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i\|X_i - \mu\|}{N}$
$S = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \bar{X})^2}{n-1}}$	$\sigma = \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{k} f_i(X_i - \mu)^2}{N}}$

ตัวอย่าง 8.3.15 จงหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานและความแปรปรวน ของคะแนนสอบกลางภาคของวิชาภาษาอังกฤษ ซึ่งแสดงดังตารางต่อไปนี้

คะแนน	จำนวนคน
$11-15$	5
$16-20$	4
$21-25$	10
$26-30$	4
$31-35$	5

คะแนน	ความถี่ (f_i)	X_i	f_iX_i	$\|X_i - \mu\|$	$f_i\|X_i - \mu\|$	$(X_i - \mu)^2$	$f_i(X_i - \mu)^2$
$11-15$	5						
$16-20$	4						
$21-25$	10						
$26-30$	4						
$31-35$	5						
รวม							

ทฤษฎีบท 8.3.16 ข้อมูลชุด X คือ $x_1, x_2, , ..., x_n$ และข้อมูลชุด Y คือ $y_1, y_2, , ..., y_n$ ถ้า

$$y_i = ax_i + b \quad \text{เมื่อ} \quad i = 1, 2, ..., n \text{ และ } a, b \text{ เป็นจำนวนจริง}$$

1. สำหรับข้อมูลแบบตัวอย่าง
   ให้ S_X และ S_Y เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด X และ Y ตามลำดับ จะได้ว่า

$$S_Y = |a|S_X \qquad \text{หรือ} \qquad S_Y^2 = a^2 S_X^2$$

2. สำหรับข้อมูลแบบประชากร
   ให้ σ_X และ σ_Y เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุด X และ Y ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\sigma_Y = |a|\sigma_X \qquad \text{หรือ} \qquad \sigma_Y^2 = a^2 \sigma_X^2$$

ตัวอย่าง 8.3.17 ในการทำธุรกิจเล็ก ๆ อย่างหนึ่งในแต่ละวัน ความสัมพันธ์ของต้นทุน X (บาท) และกำไร Y (บาท) เป็นแบบเชิงเส้นคือ

$$y = 1.25x - 500$$

ถ้าสุ่มตัวอย่างการลงทุนมา 5 วัน เป็นเงินลงทุนดังนี้ 500, 550, 650, 700, 1000 บาท จงหาความแปรปรวนของกำไรในการลงทุนครั้งนี้

ตัวอย่าง 8.3.18 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 10 จำนวน คือ $x_1, x_2, x_3, ..., x_{10}$ ซึ่งข้อมูลชุดนี้มีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2.3 ถ้าข้อมูลชุดที่สองคือ

$$3x_1 + 174,\ 3x_2 + 174,\ 3x_3 + 174,\ ..., 3x_{10} + 174$$

แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่สองนี้จะเท่ากับเท่าใด

ทฤษฎีบท 8.3.19 สำหรับข้อมูลแบบประชากร
ข้อมูลชุดที่ 1 มีจำนวน N_1 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ_1 มีความแปรปรวนเท่ากับ σ_1^2
ข้อมูลชุดที่ 2 มีจำนวน N_2 มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ_2 มีความแปรปรวนเท่ากับ σ_2^2
ความแปรปรวนรวมของข้อมูลทั้งสองชุด เขียนแทนด้วย σ_{com}^2

1. ถ้า $\mu_1 = \mu_2$ แล้ว $\sigma_{com}^2 = \dfrac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2}$
2. ถ้า $\mu_1 \neq \mu_2$ แล้ว $\sigma_{com}^2 = \dfrac{N_1\sigma_1^2 + N_2\sigma_2^2}{N_1 + N_2} + N_1N_2\left(\dfrac{\mu_2 - \mu_1}{N_1 + N_2}\right)^2$

ตัวอย่าง 8.3.20 ข้อมูลสรุปของระดับคะแนน (ประชากร) ของนักเรียน 3 ห้อง แสดงได้ดังนี้

ห้อง	จำนวนนักเรียน	ระดับคะแนนเฉลี่ย	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน
ก	20	2.96	0.75
ข	30	3.25	0.50
ค	25	3.25	0.30

1. จงหาความแปรปรวนรวมของห้อง ข และ ค

2. จงหาความแปรปรวนรวมของห้อง ก และ ข

2. การวัดกระจายสัมพัทธ์

การวัดการกระจายสัมพัทธ์ คือการหาค่าเพื่อเปรียบเทียบการกระจายระหว่างข้อมูลมากกว่าหนึ่งชุด โดยใช้อัตราส่วนหรือเปอร์เซ็นต์ การเปรียบเทียบการกระจายของข้อมูลระหว่างชุดที่นิยมใช้มี 4 ชนิดคือ

1. **สัมประสิทธิ์ของพิสัย** (Coefficient of Range)

$$C.R = \frac{X_{\text{max}} - X_{\text{Min}}}{X_{\text{max}} + X_{\text{Min}}}$$

2. **สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์** (Coefficient of Quartile Deviation)

$$C.Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

3. **สัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย** (Coefficient of Mean Deviation)

$$C.M.D.\ \text{สำหรับตัวอย่าง} = \frac{M.D.}{\bar{X}} \quad \text{และ} \quad C.M.D.\ \text{สำหรับประชากร} = \frac{M.D.}{\mu}$$

4. **สัมประสิทธิ์ของการแปรผัน** (Coefficient of Varian)

$$C.V.\ \text{สำหรับตัวอย่าง} = \frac{S}{\bar{X}} \qquad \text{และ} \qquad C.V.\ \text{สำหรับประชากร} = \frac{\sigma}{\mu}$$

ตัวอย่าง 8.3.21 จากการสำรวจสุ่มตัวอย่าง ระยะรอคอย (waiting period) หน่วยเป็นวัน ของประกันโควิด-19 จำนวน 5 บริษัท เป็นดังนี้ 7, 10, 14, 14, 20 จงหาสัมประสิทธิ์ทั้ง 4 ชนิด

ตัวอย่าง 8.3.22 ข้อมูลเกี่ยวกับน้ำหนักของเด็กแรกเกิดของโรงพยาบาลต่างๆดังนี้

โรงพยาบาล	จำนวนนักเรียน	น้ำหนักเฉลี่ย (กรัม)	ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (กรัม)
A	100	2,400	300
B	100	2,500	500
C	200	3,000	300
D	150	2,400	200
E	250	2,800	700

จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. โรงพยาบาลใดมีการกระจายของน้ำหนักเด็กแรกเกิดน้อยที่สุด

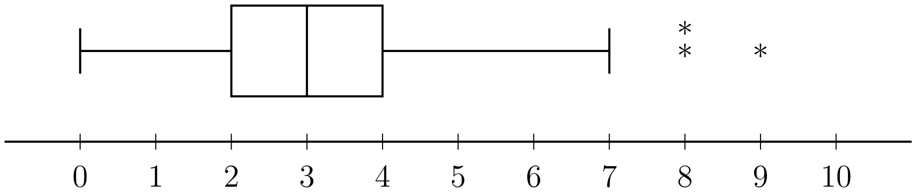
2. โรงพยาบาลใดมีการกระจายของน้ำหนักเด็กแรกเกิดมากที่สุด

ตัวอย่าง 8.3.23 ในการสอบวิชาคณิตศาสตร์พบว่า คะแนนสอบของนักเรียนมีการแจกแจงปกติ ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ 6 สัมประสิทธิ์ควอไทล์เท่ากับ 0.6 คะแนนเฉลี่ยของการสอบครั้งนี้เท่ากับเท่าใด

แบบฝึกหัด 8.3

1. จงสร้างแผนภาพกล่องของคะแนนสอบวิชาสังคม 2 ห้อง (เขียนในแผนภาพเดียวกัน)
   ห้อง ก : $11,\ 12,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 20$
   ห้อง ข : $11,\ 12,\ 13,\ 15,\ 15,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 20,\ 20$

2. ในการสำรวจจำนวนชั่วโมงของนักเรียนที่เรียนเสริมแบบออนไลน์ จำนวน 50 ตัวอย่าง แสดงแผนภาพกล่องได้ดังนี้



   2.1 จงหาวลาที่ใช้เรียนน้อยสุดและมากสุดในการสำรวจครั้งนี้
   2.2 จงหาพิสัยควอไทล์
   2.3 จงหาค่าผิดปกติของแผนภาพกล่อง
   2.4 จำนวนชั่วโมงสูงสุดของ 25% ต่ำสุดของที่เรียนออนไลน์เท่ากับเท่าใด

3. จงหาพิสัยและส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ของข้อมูลต่อไปนี้

คะแนน	จำนวนคน
1	5
2	8
4	10
6	8
10	4

4. จากการสำรวจน้ำหนักของนักเรียนกลุ่มหนึ่งจำนวน 4 คน มี 2 คน น้ำหนักเท่ากันและหนักน้อยกว่าอีก 2 คนที่เหลือ ถ้าฐานนิยม มัธยฐาน และพิสัยของนักเรียน 4 คนนี้คือ 45, 46 และ 6 กิโลกรัม ตามลำดับ แล้วความแปรปรวนของน้ำหนักนักเรียน 4 คนเท่ากับเท่าใด

5. กำหนดตารางแสดงเงินค่าอาหารกลางวันที่นักเรียนห้องหนึ่งได้รับจากผู้ปกครองดังนี้

ค่าอาหารกลางวัน (บาท)	จำนวนนักเรียน (คน)
$50 - 54$	1
$55 - 59$	4
$60 - 64$	5
$65 - 69$	5
$70 - 74$	5

   ค่าเฉลี่ยเลขคณิต ค่ามัธยฐาน และส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ตามลำดับ มีค่าเท่ากับเท่าใด

6. ข้อมูลชุดหนึ่งประกอบไปด้วย $x_1, x_2, , ..., x_N$ จงพิสูจน์ว่า

$$\sigma = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad x_1 = x_2 = ... = x_N$$

เมื่อ σ เป็นส่วนเบี่ยงมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้

7. นักเรียนชั้น ม.5 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งจำนวน 2 ห้อง มีความแปรปรวนของคะแนนสอบทั้งสองนั้นห้องเท่ากับ 12 นักเรียนห้อง ก. มีจำนวน 20 คน คำนวณส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบได้เท่ากับ 3 คะแนน นักเรียนห้อง ข. จะมีจำนวนเท่ากับเท่าใดถ้าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบห้องนี้เท่ากับ 4 คะแนน โดยทั้งสองห้องมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากัน

8. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, .., x_{10}$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{x}$ และข้อมูลชุดที่สองประกอบไปด้วย $y_1, y_2, .., y_{20}$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต $\bar{y}$ โดยที่

$$\sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 160, \quad \sum_{i=1}^{20}(y_i - \bar{y})^2 = 110 \quad \text{และ} \quad \bar{x} = \bar{y}$$

ถ้านำข้อมูลทั้งสองชุดมารวมเป็นชุดเดียวกัน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (ประชากร) ของข้อมูลชุดใหม่เท่ากับเท่าใด

9. จงหาส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน และความแปรปรวน ของข้อมูลต่อไปนี้
ข้อมูลตัวอย่าง : 10, 14, 7, 15, 16, 13, 16
ข้อมูลประชากร : 10, 14, 7, 15, 16, 13, 16

10. จงหาพิสัย ส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ย และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน ของประชากร

คะแนน	ความถี่
$11-20$	4
$21-30$	10
$31-40$	11
$41-50$	5
$51-60$	9
$61-70$	6

11. ข้อมูลชุดหนึ่งเรียงจากน้อยไปหามากดังนี้ $a,\ 3,\ 5,\ 7,\ b$ ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ $2\sqrt{10}$ แล้วค่าของ $2a+b$ มีค่าเท่ากับเท่าใด

12. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 11 จำนวนดังนี้

$$15 \quad 10 \quad 12 \quad 15 \quad 16 \quad x \quad 16 \quad 19 \quad 13 \quad 17 \quad 15$$

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 15 แล้วกำลังสองของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

13. มีข้อมูล 5 จำนวนซึ่งเรียงจากน้อยไปมากคือ $x_1, x_2, , x_3, x_4, x_5$ โดยมี $x_1 = 7$ ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ μ และความแปรปรวนเท่ากับ 16 ถ้ากำหนดตารางแสดงค่า $x_i - \mu$ ดังนี้

i	$x_i - \mu$
1	$7 - \bar{x}$
2	-3
3	-1
4	3
5	6

แล้วค่าของ μ เท่ากับเท่าใด

14. พิจารณาถูกผิดของข้อความต่อไปนี้ พร้อมให้เหตุผล

    14.1 ในการสอบของนักเรียน 3 คน พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบเท่ากับ 80 คะแนน ค่ามัธยฐานเท่ากับ 75 และพิสัยเท่ากับ 25 คะแนน คะแนนของนักเรียนที่ได้คะแนนต่ำสุดเท่ากับ 70 คะแนน

    14.2 ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวนคือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 และข้อมูลชุดที่สองมี 4 จำนวนคือ x_1, x_2, x_3, x_4 โดยที่ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลทั้งสองชุดเท่ากัน ถ้า a และ b เป็นส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้อมูลชุดที่หนึ่งและสองตามลำดับ แล้ว $\dfrac{b}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

15. ข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าสังเกต (x) และร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์ แสดงดังตารางต่อไปนี้

ค่าสังเกต (x)	ร้อยละของความถี่สะสมสัมพัทธ์
1	20
2	40
a	70
6	90
10	100

เมื่อ a เป็นจำนวนจริง ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 4 แล้วความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

16. โรงเรียนอนุบาลแห่งหนึ่งมีนักเรียน 80 คน โดยการแจกแจงอายุของนักเรียนเป็นดังตาราง

อายุ (ปี)	3.5	4	4.5	5	5.5	6
จำนวนนักเรียน (คน)	a	15	10	20	b	5

ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตของอายุนักเรียนมีค่า 4.5 ปี แล้วส่วนเบี่ยงเบนเลี่ยของอายุนักเรียนมีค่าเท่ากับเท่าใด

17. คะแนนสอบของวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนจำนวน 30 คน มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 25 และ 5 คะแนน ตามลำดับ ถ้านำคะแนนของนายสายชลและนางสาวฟ้าซึ่งสอบได้ 20 และ 30 คะแนน ตามลำดับ มารวมด้วย แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานจะเท่ากับเท่าใด

18. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวน และมีมัธยฐานเท่ากับฐานนิยมซึ่งเท่ากับ 15 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 16 ควอไทล์ที่ 1 เท่ากับ 14 และพิสัยเท่ากับ 7 แล้วความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

19. มีนักเรียน 5 คน ร่วมกันบริจาคเงิน ได้เงินรวม 360 บาท ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 660 ถ้ามีนักเรียนอีก 1 คนมาร่วมบริจาคเป็นเงิน 60 บาท ความแปรปรวนจะเพิ่มขึ้นหรือลดลงเท่ากับเท่าใด

20. ตารางต่อไปนี้เป็นคะแนนสอบของวิชาหนึ่งของนักเรียน 40 คน

คะแนน	จำนวนนักเรียน (f_i)
$10-14$	4
$15-19$	6
$20-24$	a
$25-29$	8
$30-34$	4
$35-39$	6

โดยมีคะแนนเฉลี่ย (μ) เท่ากับ 24.5 ถ้าส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์เท่ากับ b และส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ c จงหา $a+b+c$

21. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งประกอบด้วย $x_1, x_2, .., x_n$ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 12 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 3 เมื่อบวกข้อมูลแต่ละจำนวนด้วย 5 ข้อมูลชุดใหม่จะมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับเท่าใด

22. ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 0.12 ส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 แล้วสัมประสิทธิ์ความแปรผันมีค่าเท่ากับเท่าใด

23. เมื่อสองปีก่อน นักเรียนห้องหนึ่งมี 30 คน แบ่งออกได้เป็นสองกลุ่ม กลุ่มที่หนึ่งมี 10 คน ทุกคนมีอายุ 10 ปี กลุ่มที่สองมี 20 คน มีอายุเฉลี่ย 8.5 ปี ถ้าความแปรปรวนของอายุนักเรียนกลุ่มที่สอง เท่ากับ 0 แล้ว ปัจจุบันความแปรปรวนของอายุนักเรียนห้องนี้ เท่ากับเท่าใด

24. กำหนดให้ $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ เป็นข้อมูลชุดหนึ่ง ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6 และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 2 $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$ เป็นข้อมูลชุดที่สอง โดยที่ $y_i = ax_i + b$ เมื่อ $i = 1, 2, 3, ..., n$ และ $a, b \in \mathbb{R}$ และ $a > 0$ ถ้านำข้อมูลทั้งสองชุดมารวมกัน $x_1, x_2, ..., x_n, y_1, y_2, ..., y_n$ พบว่าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 7 และความแปรปรวนเท่ากับ 21 แล้ว $a^2 + b^2$ เท่ากับเท่าใด

25. นำข้อมูล 3 จำนวนที่แตกต่างกันมารวมกันเท่ากับ 195 ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่ามัธยฐานและสัมประสิทธิ์ของพิสัยเท่ากับ 60 และ 0.2 ตามลำดับ แล้วความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้เท่ากับเท่าใด

26. ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิก 6 คน มีอายุเฉลี่ย 34 ปี ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของอายุเท่ากับ 8 ปี อีก 6 ปีต่อมามีญาติสองคนมาขออยู่อาศัยด้วย โดยที่ญาติทั้งสองคนมีอายุเท่ากันเท่ากับค่า

เฉลี่ยของคนทั้งคน 6 คนในครอบครัวนี้พอดี สัมประสิทธิ์การแปรผันของอายุของคนทั้ง 8 คนนี้เท่ากับเท่าใด

27. ถ้าคะแนนสอบคะแนนวิชาสถิติและวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนกลุ่มหนึ่งมีดังนี้

นักเรียนคนที่	1	2	3	4	5
คะแนนสอบวิชาสถิติ	8	5	4	2	1
คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์	9	6	5	3	2

แล้วอัตราส่วนสัมประสิทธิ์ความแปรผันระหว่างของคะแนนสอบวิชาสถิติและคณิตศาสตร์เท่ากับเท่าใด

28. กำหนดข้อมูล 2 ชุดดังนี้ ชุดที่หนึ่งคือ 5, 8, 6, 7, 9 ชุดที่สองคือ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ถ้าส่วนสัมประสิทธิ์ความแปรผันของข้อมูลชุดที่หนึ่งเป็น 2 เท่าของข้อมูลชุดที่สอง และความแปรผันของข้อมูลชุดที่สองเท่ากับ 9 แล้วค่าเฉลี่ยเลขคณิตของข้อมูลชุดที่สองเท่ากับเท่าใด

29. ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบของนักเรียนกลุ่มหนึ่งเท่ากับ 72 คะแนน ความแปรปรวน (ประชากร) เท่ากับ 600 ถ้ามีนักเรียนมาเพิ่มอีก 1 คน ซึ่งสอบได้ 60 คะแนน ทำให้ค่าเฉลี่ยเปลี่ยนไปเป็น 70 คะแนน ความแปรปรวนของข้อมูลชุดใหม่เท่ากับเท่าใด

30. ข้อมูลชุดหนึ่งมี 5 จำนวน มีฐานนิยม มัธยฐาน และค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 15, 16 และ 17 ตามลำดับ ถ้าพิสัยของข้อมูลชุดนี้เท่ากับ 7 จงหาความแปรปรวนของข้อมูลชุดนี้

31. ข้อมูล 7 คนมีค่าแตกต่างกันดังนี้ $9,\ 6,\ 15,\ a,\ 2,\ 4,\ 12$ โดยที่ $2 < a < 12$ ถ้าข้อมูลชุดนี้มีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเป็นสองเท่าของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ จงหาค่าของ a ทั้งหมดที่เป็นไปได้

32. พิจารณาข้อมูลชุดหนึ่งซึ่งเรียงลำดับจากน้อยไปมากดังต่อไปนี้ $8, a, 12, 17, 22, b, 26$ ถ้าค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 17 และควอไทลที่ 1 เท่ากับ 10 แล้วสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนเฉลี่ยและสัมประสิทธิ์ของส่วนเบี่ยงเบนควอไทล์ตามลำดับ เท่ากับเท่าใด

33. ในการสอบชิงทุนการศึกษาที่มีผู้เข้าสอบ 1,000 คน ซึ่งในจำนวนนี้เป็นนักเรียนชายอยู่ 600 คน ปรากฏว่าได้ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของคะแนนสอบนักเรียนชายและหญิงเท่ากันคือ 50 คะแนน แต่ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนสอบของนักเรียนชายและนักเรียนหญิงเท่ากับ 1.5 และ 1 คะแนนตามลำดับ จงหาสัมประสิทธิ์ความแปรผันของคะแนนสอบนักเรียนทั้งหมด

8.4 การแจกแจงปกติและการแจกแจงที

บทนิยาม 8.4.1 ตัวแปรสุ่ม (random variable) คือฟังก์ชันที่มีค่าเป็นจำนวนจริง ซึ่งกำหนดโดยแต่ละสมาชิกในปริภูมิตัวอย่าง

เรามักนิยมใช้ตัวแปร X, Y, Z แทนตัวแปรสุ่ม และ x, y, z แทนค่าของตัวแปรสุ่ม
ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variable) ซึ่งหมายถึงจำนวนค่าของตัวแปรสุ่มมีเป็นจำนวนนับไม่ได้ ปริภูมิตัวอย่างที่มีจุดตัวอย่างเป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องเรียกว่า **ปริภูมิตัวอย่างต่อเนื่อง** (continuous sample space)

บทนิยาม 8.4.2 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องที่มีค่าเป็น $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ ด้วยความน่าจะเป็น $f(x_1), f(x_2), ..., f(x_n), ...$ ตามลำดับ ถ้าเหตุการณ์ A เป็นเซตย่อยของ $\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ จะได้ว่าความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A คือ

$$P(A) = \sum_x f(x) \qquad \text{ทุกค่า } x \text{ ของเหตุการณ์ } A$$

บทนิยาม 8.4.3 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่องใด ๆ กำหนดให้

$$f(x) = P(X = x)$$

โดยที่ $f(x) \geq 0$ และ $\sum\limits_x f(x) = 1$ ทุกค่า x ของ X
เรียก f ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** (probability mass function) เขียนย่อ p.m.f หรือ **การแจกแจงความน่าจะเป็น** (probability distribution) ของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง X

บทนิยาม 8.4.4 เรียก f ว่าเป็น **ฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็น** (probability density function) เขียนย่อว่า p.d.f หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **ฟังก์ชันความน่าจะเป็น** ของตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X ก็ต่อเมื่อ

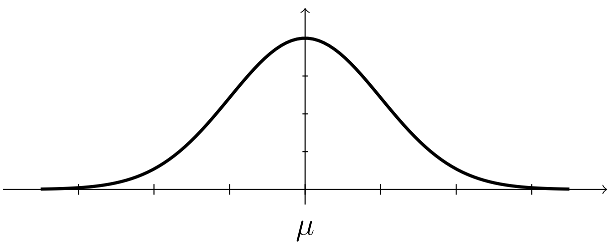
1. $f(x) \geq 0$ ทุก ๆ $x \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3. $\displaystyle P(a < X < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

สำหรับตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง X จะกำหนดให้มีเป็นจำนวนจริงทุกค่า หรือกล่าวได้ว่ามีค่าใน $\mathbb{R}$ หรือในช่วง $(-\infty, \infty)$ และจะเห็นว่า

$$P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a < X < b)$$
$$P(X = c) = P(c \leq X \leq c) = \int_c^c f(x)\,dx = 0$$

การแจกแจงปกติ (normal distribution) หรือเรียกอีกอย่างว่า **การแจกแจงแบบเกาส์** (Gaussian distribution) คือการแจกแจงความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่ส่วนมากจะมีค่าใกล้เคียงค่าเฉลี่ยของตัวแปรเหล่านั้น จะมีค่าของตัวแปรที่มากกว่าหรือน้อยกว่าค่าเฉลี่ยอย่างมากเป็นส่วนน้อย ตัวแปรสุ่มที่ได้จากการแจกแจงนี้เรียกว่า **ตัวแปรสุ่มปกติ** (normal random variable) เขียนแทนด้วย $\mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ ถ้าให้ค่าเฉลี่ยและส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของตัวแปรสุ่มปกติคือ μ และ σ ตามลำดับ ฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสุ่ม $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ เขียนแทนด้วย $n(x; \mu, \sigma^2)$ และ

$$n(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad \text{เมื่อ} \quad x \in \mathbb{R}$$

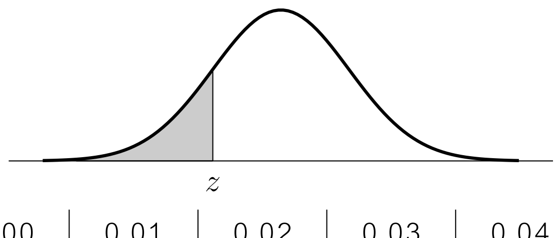


ให้ $X \sim \mathsf{N}(\mu, \sigma^2)$ และให้ $Z = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$ จะได้ว่า Z เป็นตัวแปรสุ่มปกติ นั่นคือ $Z \sim \mathsf{N}(0, 1)$ เรียกการแจกแจง $n(z; 0, 1)$ ว่า **การแจกแจงปกติมาตรฐาน** (standard normal distribution) ดังนั้นตัวแปรสุ่ม X สัมพันธ์กับ Z ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} P(x_1 < X < x_2) &= P\left(\frac{x_1 - \mu}{\sigma} < \frac{X - \mu}{\sigma} < \frac{x_2 - \mu}{\sigma}\right) \\ &= P(z_1 < Z < z_2) \\ &= P(Z < z_2) - P(Z < z_1) \end{aligned}$$

ดังนั้นเราอาจคำนวนค่าความน่าจะเป็นของการแจกแจงปกติ อาศัยการคำนวณจากการแจกแจงปกติมาตรฐาน Z ซึ่งทำได้โดยการเปิดค่าจากตาราง Z ซึ่งบอกค่าพื้นที่ที่หมายถึง $P(Z < z)$ เช่น

ตารางที่ 8.1: ตัวอย่างตาราง z



	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8745
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944

ตัวอย่าง 8.4.5 จงใช้ตาราง Z หาความน่าจะเป็นต่อไปนี้พร้อมวาดกราฟ

1. $P(Z < 1)$
2. $P(Z > 1.1)$
3. $P(1.12 < Z \leq 1.25)$
4. $P(Z < -1)$
5. $P(Z > -1.1)$
6. $P(-1 \leq Z \leq 1.15)$
7. $P(|Z| < 1.1)$
8. $P(|Z| \geq 1.12)$

ตัวอย่าง 8.4.6 จงใช้แอปพลิเคชั่นหา z ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. $P(Z < z) = 0.99$
2. $P(Z > z) = 0.3514$
3. $P(|Z| < z) = 0.95$
4. $P(|Z| > z) = 0.10$

ตัวอย่าง 8.4.7 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มปกติ โดยที่ $\mu = 10$ และ $\sigma = 2$ จงหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้

1. $P(X < 12)$
2. $P(12 < X < 12.3)$

ตัวอย่าง 8.4.8 ถ้า $X \sim \mathsf{N}(\mu = 50, \sigma^2 = 100)$

1. จงหาความน่าจะเป็นที่ X มีค่าระหว่าง 45 และ 62

2. จงหา a ที่ทำให้ $P(X < a) = 0.95$

ตัวอย่าง 8.4.9 แบตเตอรี่ชนิดหนึ่งมีอายุการใช้งานเฉลี่ย 3 ปี และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 0.5 ปี สมมติว่าอายุการใช้งานของแบตเตอรี่ชนิดนี้มีการแจกแจงปกติ จงหาความน่าจะเป็นที่แบตเตอรี่จะมีอายุน้อยกว่า 2 ปี

ตัวอย่าง 8.4.10 อายุของหลอดไฟชนิดหนึ่งมีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 800 ชั่วโมง และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 40 ชั่วโมง จงหาความน่าจะเป็นที่หลอดไฟชนิดนี้จะมีอายุการใช้งานระหว่าง 778 และ 834 ชั่วโมง

ตัวอย่าง 8.4.11 คะแนนเฉลี่ยของวิชาวิทยาศาสตร์ ONET ระดับประถมศึกษาปีที่ 6 ของโรงเรียนแห่งหนึ่งเท่ากับ 40 คะแนน และมีส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 10 คะแนน สมมติว่าคะแนนมีการแจกแจงปกติ ถ้านักเรียนที่เข้าสอบมีจำนวน 500 คน มีนักเรียนประมาณกี่คนที่สอบได้คะแนนมากกว่า 55 คะแนน

ตัวอย่าง 8.4.12 คะแนนสอบของวิชาแคลคูลัสที่มีการแจกแจงปกติ มีคะแนนเฉลี่ยเท่ากับ 60 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 15 คะแนน ถ้าผู้สอนจะให้เกรด A แก่นักศึกษาที่สอบได้คะแนนสูงสุด 5% ของห้อง อยากทราบว่านักศึกษาจะต้องได้คะแนนอย่างน้อยเท่าใดจึงจะได้เกรด A

ตัวอย่าง 8.4.13 ผลผลิตของข้าวโพดที่ดินทั้งหมด 1000 ไร่ มีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 20.50 ถังต่อไร่ จากการสำรวจพบว่ามีอยู่ 200 ไร่ ที่ให้ผลผลิตไม่มากกว่า 17.75 ถังต่อไร่ จงหาส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของข้าวโพดเหล่านี้

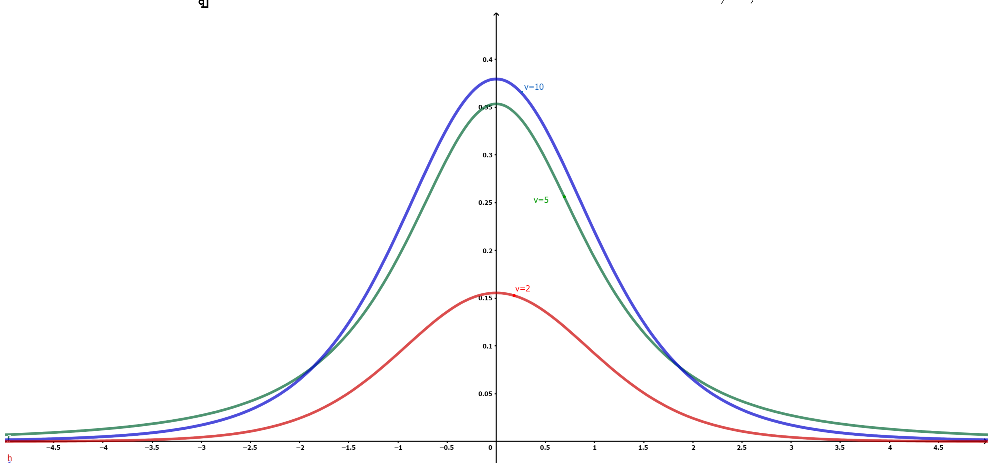
การแจกแจงที

การแจกแจงของตัวแปรสุ่มที เขียนแทนด้วย $t(\nu)$ มีองศาเสรีเป็น ν นิยามฟังก์ชันความน่าจะเป็นคือ

$$h(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} \qquad \text{เมื่อ } t \in \mathbb{R}$$

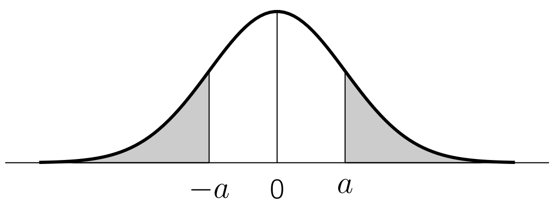
เมื่อ Γ คือ**ฟังก์ชันแกมมา (gamma function)** นิยามโดย $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt$ เมื่อ $x > 0$ เรียกว่า **การแจกแจงสติวเดนท์ที (Student's t-distribution)** เรียกย่อ ๆ ว่า **การแจกแจงที** ตามชื่อผู้คิดค้นคือ วิลเลียม กอสเสต (William Sealey Gosset, 1876-1937) โดยใช้ชื่อในการตีพิมพ์ว่า Student เนื่องจากขณะนั้นเขาทำงานในโรงงานต้มกลั่นของพวกไอริช ซึ่งห้ามเจ้าหน้าที่โรงงานพิมพ์เผยแพร่ผลงานวิจัย

รูปที่ 8.5: กราฟการแจกแจงที เมื่อ $\nu = 2, 5, 10$



จะได้ว่าค่าเฉลี่ย $\mu = 0$ และค่าความแปรปรวน $\sigma^2 = \dfrac{\nu}{\nu-2}$ เมื่อ $\nu \geq 3$

จะเห็นได้ว่าการแจกแจงทีคล้ายกับการแจกแจงปกติ โดยเมื่อ n มีค่ามากพอการแจกแจงทีจะเป็นการแจกแจงปกติ พิจารณาจากกราฟจะเห็นว่าเป็นแบบสมมาตร ถ้า $a > 0$ จะได้ว่า



$$\begin{aligned}
P(T > a) &= P(T < -a) \\
P(|T| < a) &= 1 - 2P(T > a) = 1 - 2P(T < -a) \\
P(|T| > a) &= 2P(T > a)
\end{aligned}$$

จากฟังก์ชันความน่าจะเป็นของทีมีความยุ่งยากในการหาความน่าเป็น เราอาจหาค่าโดยวิธีอื่น เช่น ใช้ตารางที และ ใช้แอปพลิเคชัน เป็นต้น

การใช้ตารางที

ตางรางทีจะแสดงพื้นที่ด้านขวามือ นั่นคือ $P(T > a)$ ซึ่งมักเขียนแทนด้วย

$t_{\alpha,\nu}$ หรือ t_α เป็นค่าที่ทำให้ $P(T > t_\alpha) = \alpha$

ตารางที่ 8.2: ตัวอย่างตารางที

	α				
ν	0.10	0.05	0.025	0.01	0.005
1	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032

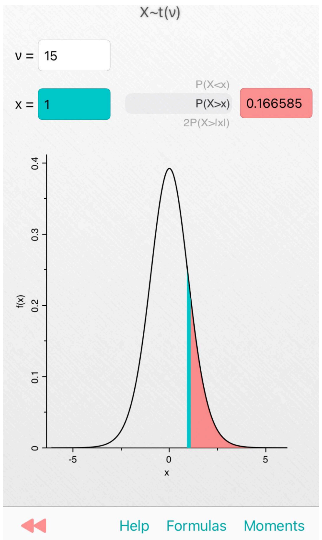
ตัวอย่าง 8.4.14 จากตาราง 8.2 จงหาค่าต่อไปนี้

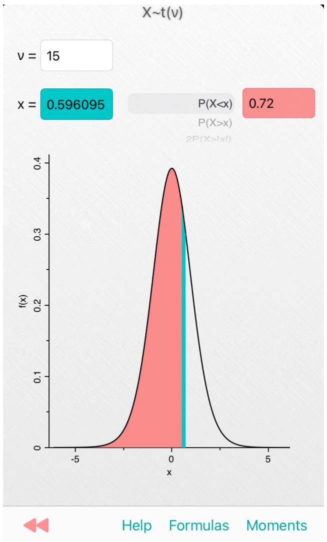
1. $t_{0.05,4}$
2. $t_{0.99,2}$
3. $P(T > t_{0.01,3})$
4. $P(T < t_{0.95,5})$
5. $P(T > 1.533)$ เมื่อ $\nu = 4$
6. $P(|T| < 4.541)$ เมื่อ $\nu = 3$
7. a ซึ่ง $P(|T| < a) = 0.90$ เมื่อ $\nu = 5$
8. a ซึ่ง $P(|T| > a) = 0.05$ เมื่อ $\nu = 4$

การใช้แอปพลิเคชัน

สำหรับ $X \sim t(\nu)$ ขอยกตัวอย่างการใช้แอปพลิเคชัน **Probability Distribution** ทำได้ 2 ลักษณะคือ การหาพื้นที่ใต้กราฟเมื่อกำหนดค่า t_α และหาค่า t_α เมื่อกำหนดพื้นที่ใต้กราฟมาให้
เช่นถ้า $X \sim t(15)$ จงหาค่า $P(X > 1)$ และ a เมื่อ $P(X < a) = 0.72$

รูปที่ 8.6: ตัวอย่างการใช้แอปพลิเคชัน Probability Distribution ในการแจกแจงที

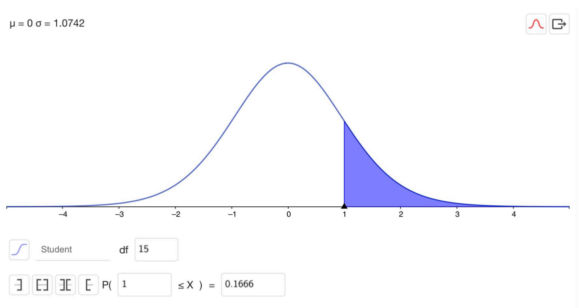


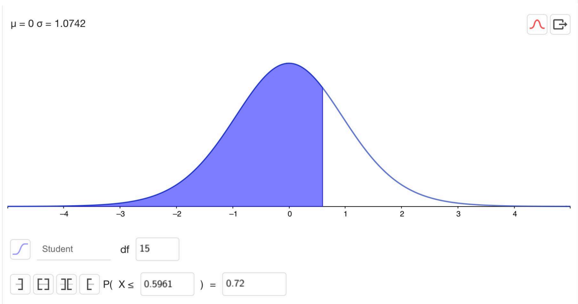


จะได้ว่า $P(X > 1) =$ และ $a =$
อาจเลือกใช้แอปพลิเคชัน **Geogebra Classic** ทำได้โดยกด ≡ จากนั้น

View → Probability Calculator → Distribution → Student

รูปที่ 8.7: ตัวอย่างการใช้แอปพลิเคชัน Geogebra Classic ในการแจกแจงที





ตัวอย่าง 8.4.15 ให้ $t(\nu)$ เป็นการแจกแจงทีที่มีองศาเสรี ν จงใช้แอปพลิเคชั่นหาค่าต่อไปนี้

1. $P(T < 3.15)$ เมื่อ $\nu = 7$

2. $P(T > 2)$ เมื่อ $\nu = 10$

3. $P(T < -2.5)$ เมื่อ $\nu = 9$

4. $P(|T| < 3)$ เมื่อ $\nu = 15$

5. จงหา a ซึ่ง $P(T < a) = 0.75$ เมื่อ $\nu = 11$

6. จงหา a ซึ่ง $P(|T| < a) = 0.75$ เมื่อ $\nu = 11$

ในการสุ่มตัวอย่างขนาด n จากประชากรที่มีการแจกแจงปกติ $n(x;\mu,\sigma^2)$ ด้วยค่าเฉลี่ย μ

เมื่อ**ไม่ทราบความแปรปรวน** σ^2 เราจะประมาณค่าความแปรปรวนตัวอย่าง S^2 จะได้

$$T = \frac{X-\mu}{S} \quad \text{มีการแจกแจงแบบที ที่องศาเสรี } n-1$$

ตัวอย่าง 8.4.16 ถ้าทราบน้ำหนักของลำไยกระป๋องยี่ห้อหนึ่งมีการแจกแจงแบบปกติที่มีน้ำหนักเฉลี่ย 135 กรัม ถ้าสุ่มลำไยกระป๋องยี่ห้อนี้มา 12 กระป๋อง แล้วชั่งน้ำหนักแต่ละกระป๋อง คำนวณหาค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของลำไยกระป๋องตัวอย่าง 10 กรัม ถ้าเลือกลำไยกระป๋องมา 1 กระป๋อง จากกลุ่มตัวอย่าง 12 กระป๋องข้างต้น จงหาความน่าจะเป็นที่ลำไยกระป๋องนั้นจะมีน้ำหนักมากกว่า 149 กรัม

แบบฝึกหัด 8.4

1. จงใช้ตาราง Z หรือแอปพลิเคชั่นหาความน่าจะเป็นต่อไปนี้พร้อมวาดกราฟ

   1.1 $P(Z < -1)$
   1.2 $P(Z > 2)$
   1.3 $P(-1.3 < Z \leq 2.3)$
   1.4 $P(Z < -1.15)$
   1.5 $P(-1 < Z < 3)$
   1.6 $P(Z > -1.1)$
   1.7 $P(|Z| > 1.16)$
   1.8 $P(|Z| < 2.5)$
   1.9 $P(1 < |Z| < 2)$
   1.10 $P(|Z - 1| < 1.5)$

2. จาก N$(\mu = 40, \sigma^2 = 36)$ จงหา

   2.1 $P(X < 32)$
   2.2 $P(X > 27)$
   2.3 a ซึ่ง $P(X > a) = 0.1539$
   2.4 a ซึ่ง $P(X < a) = 0.2578$

3. จงหาค่าต่อไปนี้ โดยใช้ตารางแจกแจงที

   3.1 $t_{0.95,9}$
   3.2 $t_{0.05,12}$
   3.3 จงหา a ที่ทำให้ $P(|T| < a) = 0.95$ ถ้าองศาเสรีเท่ากับ 18

4. ให้ $t(\nu)$ เป็นการแจกแจงทีที่มีองศาเสรี ν จงใช้แอปพลิเคชั่นหาค่าต่อไปนี้

   4.1 $P(T < 4)$ เมื่อ $\nu = 8$
   4.2 $P(T > 5)$ เมื่อ $\nu = 9$
   4.3 $P(T < -1.5)$ เมื่อ $\nu = 10$
   4.4 $P(|T| < 2)$ เมื่อ $\nu = 13$
   4.5 $P(|T| > 3)$ เมื่อ $\nu = 14$
   4.6 จงหา a ซึ่ง $P(T < a) = 0.85$ เมื่อ $\nu = 19$
   4.7 จงหา a ซึ่ง $P(|T| < a) = 0.85$ เมื่อ $\nu = 19$
   4.8 จงหา a ซึ่ง $P(|T| > a) = 0.05$ เมื่อ $\nu = 21$

5. ในการแจกแจงที จงหาค่า k ที่ทำให้ $P(|T| < k) = 0.9$ ที่องศาเสรี 23

6. คะแนนสอบของนักเรียนจำนวน 1000 คน มีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 150 คะแนน และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 20 คะแนน

   6.1 จำนวนคนที่ได้คะแนนมากกว่า 160
   6.2 จำนวนคนที่ได้คะแนนอยู่ระหว่าง 120 และ 140

6.3 คนที่ได้คะแนน 180 คะแนน อยู่เปอร์เซนต์ที่เท่าใด

6.4 มีคนที่ได้คะแนนมากกว่า 170 คะแนน อยู่กี่คน

6.5 คนที่คะแนนต่ำสุดของ 15% สูงสุด

7. ถ้าอายุการใช้งานของเครื่องซักผ้ายี่ห้อ A มีการแจกแจงแบบปกติด้วยค่าเฉลี่ย 5.10 ปี และส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเป็น 1.54 ปี ถ้าเครื่องซักผ้ายี่ห้อ A รับประกันไว้ 2 ปี จงหาโอกาสที่เครื่องซักผ้ายี่ห้อ A จะเสียในช่วงเวลาที่รับประกัน

8. ถ้าเชื่อกันว่าอัตราผลตอบแทนของการลงทุนมีการแจกแจงปกติซึ่งมีค่าเฉลี่ย 20% ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 3% จงหาความน่าจะเป็นที่อัตราผลตอบแทนจะ

8.1 มากกว่า 26% หรือน้อยกว่า 14%

8.2 อย่างน้อย 6%

8.3 มากกว่า 28.5%

9. เส้นผ่านศูนย์กลางส่วนในวงแหวนมีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 4.00 นิ้ว ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 0.01 นิ้ว

9.1 จงหาสัดส่วนของวงแหวนที่มีเส้นผ่านศูนย์กลางส่วนในมากกว่า 4.025 นิ้ว

9.2 จงหาความน่าจะเป็นวงแหวนเหล่านี้มีเส้นผ่านศูนย์กลางส่วนในอยู่ระหว่าง 3.99 และ 4.01 นิ้ว

9.3 เส้นผ่านศูนย์กลางส่วนในที่มีวงแหวนอยู่ 15% ต่ำกว่าค่าใด

10. ถ้าคะแนนสอบวิชาสถิติมีการแจกแจงปกติ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 74 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 7.9

10.1 ถ้านักศึกษาสอบได้ F คิดเป็น 10% จากทั้งหมด คะแนนต่ำสุดของนักศึกษาที่ไม่ได้ F เท่ากับเท่าใด

10.2 คะแนนสูงสุดสำหรับเกรด B ถ้านักศึกษาที่สอบได้คะแนนรวม 5% ได้เกรด A

11. คะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนักเรียนห้องหนึ่งมีการแจกแจงปกติ นาย ก และ นาย ข เป็นนักเรียนในห้องนี้ ถ้ามีนักเรียนในห้องนี้ร้อยละ 9.48 สอบได้คะแนนมากกว่าคะแนนสอบของนาย ก มีนักเรียนร้อยละ 10.64 สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของนาย ข และนาย ข สอบได้คะแนนน้อยกว่าคะแนนสอบของนาย ก อยู่ 51 คะแนน แล้วส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานของคะแนนครั้งนี้เท่ากับเท่าใด

12. บริษัทผลิตหลอดไฟต้องการรับประกันคุณภาพผลิตภัณฑ์ของบริษัท โดยจะเปลี่ยนหลอดไฟใหม่ถ้าหลอดเดิมชำรุดบริษัทจะรับประกันไม่เกิน 4.1% ของจำนวนที่ผลิต หลอดไฟมีอายุการใช้งานเฉลี่ย 2500 ชั่วโมง มีสัมประสิทธิ์ของความแปรผันเท่ากับ 0.2 ถ้าคาดว่าตามปกติคนจะใช้หลอดไฟวันละ 5 ชั่วโมง บริษัทนี้ควรกำหนดเวลาประกันมากที่สุดกี่วัน

13. กำหนดให้ข้อมูลชุดหนึ่งมีการแจกแจงปกติ ถ้าหยิบข้อมูล x และ y จากข้อมูลชุดนี้มาพิจารณา พบว่า 13.14% ของข้อมูลมีค่ามากกว่า x และ x มากกว่า y อยู่ 2% ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน แล้วจำนวนข้อมูล (คิดเป็นเปอร์เซ็นต์) ที่มีค่าน้อยกว่า y เท่ากับเท่าใด

14. น้ำหนักและส่วนสูงของนักเรียนห้องหนึ่งต่างมีการแจกแจงปกติ โดยมีน้ำหนักเฉลี่ย 40 กิโลกรัม ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 2 กิโลกรัม ส่วนสูงเฉลี่ย 150 เซนติเมตร ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 4 เซนติเมตร ถ้ามีนักเรียน a เปอร์เซ็นต์ที่สูงไม่ต่ำกว่า 125 เซนติเมตร และไม่เกิน 155 เซนติเมตร คือกลุ่มนักเรียนที่มีน้ำหนักไม่ต่ำกว่า 36 กิโลกรัมและไม่เกิน b กิโลกรัม จงหาค่าของ a และ b

15. ในการสอบวิชาแคลคูลัสครั้งหนึ่งให้คะแนนไว้เป็นจำนวนเต็ม คะแนนเหล่านี้มีการแจกแจงปกติโดยประมาณ ค่าเฉลี่ยเลขคณิต 82 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน 5 นักศึกษา 8 คน สอบได้คะแนนตั้งแต่ 88 ถึง 94 ได้เกรด B จงหาจำนวนนักศึกษาที่เข้าสอบวิชานี้

16. ไอคิวของผู้สมัครเข้าเรียนของมหาวิทยาลัยแห่งหนึ่งมีการแจกแจงปกติ มีค่าเฉลี่ยเลขคณิต 115 ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานเท่ากับ 12 ถ้ามหาวิทยาลัยที่ต้องการผู้มีไอคิวอย่างต่ำที่สุด 95 จะมีผู้สมัครจำนวนเท่าใดที่ไม่ได้เข้าไปเนื่องจากเหตุนี้และไม่พิจารณาคุณสมบัติอื่น

17. ถ้าทราบว่าน้ำหนักของคนไทยที่อายุ 20 ปี มีการแจกแจงปกติที่มีค่าเฉลี่ย 47 กิโลกรัม ถ้าสุ่มตัวอย่างคนไทยที่มีอายุ 20 ปีมา 10 คน แล้วชั่งน้ำหนักและคำนวณค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานได้ 5.4 กิโลกรัม ถ้าสุ่มคนไทยมา 1 คนจากกลุ่มนี้ จงหาความน่าจะเป็นที่คนที่สุ่มได้จะมีน้ำหนักมากกว่า 50 กิโลกรัม

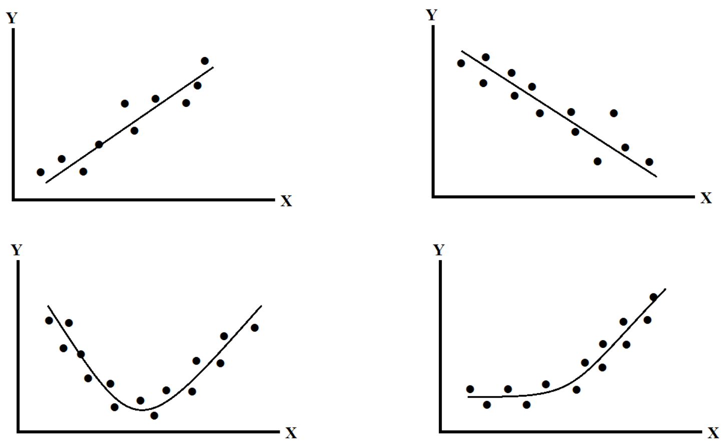
8.5 สมการถดถอย

ในทางสถิติตัวแปรที่เกิดจากการทดลองหรือสำรวจ อาจได้จากการวัดมากกว่าหนึ่งชนิด เช่น ส่วนสูง อายุ น้ำหนัก เป็นต้น เมื่อพบว่าตัวแปรที่ได้จากทดลองหรือสำรวจมี 2 ตัวขึ้นไปจึงเกิดความสนใจว่า ตัวแปรเหล่านั้นมีความสัมพันธ์กันหรือไม่ ถ้าสัมพันธ์กันจะอยู่ในรูปใด การศึกษานี้เราเรียกว่า **การวิเคราะห์การถดถอย** (Regression Analysis) ในบทนี้เราจะกล่าวเฉพาะตัวแปร 2 ตัวแปรที่เกี่ยวกับ **การถดถอยเชิงเส้นเชิงเดียว** (Simple linear regression)

ในการสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรที่ทราบค่าเรียกว่าตัวแปรอิสระ (Indepedent variation) หรือเรียกว่าตัวพยากรณ์ (Predictor) นิยมใช้สัญลักษณ์ X ซึ่งสามารถนำมาพยากรณ์ค่าของตัวแปรอีกตัวหนึ่งได้ เรียกว่า ตัวแปรตาม (Depedent variation) ใช้สัญลักษณ์ Y ในการสร้างความสัมพันธ์ของตัวแปรเหล่านั้น ขั้นแรกคือการรวบรวมข้อมูลที่ต้องการพิจารณา เช่น

ข้อมูลชุด X ประกอบด้วย $x_1, x_2, ..., x_n$ และ ข้อมูลชุด Y ประกอบด้วย $y_1, y_2, ..., y_n$

ขั้นต่อไปนำจุด $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ ไปเขียนกราฟจะได้การกระจายของของจุดบนกราฟเรียกว่า แผนภาพกระจาย (Scatter diagram) จากแผนภาพการกระจายจะมองเห็น แน้วโน้ม (Trend) ซึ่งอาจจะเส้นตรงหรือเส้นโค้งแบบต่าง ๆ ถ้าเป็นเส้นตรงเรียกว่า ความสัมพันธ์เชิงเส้น (Linear relationship) ถ้าไม่เป็นเส้นตรงเรียกว่า ความสัมพันธ์ไม่เชิงเส้น (Non-linear relationship)



สำหรับความสัมพันธ์ที่ไม่เชิงเส้นเราจะหาสมการเพื่อประมาณเส้นโค้งที่เหมาะสมกับข้อมูลที่กำหนดให้ โดยทั่วไปเรียกว่า การปรับเส้นโค้ง (Curve fitting)

การพยากรณ์ตัวเลขในอนาคตที่อ่านค่าจากแนวโน้มที่ได้จากข้อมูลในอดีตจะเป็นประโยชน์ในด้านต่าง ๆ แม้ว่าค่าจะผิดพลาดไปจากค่าจริงที่ควรจะเป็น ก็ยังดีกว่าเราไม่ทราบอะไรเลย
สมการของ**การถดถอยเชิงเส้น**ของประชากรเป็น

$$\tilde{y} = \alpha + \beta x$$

เมื่อ α และ β เป็นพารามิเตอร์เรียกว่า **สัมประสิทธิ์การถดถอย** (regression coefficients) ให้สมการการถดถอยของตัวอย่างเป็น

$$\hat{y} = a + bx$$

เมื่อ a และ b เป็นค่าประมาณของ α และ β ตามลำดับ และ $\hat{y}$ เป็นค่าประมาณของ $\tilde{y}$

ให้ข้อมูลอยู่ในรูป $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ สำหรับประชากรจะได้ว่า

$$Y_i = \alpha + \beta x_i + E_i$$

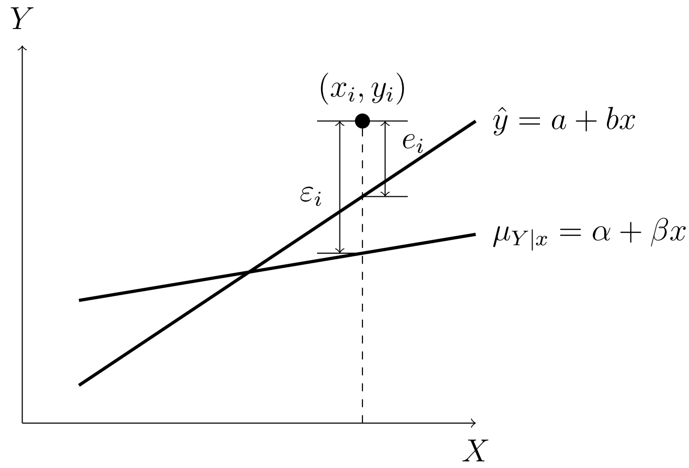
เมื่อตัวแปรสุ่ม E_i คือความผิดพลาดที่มีค่าเฉลี่ยเป็นศูนย์ แต่ละคู่ (x_i, y_i) จะสอดคล้องสมการ

$$y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$$

ในทำนองเดียวกันสมการถดถอยเชิงเส้นที่ประมาณจากตัวอย่างเป็น $\hat{y} = a + bx$ จะได้ว่าแต่ละคู่สอดคล้องสมการ

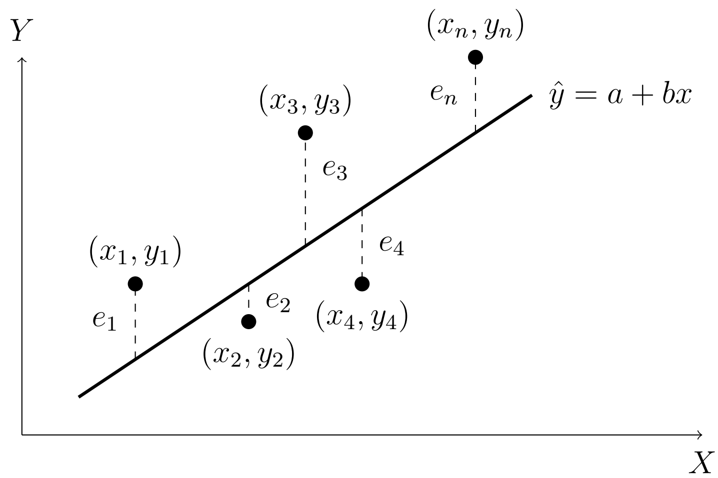
$$y_i = a + bx_i + e_i$$

เรียก e_i ว่า **ส่วนเหลือ** (residual)



จากนี้เราจะประมาณค่าสัมประสิทธิ์ของการถดถอยด้วย **วิธีกำลังสองน้อยสุด** (Least Squares Method) จะได้เส้นถดถอยของข้อมูลที่ดีเพราะวิธีนี้ เป็นการเฉลี่ยค่าความคลาดเคลื่อนของข้อมูลให้มีค่าเหลือน้อยที่สุด จะได้ว่า

$$e_i = y_i - \hat{y}_i \qquad \text{เมื่อ } i = 1, 2, ..., n$$



ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อน (Sum of squares of error) เขียนแทนด้วย SSE คือ

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$$

วิธีกำลังสองน้อยสุดคือสนใจ SEE มีค่าน้อยที่สุด หรือต้องการผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนที่มีค่าน้อยที่สุด

ค่าสังเกตของข้อมูลในรูปคู่อันดับ $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n)$ มีความสัมพันธ์เชิงเส้น

$$\hat{y} = a + bx$$

ให้ $\hat{y}_i = a + bx_i$ ผลบวกกำลังสองของความคลาดเคลื่อนคือ

$$\text{SSE} = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)^2$$

ต่อไปเราจะหาค่าน้อยสุดโดยใช้ทฤษฎีในแคลคูลัส โดยพิจารณา ฟังก์ชัน SSE(a, b) แล้ว

$$\frac{\partial(\text{SSE})}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)(-1) = 0$$
$$\frac{\partial(\text{SSE})}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(y_i - a - bx_i)(-x_i) = 0$$

จัดรูปสมการจะได้

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = an + b\sum_{i=1}^{n} x_i \tag{8.1}$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{8.2}$$

ดังนั้น (a, b) ที่สอดคล้องสมการ (8.1) และ (8.2) จะให้ค่า SSE ที่น้อยที่สุด

เรียกสมการ (8.1) และ (8.2) ว่า **สมการปกติ** (Normal equation) ของสมการ $\hat{y} = a + bx$ และ b เป็นความชันของสมการนี้ เรียกว่า สัมประสิทธิ์การถดถอย

จากสมการ (8.1) และ (8.2) เราจะได้

$$b = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2} \qquad \text{และ} \qquad a = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i - b\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

จะเห็นว่า $a = \bar{y} - b\bar{x}$ นั่นแสดงว่าจุด $(\bar{x}, \bar{y})$ อยู่บนเส้นถดถอย $\hat{y} = a + bx$

ในทำนองเดียวกันการหาสัมประสิทธิ์ของเส้นถดถอย $\hat{x} = c + dy$ จะได้ว่า

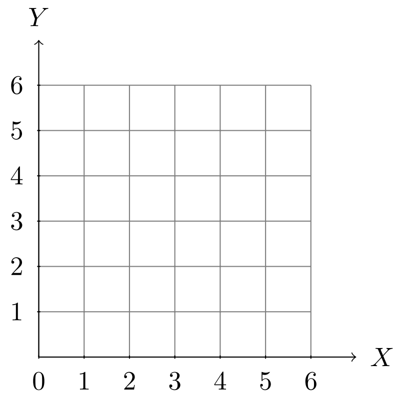
$$d = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} y_i^2} \qquad \text{และ} \qquad c = \bar{x} - d\bar{y}$$

ตัวอย่าง 8.5.1 กำหนดข้อมูลของตัวอย่างดังตาราง

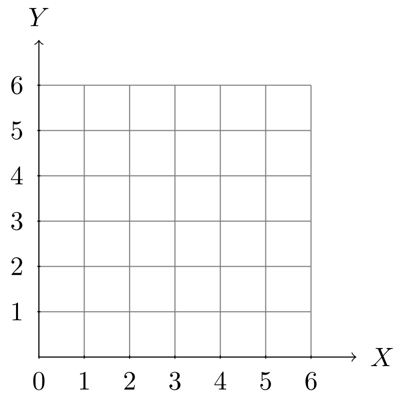
x	1	2	3	4	5
y	1	3	2	4	5

จงหาสมการของเส้นถดถอยต่อไปนี้ พร้อมเขียนกราฟประกอบ

1. เส้นถดถอยของ y เทียบกับ x



2. เส้นถดถอยของ x เทียบกับ y



ตัวอย่าง 8.5.2 ความสัมพันธ์ระหว่างความสูงของต้นถั่วชนิดหนึ่งกับเวลาเป็นดังนี้

เวลา (วัน)	1	2	3	4	5
ความสูงของต้นถั่ว (เซนติเมตร)	1	1.3	1.5	1.7	2.5

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับความสูงของต้นถั่วแบบเชิงเส้น จงทำนายว่าวันที่ 7 ต้นถั่วชนิดนี้จะมีความสูงกี่เซนติเมตร

ตัวอย่าง 8.5.3 หุ้นน้องใหม่ชื่อย่อ MATH ทำการเข้าขายในตลาดหลักทัพย์แห่งประเทศไทย (SET) มีความสัมพันธ์ระหว่างวันกับราคาปิด ดังนี้

วันที่ซื้อขาย (นับจากวันแรกที่เข้าตลาด)	1	2	3	4	5
ราคาปิด (บาท)	1.00	1.05	1.12	1.08	1.15

ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างวันที่ซื้อขายกับราคาปิดเป็นแบบเชิงเส้น จงทำนายในวันที่ 10 นับจากหุ้น MATH เข้าตลาด จะมีราคาปิดประมาณกี่บาท

ตัวอย่าง 8.5.4 ถ้าระยะเวลากับรายได้ของบริษัทหนึ่งในรอบ 5 ปี มีความสัมพันธ์แบบเส้นตรง ดังข้อมูล

พ.ศ.	2553	2554	2555	2556	2557
รายได้ (ร้อยล้านบาท)	1	1.5	2	3	4.5

จงคาดคะเนว่าในปี 2560 บริษัทจะมีรายได้เท่าใด

ตัวอย่าง 8.5.5 ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ (X) และวิชาฟิสิกส์ (Y) ของนักเรียน 100 คนของโรงเรียนแห่งหนึ่ง ได้พจน์ต่าง ๆ ที่ใช้ในการคำนวณค่าคงตัวสมการถดถอย $\hat{y} = a + bx$ ดังนี้

$$\sum_{i=1}^{100} x_i = \sum_{i=1}^{100} y_i = 1000, \quad \sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 2000 \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 4000$$

ถ้าคะแนนสอบวิชาคณิตศาสตร์ของนายสมชายเท่ากับ 15 คะแนน แล้วคะแนนสอบวิชาฟิสิกส์ (โดยประมาณ) ของนายสมชายเท่ากับเท่าใด

แบบฝึกหัด 8.5

1. จากข้อมูลการปลูกถั่วเขียวของนายถั่วแระทั้งหมด 5 กระถาง ในแต่ละกระถางใส่เมล็ดถั่วเขียวลงไปจำนวนต่างๆกัน หลังจากนั้น 7 วันก็นับจำนวนถั่วเขียวที่งอก ปรากฏดังนี้

กระถางที่	จำนวนถั่วเขียวที่ใส่ลงไป (เมล็ด)	จำนวนถั่วเขียวที่งอกเมื่อนับในวันที่ 7 (เมล็ด)
1	2	1
2	4	2
3	6	5
4	8	6
5	10	8

   1.1 จงวาดแผนภาพการกระจาย และระบุความสัมพันธ์ระหว่างจำนวนถั่วเขียวที่ใส่ลงไปและที่จำนวนที่งอก

   1.2 จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ข้างต้น

   1.3 จงทำนายจำนวนถั่วเขียวที่จะงอก เมื่อปลูกจำนวน 9 เมล็ด และจำนวน 20 เมล็ด

2. การทดลองวัดความสัมพันธ์ระหว่างเวลา t (วินาที) กับระยะทาง s (เมตร) ของวัตถุที่เคลื่อนที่เป็นดังนี้

t	1	2	3	4
s	2	8	18	32

   ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับระยะทางเป็นแบบเชิงเส้น จงทำนายว่าระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ได้ขณะ $t = 1.5$ วินาที เท่ากับกี่เมตร

3. ความสัมพันธ์ระหว่างรายรับและรายจ่ายของครอบครัวในหมู่บ้านแห่งเป็นดังนี้

รายรับ (หน่วยหมื่นบาท)	1.2	1.8	2.5	4.5	6
รายจ่าย (หน่วยหมื่นบาท)	1	1	2.2	3.4	4.4

   ถ้าความสัมพันธ์ระหว่างรายรับกับรายจ่ายเป็นแบบเชิงเส้น แล้วครอบครัวที่มีรายรับ $50,000$ บาท จะมีรายจ่ายเท่าใดกี่บาท

4. กำหนดให้ข้อมูลดังตารางต่อไปนี้

x	1	2	3	3
y	1	3	4	6

   จงหาสมการถดถอยเชิงเส้นของ Y เทียบ x

5. ข้อมูลส่วนสูง (เซนติเมตร) และน้ำหนัก (กิโลกรัม) ของนักเรียนหญิง 4 คนดังนี้

นักเรียนหญิง	คนที่ 1	คนที่ 2	คนที่ 3	คนที่ 4
ส่วนสูง (เซนติเมตร)	150	152	154	156
น้ำหนัก (กิโลกรัม)	45	45	48	50

ถ้าส่วนสูงและน้ำหนักของนักเรียนมีความสัมพันธ์คือ $\hat{y} = a + 0.9x$ เมื่อ x เป็นความสูงและ y เป็นน้ำหนัก แล้วนักเรียนที่มีส่วนสูง 155 เซนติเมตร จะมีน้ำหนักกี่กิโลกรัม

6. ถ้าความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างตัวแปร x และ y มีกราฟเป็นเส้นตรง โดยที่

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 32, \ \sum_{i=1}^{8} y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 65 \quad \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 140 \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{8} y_i^2 = 34$$

ถ้า $x = 8$ คะแนน แล้วจะประมาณค่า y ได้เท่าใด

7. จากสถิติการขายบ้านของบริษัทแห่งหนึ่ง จำนวนบ้านที่ขายได้มีความสัมพันธ์กับเวลาในลักษณะเส้นตรง

พ.ศ.	2551	2552	2553	2554	2555	2556
จำนวนบ้านที่ขายได้ (ร้อยหลัง)	5	8	12	15	20	25

จงหาว่าจำนวนบ้านที่ขายได้ในปี พ.ศ. 2558

8. ในการหาความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันระหว่างปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 (X) และปริมาณสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (Y) จากตัวอย่างสารอาหารจำนวน 100 ตัวอย่าง พบว่าความแปรปรวนของปริมาณสารชนิดที่ 1 เท่ากับ 1.75 ค่าเฉลี่ยเลขคณิตของปริมาณสารชนิดที่ 2 เท่ากับ 0.5

$$\sum_{i=1}^{100} x_i y_i = 100, \quad \text{และ} \quad \sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 200$$

ถ้าสมการถดถอยคือ $\hat{y} = a + bx$ แล้ว เมื่อพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 1 อยู่ 4 หน่วย จะพบสารปนเปื้อนชนิดที่ 2 (โดยประมาณ) เท่ากับเท่าใด

9. พิจารณาข้อมูล x และ y ดังนี้

x	-3	-1	0	1	3
y	0	a	$a+3$	$a+4$	$a+6$

เมื่อ a เป็นค่าคงที่ โดย x และ y มีความสัมพันธ์เป็นกราฟเส้นตรง โดยมีความชันเท่ากับ 1.55 ถ้า $x = 4$ จะประมาณค่า y

10. ถ้าสมการที่ใช้แทนความสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการประมาณห้องพักที่มีแขกมาพักจริง (y) จากจำนวนห้องพักที่มีการจองล่วงหน้า (x) คือ

$$\hat{y} = a + 0.75x$$

โดยที่ $\bar{x} = 40$ และ $\bar{y} = 60$ ถ้า $x = 60$ แล้วจำนวนห้องพักที่มีแขกมาพักจริงโดยประมาณเท่ากับเท่าใด

11. ข้อมูลระหว่างเวลากับราคาปิดของหุ้น LUX มีความสัมพันธ์แบบเส้นตรง ดังข้อมูล

พ.ศ.	2550	2551	2552	2553	2554
ราคาปิด (บาท)	2.25	2.50	2.75	3.00	3.50

จงหาสมการถดถอยของความสัมพันธ์ระหว่างเวลากับราคาปิดของหุ้น LUX

12. มูลค่าอุตสาหกรรมสิ่งท้อที่ประเทศไทยส่งออกไปขายยังต่างประเทศระหว่าง พ.ศ. 2520 – 2524 เป็นดังนี้

พ.ศ.	2520	2521	2522	2523	2524
มูลค่า (ล้านบาท)	1	3	4	5	9

ความสัมพันธ์ของการส่งออกกับเวลาเป็นแบบเส้นตรง จงคาดการณ์ว่ามูลค่าการส่งออกกี่ล้านบาทในปี พ.ศ. 2527

13. จำนวนประชากรในจังหวัดหนึ่ง ตั้งแต่ พ.ศ. 2550 ถึง พ.ศ. 2554 มีดังนี้

พ.ศ.	2550	2551	2552	2553	2554
จำนวนประชากร (แสนคน)	1.2	2.6	a	5.4	6.3

ถ้าจำนวนประชากรสัมพันธ์เชิงฟังก์ชันกับเวลา (พ.ศ.) เป็นเส้นตรง และทำนายว่าในปี พ.ศ. 2557 จะมีประชากร $1,028,000$ คน แล้วใน พ.ศ. 2552 จะมีประชากรกี่คน

บรรณานุกรม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

กัลยา วานิชบัญชา. (2552). **หลักสถิติ**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

คณาจารย์ภาควิชาคณิตศาสตร์และวิทยาคอมพิวเตอร์ คณะวิทยาศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย. (2555). **ความน่าจะเป็นและสถิติ**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์

ดำรง ทิพย์โยธา, ยุวรีย์ พันธ์กล้า และณัฏฐนาถ ไตรภพ. (2548). **แคลคูลัส ๑**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ดำรง ทิพย์โยธา, ณัฏฐนาถ ไตรภพ และสรุชัย สมบัติบริบูรณ์. (2559). **แคลคูลัส ๒**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พรชัย สาตรวาหา. (2550). **สมการเชิงอนุพันธ์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย. (2545). **เซต ความสัมพันธ์และฟังก์ชัน** กรุงเทพฯ: โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์

James Stewart. (2012). **Calculus Early Transcendentals**. Canada. Nelson Education, Ltd.

ประวัติผู้เขียน

นายธนัชยศ จำปาหวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสาตร์, เกียติรนิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours),Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod_ja@ssru.ac.th
Office: 1145
Facebook: www.facebook.com/Jampawai
Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. E-book: หลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู. (2565). www.mebmarket.com
2. E-book: ทฤษฎีจำนวน. (2565). www.mebmarket.com
3. E-book: พีชคณิตนามธรรม. (2565). www.mebmarket.com
4. หนังสือ: ความจริงที่ต้องพิสูจน์. (2560). ศูนย์หนังสือมหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา