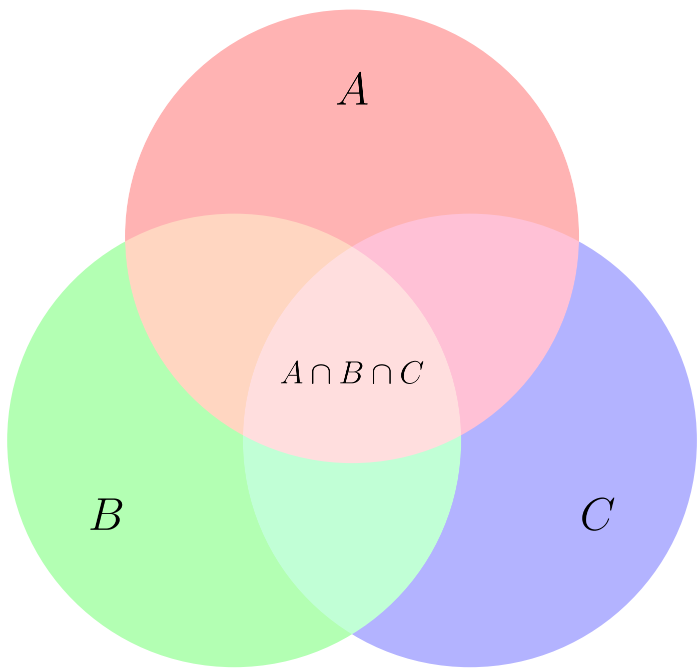
PRINCIPLES OF MATHEMATICS FOR TEACHER



Lecture Note by

Thanatyod Jampawai, Ph.D.

Suan Sunandha Rajabhat University, Version August, 2016

MED1401
หลักคณิตศาสตร์สำหรับครู
PRINCIPLES OF MATHEMATICS FOR TEACHER

อาจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

สารบัญ

บทที่ 1

บทนำ (Introduction)

ในสมัยแรกๆมุนุษย์สนใจสิ่งที่อยู่รอบตัวพยายามและพยายามที่เข้าใจธรรมชาติหรือปรากฏการณ์ต่างๆที่เกิดขึ้น จึงมักจะตั้งคำถามและพยายามหาคำตอบหรือคำอธิบายสิ่งเหล่านั้น

นักคณิตศาสตร์ก็เป็นคนหนึ่งที่พยายามจะอธิบายสิ่งที่เกิดขึ้นว่าเกิดจากอะไรเพื่อให้เข้าใจมันให้เชัดเจนยิ่งขึ้น แต่การอธิบายดังกล่าวล้วนเป็นนามธรรม (abstrac)

" นักคณิตศาสตร์ต้องการความชัดเจน ดังนั้นเพื่อกำหนดการมีจริงของสิ่งต่างๆในคณิตศาสตร์ เราจึงเริ่มด้วยการกำหนดคำที่ใช้แทนสิ่งเหล่านั้นโดยใช้คำนี้เป็น **คำอนิยาม (undefined trem)** ([7], หน้า ก) "

แล้วถ่ายทอดความคิดที่บ่งบอกลักษณะและการมีจริงนั้นออกมาเป็นข้อความที่รัดกุม เราเรียกข้อความเหล่านั้นว่า **สัจพจน์**

1.1 สัจพจน์ (Axiom)

สัจพจน์ (axiom/postulate) คือข้อความที่ถูกยอมรับว่าจริงโดยไม่ต้องพิสูจน์ ซึ่งเป็นสิ่งพื้นฐานที่นักคณิตศาสตร์นำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบทต่างๆ ถ้าสัจพจน์ใดมีความใกล้เคียงกับแนวคิดที่เป็นธรรมชาติของมุษย์มากเท่าใด ก็จะทำให้ได้เรายอมรับการมีจริงของสิ่งที่กำหนดโดยสัจพจน์ดังกล่าว

1. **สัจพจน์เปอาโน (Peano's postulates)** คือสิ่งที่กำหนดการมีจริงของจำนวนธรรมชาติ (natural number)

   (P1) มีจำนวนธรรมชาติที่เรียกว่า 0 เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น
   (Zero is a natural number.)

   (P2) จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนต้องมี **ตัวตามหลัง (successor)** ที่เป็นจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียวเท่านั้น
   (Every natural number has a successor in the natural numbers.)

   (P3) 0 ไม่เป็นตัวตามหลังของจำนวนธรรมชาติใด
   (Zero is not the successor of any natural number.)

   (P4) ถ้าจำนวนธรรมชาติสองจำนวนมีตัวตามหลังตัวเดียวกัน แล้วจำนวนธรรมชาติทั้งสองย่อมเป็นจำนวนเดียวกัน
   (If the successor of two natural numbers is the same, then the two original numbers are the same.)

   (P5) ถ้าเซตหนึ่งมีสมาชิกเป็น 0 และตัวตามหลังทุกตัวของจำนวนธรรมชาติ แล้วเซตนั้นย่อมเท่ากับเซตของจำนวนธรรมชาติ

(If a set contains zero and the successor of every number is in the set, then the set contains the natural numbers.)

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \ldots$$

2. **สัจพจน์ยูคลิด** (Euclid's postulates) คือสิ่งที่กำหนดการมีจริงของเรขาคณิต (geometry)

   (E1) สามารถลากเส้นตรงจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง
   (A straight line can be drawn from any point to any point.)

   (E2) สามารถต่อส่วนเส้นตรงออกไปได้ไม่มีที่สิ้นสุด
   (A finite straight line can be produced continuously in a straight line.)

   (E3) สามารถสร้างวงกลมได้เมื่อกำหนดจุดศูนย์กลาง และระยะทางเป็นรัศมี
   (A circle may be described with any point as center and any distance as radius.)

   (E4) มุมฉากทุกมุมเท่ากัน
   (All right angles are equal to one another.)

   (E5) ถ้าเส้นตรงเส้นหนึ่งตัดเส้นตรงอีกสองเส้น ทำให้มุมภายในที่อยู่ข้างเดียวกันของเส้นตัดรวมกัน น้อยกว่า 2 มุมฉาก ถ้าต่อเส้นตรงทั้งสองออกไปเรื่อยๆ เส้นตรงทั้งสองจะตัดกันทางด้านที่มีมุมดังกล่าวรวมกันน้อยกว่าสองมุมฉาก
   (If a transversal falls on two lines in such a way that the interior angle on one side of the transversal are less than two right angles, then the lines meet on that side on which the angles are less than two right angles.)

3. **สัจพจน์สนาม** (Field axioms) คือสิ่งที่กำหนดการมีจริงขอระบบจำนวนจริงที่ประกอบด้วยเซต การดำเนินการและอันดับของเซตนั้น

(R1) ทุกจำนวนจริง x และ y	$x+y$ และ $x \cdot y$ เป็นจำนวนจริง
(R2) ทุกจำนวนจริง x และ y	$x+y=y+x$ และ $x \cdot y = y \cdot x$
(R3) ทุกจำนวนจริง x, y และ z	$(x+y)+z = x+(y+z)$ และ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$
(R4) ทุกจำนวนจริง x	$x+0=x=0+x$
(R5) ทุกจำนวนจริง x	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$
(R6) ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y	$x+y=0=y+x$
(R7) ทุกจำนวนจริง $x \neq 0$ มีจำนวนจริง y	$x \cdot y = 1 = y \cdot x$
(R8) ทุกจำนวนจริง x, y และ z	$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$

1.2 ทฤษฎีบท (Theorem)

ในหัวข้อนี้เราจะอธิบายถึงคำต่างๆที่สำคัญใช้ในคณิตศาสตร์ซึ่งจะเป็นพื้นฐานความเข้าใจในการศึกษาคณิตศาสตร์ขั้นสูงต่อไป

คำอนิยาม (Undefined term) หมายถึง คำหรือข้อความที่ตกลงกันว่าไม่ต้องให้คำจำกัดความ เพราะเข้าใจตรงกันได้เป็นสากล เช่น จุด เส้นตรง และระนาบ เป็นต้น หากมองในอีกแง่ก็คือมันยากที่จะนิยามคำเหล่านี้ให้ชัดจึงกำหนดให้เป็นคำอนิยาม

นิยาม (Definition) หมายถึง คำหรือข้อความที่มีการให้คำจำกัดความอย่างชัดเจน ตัวอย่างเช่น

บทนิยาม 1.2.1 เราจะเรียกจำนวนเต็ม a ที่ไม่ใช่ศูนย์ว่าหารจำนวนเต็ม b ลงตัว ถ้ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $b = ak$

บทนิยาม 1.2.2 **จำนวนเต็มคู่** (even number) คือจำนวนเต็มที่หารด้วยสองลงตัว

บทนิยาม 1.2.3 **จำนวนเต็มคี่** (odd number) คือจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนเต็มคู่

ทฤษฎีบท (Theorem) หมายถึง ข้อความทางคณิตศาสตร์ที่ถูก**พิสูจน์** (proof) ว่าเป็นจริงโดยการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์อย่างเคร่งครัด ซึ่งจะมีการใช้นิยาม สัจพจน์ ทฤษฎีบทอื่น และการให้เหตุผลทางคณิตศาสตร์ มาใช้การพิสูจน์ ตัวอย่างทฤษฎีบท เช่น ทฤษฎีบทของพีธากอรัส ทฤษฎีบทหลักมูลเลขคณิต เป็นต้น

บทตั้ง (Lemma) หมายถึง ข้อความที่ถูกพิสูจน์ว่าเป็นจริง โดยมีวัตถุประสงค์เพื่อนำไปใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท ปกติในทฤษฎีบทที่พิสูจน์โดยตรงแล้วยาวมาก มักจะมีการพิสูจน์บทตั้งก่อน แล้วดึงบทตั้งมาใช้ในการพิสูจน์ทฤษฎีบท จึงทำให้การพิสูจน์ในทฤษฎีบทสั้นลงมาก

การพิสูจน์บทตั้งยังมีประโยชน์ในลักษณะที่ต้องมีการใช้บทตั้งเดียวกันไปพิสูจน์หลายทฤษฎีบท ซึ่งสามารถถูกนำเอาไปใช้ได้ง่ายขึ้น อย่างไรก็ตามบทตั้งบางอันก็มีข้อยกเว้น คือเป็นบทตั้งที่สมบูรณ์แบบในตัวเช่นเดียวทฤษฎีบท อาทิ Zorn's lemma และ Urysohn's lemma

บทแทรก (Corollary) หมายถึง ข้อความที่ถูกพิสูจน์ว่าเป็นจริง โดยการพิสูจน์จะอิงการพิสูจน์ของทฤษฎีบทที่กล่าวมาก่อนเป็นหลัก จึงมักทำให้การพิสูจน์บทแทรกมักจะสั้น บางครั้งจะบอกความสัมพันธ์ถึงทฤษฎีบทชัดเจน
ตัวอย่างเช่น

บทตั้ง 1.2.4 ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคู่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

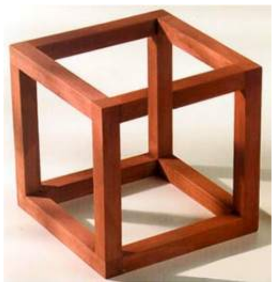
บทตั้ง 1.2.5 ถ้า a เป็นจำนวนเต็มคี่ แล้ว a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

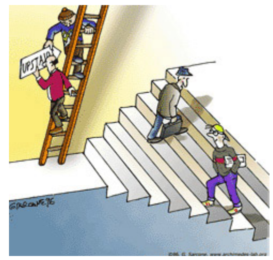
ทฤษฎีบท 1.2.6 a เป็นจำนวนเต็มคู่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนเต็มคู่

บทแทรก 1.2.7 a เป็นจำนวนเต็มคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2 เป็นจำนวนเต็มคี่

1.3 ปฏิทรรศน์ (Paradox)

ปฏิทรรศน์หรือพาราด๊อกซ์ (paradox) คือความขัดแย้งบนความลงรอย หรือความขัดแย้งกันแต่จริง หรือข้อความที่มีลักษณะย้อนแย้งในตัวเอง หมายถึง เหตุการณ์ของประโยคที่เป็นจริงชัดเจนแต่สุดท้ายนำไปสู่ความขัดแย้งในตัวเอง หรือสถานการณ์ที่อยู่นอกความคิดทั่วไป หรือปฏิทรรศน์ใช้กันในความหมายของข้อความที่ตรงกันข้ามหรือขัดแย้งกับความเชื่อ ที่คนทั่วไปมี หรือยอมรับว่าเป็น “สามัญสำนึก”





1. **พาราด๊อกซ์ช่างตัดผม** (The barber paradox)
   ในปี 1901 นักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อว่า Bertrand Russull ได้นำเสนอตัวอย่างที่ว่า

   All the men in a village either shave themselves or are shaved by a barber (himself a man from the village). The baber claims to shave only the male villager who do not shave themselves. So who shaves the baber?
   ทุกคนในหมู่บ้านต้องตัดผมด้วยตัวเองหรือไม่ก็ตัดผมโดยช่างตัดผม ช่างตัดผมคนนั้นก็เลยกล่าวว่า
   "ข้าคือคนตัดผมของทุกคนในหมู่บ้านที่ไม่ได้ตัดผมของตนเอง"

   คำถามคือใครเป็นคนตัดผมช่างตัดผม ?

   - ถ้าเขาตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาเป็นคนที่ไม่ได้ตัดผมของตนเอง
   - ถ้าเขาไม่ได้ตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาถูกตนเองตัดผมให้

   เป็นประโยคที่เหมือนจะเป็นจริงแต่ขัดแย้งในตัวเอง และตั้งชื่อพาราด๊อกซ์นี้ว่า **พาราด๊อกซ์ของรัสเซลล์ (Russull's paradox)** เขียนในแง่ของเซตได้ว่า

   $$S = \{X \mid X \notin X\}$$

   ซึ่งเป็นการอธิบายพาราด๊อกที่เกิดขึ้นในสัจพจน์ข้อที่สองของแคนเตอร์ (The axiom of abstraction) ที่ว่า

   " เมื่อกำหนดคุณสมบัติใดย่อมมีเซตประกอบด้วยคุณสมบัตินั้นๆเสมอ (A set is any collection of definite, distinishable objects of our intuition or our intellect to conceived as a whole.) "

   เซตๆหนึ่งนิยามโดยเซ็ตทุกเซ็ตที่ไม่ได้มีตัวเองเป็นสมาชิก เราจะพบปัญหาคือเซ็ตนั้นมีตนเองเป็นสมาชิกหรือไม่ ดังนั้นเราไม่สามารถนิยามเซตของเซตที่มีสมาชิกเป็นตัวเองได้นั้นเอง

2. **พาราด๊อกซ์ของริชาร์ด** (Richard's Paradox)
   ในปี 1905 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ จูลส์ ริชาร์ด (Jules Richard) ได้นำเสนอพาราด๊อกซ์ในด้านประโยคทางตรรกศาสตร์ เช่น

   นักศึกษาผู้หนึ่งพูดขึ้นว่า " นักศึกษาทุกคนพูดโกหก "

   ประโยคนี้สรุปได้ว่านักศึกษาคนนี้พูดจริงหรือพูดโกหก ? เราเรียกพาราด๊อกซ์นี้ว่า **พาราด๊อกซ์ของริชาร์ด** (Richard's Paradox)

พาราด็อกซ์ ยังมีอีกหลายเรื่องหลายรูปแบบ หลายสาขาวิชาเช่น

- ตรรกศาสตร์
  - Free will and omniscience paradox ถ้ามีผู้หยั่งรู้และรู้ว่าจะเกิดอะไรอยู่ก่อนแล้ว (ผู้กำหนดโชคชะตาคน) ก็แสดงว่า เราไม่มีเจตจำนงที่เป็นอิสระ
  - Time Paradox หรือ Grandfather paradox กรณีที่มีการย้อนกลับไปแก้ไขเหตุการณ์ในอดีต ที่จะส่งผลให้เกิดเหตุการณ์ในปัจจุบัน เช่น การย้อนกลับไปฆ่าพ่อแม่ของตนเองก่อนที่ตนจะเกิด ก็จะเกิดข้อขัดแย้งทางเวลาว่า ตัวของเราเกิดมาได้อย่างไร เมื่อพ่อแม่ถูกฆ่าไปแล้ว
- วิทยาศาสตร์
  - Einstein Podolsky Rosen paradox ซึ่งเป็นการขัดแย้งกันระหว่าง ทฤษฎีสัมพัทธภาพ กับ ทฤษฎีควอนตัม
  - ปฏิทรรศน์ฝาแฝด (twin paradox) ซึ่งเป็นผลลัพธ์อันน่าฉงนที่สุดอันหนึ่งในทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์
- เศรษฐศาสตร์
  - Leontief's paradox ปัญหาว่าทำไม ประเทศที่อุดมด้วยปัจจัยทุนจึงมีการส่งออกสินค้าที่ใช้แรงงานเป็นหลัก
  - Giffen's paradox ปัญหาว่าทำไมบางสินค้า ยิ่งขึ้นราคา คนยิ่งซื้อ (เช่น ขนมปัง ในยามสงคราม)
  - Diamond-water paradox (paradox of value) ปัญหาว่าทำไมน้ำจึงถูกกว่าเพชร ทั้งๆที่คนต้องการน้ำมากกว่า
- ปรัชญา
  - Zeno's paradox ในวิชาปรัชญา แปลไทยตามพจนานุกรมก็คือ ข้อสรุปที่ฟังดูแล้วขัดกันของ Zeno เขาได้ยกตัวอย่าง paradox ของเขาไว้ อันที่มีชื่อเสียงที่สุดก็คือ อาคีลิสแข่งกับเต่า

    เต่าแข่งกับอาคีลิส โดยเต่าบอกให้อาคีลิสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลิสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลิสว่า ถ้าอาคีลิสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลิสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก

แบบฝึกหัด 1.3

จงอธิบายพาราด๊อกซ์ของแต่ละเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. ยักษ์กินคนจับเหยื่อได้ และเล่นกับเหยื่อว่าถ้าเหยื่อสามารถทายใจของตนได้ เหยื่อจะถูกปล่อยไป เหยื่อผู้หน้าสงสารก็เลยทายว่า "ท่านคิดว่าท่านจะกินข้า" สรุปว่าเหยือถูกปล่อยหรือถูกกินกันแน่ ?

2. ชายคนหนึ่งสอบถามนาย A และ B นาย A พูดว่า "นาย B พูดแต่เรื่องโกหก" ส่วนนาย B ก็พูดว่า "นาย A พูดแต่ความจริง" แล้วใครพูดความจริง ใครพูดโกหกกันแน่ ?

3. เผ่ากินคน จับเหยื่อได้และเสี่ยงทายกับเหยื่อว่าให้เล่าเรื่องมาเรื่องหนึ่ง ถ้าหัวหน้าเผ่าคิดว่าเรื่องนั้นเป็นเรื่องจริง ให้จับไปต้ม แต่ถ้าเป็นเรื่องโกหกให้จับไปย่าง เหยื่อจึงเล่าว่า "เขาจะถูกจับไปย่าง" หัวหน้าเผ่าคิดอยู่นานก็คิดไม่ออกว่าจะต้มหรือ ย่างดี จนในที่สุดก็เอาเหยื่อผู้นั้นไปขังไว้รอวันคิดเสร็จ และเหยื่อผู้นั้นก็ถูกขังอยู่ตั้งแต่วันนั้นจนถึงปัจจุบัน เกิดไรขึ้นกับเหตุการณ์นี้

4. (Crocodile Dilemma) จระเข้ขโมยลูกของชายผู้หนึ่งไป แต่มันให้คำสัญญาว่า มันจะคืนลูกให้หากชายผู้นั้นทายใจมันได้ถูกต้องว่ามันจะทำอะไร ชายผู้นั้นเดาใจมันว่า "เขาจะไม่ได้ลูกกลับคืนมา"

5. เต่าแข่งกับอาคีลิส โดยเต่าบอกให้อาคีลิสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลิสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลิสว่า ถ้าอาคีลิสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลิสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก อาร์คีมีดีสจะชนะเต่าได้หรือไม่ ?

บทที่ 2

ตรรกศาสตร์ (Logic)

2.1 ประพจน์ (Proposition)

ประพจน์ (Proposition)

บทนิยาม 2.1.1 ประพจน์หรือข้อความ (Proposition/Statement) คือ ประโยคที่มีค่าความจริง (truth value) เป็นจริง (True) หรือเป็นเท็จ (False) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

เรามักใช้อักษร p, q, r, s, t แทนประพจน์

ตัวอย่าง 2.1.2 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่

1. ☐ พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
2. ☐ แม่น้ำบางประกงไหลผ่าน จ.ฉะเชิงเทรา
3. ☐ เขาเป็นคนอังกฤษ
4. ☐ กรุณา เปิดหน้าต่างให้ฉันหน่อย
5. ☐ คุณมาทำอะไรที่นี้ ?
6. ☐ จังหวัดเลยอยู่ภาคเหนือของประเทศไทย
7. ☐ คุณพระช่วย !
8. ☐ พี่ต้องพาฉันไปดูหนังนะ
9. ☐ ผลบวกมุมภายในสามหลี่ยมใดคือ $180°$
10. ☐ x เป็นจำนวนเฉพาะ
11. ☐ ถ้า $x > 2$ แล้ว $x > 1$
12. ☐ $2 \neq 1$
13. ☐ จำนวนเฉพาะทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่
14. ☐ $2x = x + x$
15. ☐ เซตว่างคือเซตที่ไม่มีสมาชิก
16. ☐ $a + b = b + a$
17. ☐ ผู้ชายคนนั้นไปทำอะไรในห้องน้ำ
18. ☐ จำนวนเฉพาะทุกจำนวนเป็นจำนวนคี่
19. ☐ จำนวนจริงเป็นจำนวนตรรกยะ
20. ☐ $2^4 = 4^2$

บทนิยาม 2.1.3 ประโยคเปิด (Open sentence) คือ ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร (variable) และเมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในเอกภพสัมพัทธ์ (universe) แล้วประโยคนั้นจะเป็นประพจน์

ตัวอย่าง 2.1.4 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือประโยคเปิดหรือไม่เป็นประพจน์

1. ☐ ลีกวนยูเป็นชาวสิงคโปร์
2. ☐ เธอเป็นคนต่างชาติ
3. ☐ $1 + 1 = 2$
4. ☐ $x^2 = -1$
5. ☐ $\sin 30^\circ = 0.5$
6. ☐ 50% ของ 20 คือ 10
7. ☐ $x \cdot 0 = 0$
8. ☐ ผู้ชายคนนั้นเป็นคนเชียงใหม่
9. ☐ ผู้หญิงคนนั้นเป็นคนต่างด้าว
10. ☐ เขาไปทำจมูกมาใช่ปะ

ตัวเชื่อมประพจน์ (Connective)

บทนิยาม 2.1.5 ให้ p, q เป็นประพจน์ แล้ว **ข้อความร่วม** (conjunction) ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$p \wedge q$ อ่านว่า p **และ** q (p and q)

จะมีค่าความจริงเป็นจริงได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ p และ q มีค่าความเป็นจริง

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

ตัวอย่าง 2.1.6 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ☐ อังกฤษเป็นประเทศในกลุ่มยูโร และ ไทยเป็นประเทศในอาเซียน
2. ☐ 2 เป็นจำนวนคู่ และ 3 เป็นจำนวนนับ
3. ☐ ควายมี 4 เขา และ นกขุนทองมี 2 ขา
4. ☐ $2^2 = 4$ และ นกแก้วบินได้
5. ☐ $2 \neq 3$ และ $2 \neq 2$

บทนิยาม 2.1.7 ให้ p, q เป็นประพจน์ แล้ว **ข้อความเลือก** (disjuction) ของ p และ q เขียนแทนด้วย

$p \vee q$ อ่านว่า p **หรือ** q (p or q)

จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ p และ q มีค่าความเป็นเท็จ

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ตัวอย่าง 2.1.8 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ☐ ประเทศไทยติดกับประเทศลาว หรือ ญี่ปุ่นเป็นประเทศในอาเซียน
2. ☐ 2 เป็นจำนวนคู่ หรือ 3 เป็นจำนวนนับ
3. ☐ $3 \leq 3$ หรือ $\varnothing \subset \{1, 2\}$
4. ☐ 2^{10} เมื่อเขียนเป็นจำนวนเต็มไม่มีศูนย์เลย หรือ $10 \geq 9$

บทนิยาม 2.1.9 ให้ p, q เป็นประพจน์ แล้ว **ข้อความแบบเงื่อนไข** (condition statement/implication) ของ p และ q

$p \rightarrow q$ อ่านว่า **ถ้า** p **แล้ว** q (if p then q)

เรียก p ว่า เหตุ (hypothesis) และเรียก q ว่า ผล (conclusion) จะมีค่าความจริงเป็นเท็จได้เพียงกรณีเดียวเท่านั้นคือ p มีค่าความเป็นจริง และ q มีค่าความเป็นเท็จ และเรียก $q \rightarrow p$ ว่าบทกลับ (converse) ของ $p \rightarrow q$

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

เราอาจจะพบข้อความ $p \rightarrow q$ ในรูปแบบอื่นๆ เช่น

- q ถ้า p (q if p)
- p ทำให้ได้ q (p implies q)
- p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอของ q (p is a sufficient condition for q)
- q เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นของ p (q is a necessary condition for p)

ตัวอย่าง 2.1.10 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ☐ ถ้าอังกฤษเป็นประเทศในเอเชีย แล้วไทยเป็นประเทศในยุโรป
2. ☐ ถ้า iPhone เป็นโทรศัพท์ แล้วนิวตันเป็นคนอังกฤษ
3. ☐ ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนนับ
4. ☐ ถ้าควายมีเขา แล้วนกขุนทองไม่มีขา
5. ☐ ถ้า $2^2 \neq 4$ แล้ว พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันตก
6. ☐ ถ้า $1 < 6$ แล้ว $2 \neq 2$
7. ☐ ถ้า $1 + 3 + 5 = 9$ แล้ว $2 \times 3 = 23$
8. ☐ ถ้า $9 \cdot 0 = 0$ แล้ว เชียงใหม่อยู่ภาคเหนือของประเทศไทย
9. ☐ ถ้า 5 เป็นจำนวนเฉพาะ แล้ว $\frac{1}{2}$ เป็นจำนวนจริง
10. ☐ ถ้า 3 เป็นจำนวนตรรกยะ แล้ว 3 เป็นจำนวนอตรรกยะ หรือ 2 เป็นจำนวนเฉพาะ

บทนิยาม 2.1.11 ให้ p, q เป็นประพจน์ แล้ว **ข้อความแบบผันกลับได้** (Bicondition statement) ของ p และ q

$p \leftrightarrow q$ อ่านว่า p **ก็ต่อเมื่อ** q (p if and only if q, p iff q)

จะมีค่าความจริงเป็นจริงเหมือนกับข้อความ $(p \to q) \wedge (q \to p)$

p	q	$(p \to q)$	$(q \to p)$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$		$p \leftrightarrow q$
T	**T**	**T**	**T**	**T**		**T**
T	F	F	T	F		F
F	T	T	F	F		F
F	**F**	**T**	**T**	**T**		**T**

ตัวอย่าง 2.1.12 จงพิจารณาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้

1. ☐ เยอรมันเป็นประเทศในกลุ่มยูโร ก็ต่อเมื่อ พม่าอยู่ติดประเทศไทย
2. ☐ 1 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ 5 เป็นจำนวนนับ
3. ☐ สุนัขมีเขา ก็ต่อเมื่อ $1 + 1 = 2$
4. ☐ $2^{-2} = 1$ ก็ต่อเมื่อ $3 < 7$
5. ☐ $1 \neq 1$ ก็ต่อเมื่อ นกขมิ้นบินไม่ได้

บทนิยาม 2.1.13 ให้ p เป็นประพจน์ แล้ว **นิเสธของข้อความ**(Negation of statement) ของ p เขียนแทนด้วย

$\sim p$ อ่านว่า **นิเสธ** p (not p)

จะมีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p

p	$\sim p$
T	F
F	T

ตัวอย่าง 2.1.14 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. อังกฤษเป็นประเทศในทวีปเอเชีย
2. $\varnothing$ เป็นเซตอนันต์
3. นกเขามี 2 ขา
4. Nokia เป็นโทรศัพท์ที่ได้รับความนิยม

ทฤษฎีบท 2.1.15 ให้ p เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว

1. $F \wedge p$ มีค่าความจริงเป็น F
2. $T \vee p$ มีค่าความจริงเป็น T
3. $F \to p$ มีค่าความจริงเป็น T
4. $p \to T$ มีค่าความจริงเป็น T

ลำดับความของตัวเชื่อมข้อความ**จากน้อยไปหามาก**

1. $\sim$
2. $\wedge$, $\vee$
3. $\to$
4. $\leftrightarrow$

เช่นถ้าเขียน $\sim p \wedge q \leftrightarrow r \to \sim p$ จะหมายถึง $[(\sim p) \wedge q] \leftrightarrow [r \to (\sim p)]$

ตัวอย่าง 2.1.16 จงเขียนประพจน์ต่อไปนี้ตามลำดับความสำคัญ

1) $\sim r \to p \wedge q \leftrightarrow r$

2) $p \wedge \sim r \leftrightarrow \sim p \to \sim q$

3) $\sim p \wedge \sim r \to q \wedge \sim r$

4) $p \vee \sim q \leftrightarrow \sim r \to q$

ตารางค่าความจริง (Truth table)

นับจำนวนประพจน์ย่อยๆทั้งหมดในข้อความเพื่อหาจำนวนกรณีทั้งหมด

จำนวนประพจน์	1	2	3	4	5	6	7	...	n
จำนวนกรณี	2	4	8	16	32	64	128	...	2^n

แล้วเขียนกรณีทั้งหมดโดยใช้หลักการแผนภาพต้นไม้ (tree diagram) จนครบทุกประพจน์ย่อยในข้อความนั้น

ตัวอย่าง 2.1.17 จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ $(p \to q) \vee (p \leftrightarrow q)$

แบบฝึกหัด 2.1

1. พิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็น (ก) ประพจน์ (ข) ประโยคเปิด หรือไม่เป็นทั้งสองอย่างนี้
   - 1.1 ห้ามเดินลัดสนาม
   - 1.2 ปีนี้เป็นปีระกา
   - 1.3 น่านเป็นจังหวัดในภาคใต้
   - 1.4 มีจำนวนนับที่น้อยกว่า 1
   - 1.5 5 หาร 11 ลงตัว
   - 1.6 ใครเป็นคนนัดพวกเราที่สยามพารากอน
   - 1.7 รถไฟมีสองหัว
   - 1.8 ถ้า $1 > 1$ แล้วประเทศไทยจะมี 100 จังหวัด

2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   - 2.1 ถ้า $2^0 = 0^2$ แล้ว $2 = 0$
   - 2.2 ปูม้าไม่มีขาก็ต่อเมื่อลิงไม่มีหู
   - 2.3 นกเพนกินเนิดที่ประเทศไทยและไก่เป็นสัตว์ปีก
   - 2.4 จำนวนนับเป็นจำนวนเต็มหรือตรรกยะ
   - 2.5 ถ้า $2 \neq 9$ แล้ว นกขมิ้นบินไม่ได้
   - 2.6 ถ้าช้างเป็นสัตว์ปีกแล้วช้างเป็นตั๊กแตน
   - 2.7 ถ้า 16 เป็นจำนวนเต็ม แล้ว 59 เป็นจำนวนเฉพาะ
   - 2.8 กระต่ายไม่มีฟัน ก็ต่อเมื่อ $1 > 2$

3. จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้
   - 3.1 นายกไม่ได้อยู่ในห้องนี้
   - 3.2 เลข 8 เป็นเลขมงคล
   - 3.3 หมีโคอาล่าเป็นสัตว์ดุร้าย
   - 3.4 ช้างน้ำไม่ได้เป็นสัตว์น้ำ

4. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   - 4.1 $(p \rightarrow \sim q) \vee (q \rightarrow p)$
   - 4.2 $\sim p \wedge (p \leftrightarrow q) \rightarrow (p \vee q)$
   - 4.3 $p \wedge (\sim q \rightarrow r) \leftrightarrow (r \vee q)$
   - 4.4 $\sim [\sim p \wedge (q \rightarrow \sim r)] \rightarrow (p \wedge \sim r)$
   - 4.5 $[p \rightarrow (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r)]$
   - 4.6 $\sim p \wedge (q \vee r) \rightarrow (p \rightarrow r \wedge s)$

5. กำหนดให้ประพจน์ p, q, r, s มีค่าความจริงเป็น T, F, F, T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   - 5.1 $p \rightarrow (q \vee \sim (p \wedge r))$
   - 5.2 $\sim [(p \leftrightarrow \sim q) \wedge (q \rightarrow \sim r)] \rightarrow \sim s$
   - 5.3 $\sim (r \wedge \sim s) \leftrightarrow (p \vee \sim q)$
   - 5.4 $[(\sim p \vee (\sim p \rightarrow (q \wedge r) \vee s) \rightarrow p) \wedge r] \leftrightarrow p$

6. ถ้าประพจน์ $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow (r \vee \sim s)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   - 6.1 $p \wedge q \leftrightarrow \sim r$
   - 6.2 $(q \rightarrow p) \rightarrow (\sim r \vee t)$
   - 6.3 $\sim [p \vee (\sim r \rightarrow p)] \leftrightarrow (q \wedge \sim t)$
   - 6.4 $[\sim (p \rightarrow t) \vee (r \wedge q)] \rightarrow \sim (q \leftrightarrow \sim t)$

2.2 สมมูลของประพจน์ (Logical equivalence)

บทนิยาม 2.2.1 ให้ P และ Q เป็นประพจน์ แล้ว

P **สมมูล** (equivalent) กับ Q เขียนแทนด้วย $P \equiv Q$ ถ้า P และ Q มีค่าความจริงตรงกันทุกๆกรณี

ตัวอย่าง 2.2.2 จงแสดงว่าประพจน์ $p \to q$ สมมูลกับ $\sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$\sim p \vee q$	$p \to q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

ดังนั้น $p \to q \equiv \sim p \vee q$

การตรวจสอบสมมูลโดยใช้ตาราง

ตัวอย่าง 2.2.3 จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. $p \vee q$ และ $\sim p \to q$
2. $\sim (p \leftrightarrow q)$ และ $\sim p \leftrightarrow \sim q$

ทฤษฎีบท 2.2.4 ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ

- กฎนิจพล (Idempotent law)

  (E1) $p \wedge p \equiv p$

  (E2) $p \vee q \equiv p$

- กฎการสลับที่ (Commutative law)

  (E3) $p \wedge q \equiv q \wedge p$

  (E4) $p \vee q \equiv q \vee p$

- กฎการจัดกลุ่ม (Associative law)

  (E5) $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

  (E6) $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

- กฎการกระจาย (Distributive law)

  (E7) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

  (E8) $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's law)

  (E9) $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

  (E10) $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

- กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)

  (E11) $\sim (\sim p) \equiv p$

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว

(E12) $p \to q \equiv \sim p \vee q$

(E13) $p \to q \equiv \sim q \to \sim p$ กฎแย้งสลับที่ (contrapositive law)

(E14) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (q \leftrightarrow p)$

(E15) $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (\sim p \to \sim q)$

(E16) $p \leftrightarrow q \equiv (\sim q \to \sim p) \wedge (\sim p \to \sim q) \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$

(E17) $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$

(E18) $p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$

(E19) $(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$

(E20) $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$

ตัวอย่าง 2.2.6 ให้ p, q เป็นประพจน์ใดๆ จงแสดงว่า $\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) \equiv \sim (p \wedge q)$

บทพิสูจน์.

$$
\begin{aligned}
\sim (p \wedge q) \vee \sim (p \vee q) &\equiv \sim [(p \wedge q) \wedge (p \vee q)] && \text{โดย } (E9) \\
&\equiv \sim [((p \wedge q) \wedge p) \vee ((p \wedge q) \wedge q)] && \text{โดย } (E7) \\
&\equiv \sim [((p \wedge p) \wedge q) \vee (p \wedge (q \wedge q))] && \text{โดย } (E5) \\
&\equiv \sim [(p \wedge q) \vee (p \wedge q)] && \text{โดย } (E1) \\
&\equiv \sim (p \wedge q) && \text{โดย } (E2)
\end{aligned}
$$

□

ตัวอย่าง 2.2.7 ให้ p, q เป็นประพจน์ใดๆ จงตรวจสอบว่าข้อความแต่ละคู่ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่

1. $p \to q$ และ $\sim p \to \sim q$
2. $\sim (p \to \sim q)$ และ $p \wedge q$
3. $(p \to q) \wedge (q \to r)$ และ $p \to r$
4. $p \to (q \to r)$ และ $q \to (p \to r)$

นิเสธของประพจน์

ทฤษฎีบท 2.2.8 ให้ p, q เป็นประพจน์ใดๆ แล้ว

1. $\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
2. $\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
3. $\sim (p \to q) \equiv p \wedge \sim q$
4. $\sim (p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$

ตัวอย่าง 2.2.9 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ จงนิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $p \wedge (q \vee r)$
2. $\sim (\sim p \vee q) \wedge (q \vee r)$
3. $p \rightarrow (q \rightarrow r)$
4. $p \leftrightarrow (q \rightarrow r)$
5. $p \leftrightarrow (q \vee r)$
6. $(p \vee q) \leftrightarrow (p \rightarrow \sim r)$

ตัวอย่าง 2.2.10 จงนิเสธของข้อความต่อไปนี้

1. เสื้อเป็นสีแดง และกางเกงเป็นสีดำ
2. $2 > 5$ หรือ 8 เป็นจำนวนคี่
3. ถ้าหนองบอนเป็นจังหวัดแล้วเลยไม่เป็นอำเภอ
4. ถ้าขอนแก่นเป็นเมืองหลวงของประเทศไทยแล้วเชียงใหม่จะอยู่ในภาคใต้
5. $xy = 12$ ก็ต่อเมื่อ $x = 3$ และ $y = 4$

ตัวอย่าง 2.2.11 จงนิเสธของข้อความต่อไปนี้

1. $x = 0$ และ $y > 0$ และ $z < 0$
2. 2 เป็นจำนวนคู่ หรือ (3 เป็นจำนวนคี่ และ 4 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ)
3. ถ้า (ถ้า $cp = 1$ แล้ว $p > 0$) แล้ว $c > 0$ หรือ $p < 0$
4. $xy \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \neq 0$ หรือ $y \neq 0$
5. ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq B \cap C$ และ $A \subseteq B \cup C$

แบบฝึกหัด 2.2

1. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ จงตรวจสอบว่าสมมูลของประพจน์ต่อไปนี้ โดยใช้ตารางค่าความจริง

   1.1 q และ $\sim p \vee (p \wedge q)$

   1.2 $\sim p \rightarrow q$ และ $\sim q \rightarrow p$

   1.3 $(p \vee r) \rightarrow q$ และ $p \rightarrow (q \vee r)$

   1.4 $p \leftrightarrow (q \vee r)$ และ $(p \vee r) \leftrightarrow q$

   1.5 $(p \vee q) \leftrightarrow r$ และ $p \vee (q \leftrightarrow r)$

   1.6 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $p \wedge q \rightarrow r$

2. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกัน ถ้าสมมูลกันจงแสดงโดยใช้ทฤษฎีบท ถ้าไม่สมมูลจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 $p \wedge (p \vee q)$ และ $p \vee (p \wedge q)$

   2.2 $\sim (p \rightarrow \sim q)$ และ $p \wedge (p \rightarrow q)$

   2.3 $p \rightarrow (q \leftrightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \leftrightarrow r$

   2.4 $p \wedge (q \vee r)$ และ $(p \wedge q) \vee r$

   2.5 $p \leftrightarrow \sim q$ และ $\sim p \leftrightarrow q$

   2.6 $p \rightarrow (q \vee r)$ และ $\sim (\sim r \rightarrow q) \rightarrow \sim p$

   2.7 $\sim (p \wedge \sim q)$ และ $\sim q \rightarrow \sim p$

   2.8 $\sim p \rightarrow q$ และ $(\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p)$

   2.9 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $(p \rightarrow q) \rightarrow r$

   2.10 $p \rightarrow (q \rightarrow r)$ และ $r \rightarrow (q \rightarrow p)$

3. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

   3.1 ร้องเท้าเป็นเครื่องแต่งกายชนิดหนึ่ง

   3.2 ถ้าแดงไปโรงเรียน แล้วดำจะไม่ทำการบ้าน

   3.3 เร็นคุงสอบได้เกรด A ก็ต่อเมื่อแม่จะพาไปดูหนัง

   3.4 $2 > 4$ และ $3 = 5$

   3.5 $x + 1 = 3$ หรือ π เป็นจำนวนตรรกยะ

   3.6 ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนเฉพาะ

   3.7 5 เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ e เป็นจำนวนอตรรกยะ

   3.8 $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

   3.9 ถ้า $xy > 0$ แล้ว ($x > 0$ และ $y > 0$) หรือ ($x < 0$ และ $y < 0$)

   3.10 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

   3.11 $x + y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -y$ หรือ $y = -x$

   3.12 $xy \geq 1$ และ $xy > 0$ ก็ต่อเมื่อ $x \geq \frac{1}{y}$ หรือ $y \geq \frac{1}{x}$

   3.13 ถ้า 2 หาร x ลงตัว หรือ 3 หาร x ลงตัว แล้ว 6 หาร x ลงตัว

2.3 สัจนิรันดร์ (Tautology)

บทนิยาม 2.3.1 ให้ P เป็นประพจน์ แล้ว

P เป็น**สัจนิรันดร์** (Tautology) ก็ต่อเมื่อ P มีค่าความจริงเป็นจริงทุกๆกรณี

ถ้า P มีค่าความจริงเป็นเท็จทุกๆกรณี เราจะเรียก P ว่า**ข้อความขัดแย้ง** (Contradiction)

ตัวอย่าง 2.3.2 จงแสดงว่าประพจน์ $p \to (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

ดังนั้น $p \to (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

ตัวอย่าง 2.3.3 จงแสดงว่าประพจน์ $p \wedge \sim p$ เป็นข้อความขัดแย้ง

p	$\sim p$	$p \wedge \sim q$
T	F	F
F	T	F

ดังนั้น $p \wedge \sim p$ เป็นข้อความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 2.3.4 จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. $(p \wedge q) \to p$
2. $(p \vee q) \to p$

การตรวจสอบสัจนิรันดร์โดยใช้ทฤษฎีบท

ทฤษฎีบท 2.3.5 ให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใดๆ แล้วประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์

- กฎนิจพล (Idempotent law)

  (T1) $p \wedge p \leftrightarrow p$

  (T2) $p \vee q \leftrightarrow p$

- กฎการสลับที่ (Commutative law)

  (T3) $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$

  (T4) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$

- กฎการจัดกลุ่ม (Associative law)

  (T5) $p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$

  (T6) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$

- กฎการกระจาย (Distributive law)

  (T7) $p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

  (T8) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

- กฎของเดอมอร์แกน (DeMorgan's law)

  (T9) $\sim (p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$

  (T10) $\sim (p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

- กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)

  (T11) $\sim (\sim p) \leftrightarrow p$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ p, q, r เป็นประพจน์ แล้วประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ และ c แทนข้อความขัดแย้ง

(T12) $\sim p \vee p$ หรือ $\sim (\sim p \wedge p)$

(T13) $p \to p$

(T14) $p \to p \vee q$ Addition

(T15) $p \wedge q \to p$ Simplification

(T16) $p \wedge q \to q$

(T17) $p \wedge (p \to q) \to q$ Modus ponens

(T18) $\sim q \wedge (p \to q) \to \sim p$ Modus tollens

(T19) $(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$ Hypothetical syllogism

(T20) $(p \vee q) \wedge \sim p \to q$ Disjunctive syllogism

(T21) $(p \vee q) \wedge \sim q \to p$

(T22) $(\sim p \to c) \to p$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ให้ P, Q เป็นประพจน์ ถ้า $P \equiv Q$ แล้ว $P \to Q$ เป็นสัจนิรันดร์

ถ้า $P \to Q$ เป็นสัจนิรันดร์ เราจะเรียก Q ว่าเป็น logical consequence ของ P

ทฤษฎีบท 2.3.8 ให้ P, Q เป็นประพจน์ $P \equiv Q$ ก็ต่อเมื่อ $P \leftrightarrow Q$ เป็นสัจนิรันดร์

ทฤษฎีบท 2.3.9 ให้ P, Q เป็นประพจน์ $P \equiv \sim Q$ ก็ต่อเมื่อ $P \leftrightarrow Q$ เป็นข้อความขัดแย้ง

ตัวอย่าง 2.3.10 จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1. $\sim (p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
2. $[(p \to r) \wedge (p \to q)] \leftrightarrow (p \to r \vee q)$
3. $(p \vee \sim q) \to (q \to p)$
4. $[p \vee \sim (p \wedge q) \vee \sim p] \leftrightarrow (p \wedge q)$
5. $[p \vee (q \wedge r)] \vee \sim [p \vee (q \wedge r)]$
6. $[(p \vee q) \to r] \leftrightarrow [\sim r \to (\sim p \wedge \sim q)]$
7. $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow [(p \to q) \to r]$
8. $[p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r)] \leftrightarrow [(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r]$

ตัวอย่าง 2.3.11 กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์ หรือข้อความแบบขัดแย้ง

1. $(p \to q) \vee p$
2. $[(p \to q) \wedge p] \to q$
3. $(\sim p \wedge p) \to q$
4. $(\sim p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \leftrightarrow \sim q)$

การตรวจสอบสัจนิรันดร์โดยใช้วิธีขัดแย้ง

วิธีการตรวจสอบ ให้ P, Q เป็นประพจน์

- สมมติให้ประพจน์ $P \to Q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

  ถ้า**สอดคล้อง**แสดงว่า **ไม่เป็นสัจนิรันดร์** ถ้าเกิด**เกิดข้อขัดแย้ง** แสดงว่า**เป็นสัจนิรันดร์**

- สมมติให้ประพจน์ $P \vee Q$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

  ถ้า**สอดคล้อง**แสดงว่า **ไม่เป็นสัจนิรันดร์** ถ้าเกิด**เกิดข้อขัดแย้ง** แสดงว่า**เป็นสัจนิรันดร์**

ตัวอย่าง 2.3.12 จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1) $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

2) $(p \to q) \vee (p \leftrightarrow q)$

ตัวอย่าง 2.3.13 จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

1) $\sim (p \vee q) \to (\sim p \wedge \sim q)$

2) $(p \vee \sim q) \to (p \to q)$

3) $[((p \wedge q) \to r) \wedge (p \to q)] \vee (p \to r)$

4) $[(p \vee \sim (r \wedge s)) \wedge \sim p] \to (r \wedge s)$

แบบฝึกหัด 2.3

1. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์โดยใช้ตารางค่าความจริง

1.1 $(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$

1.2 $(p \rightarrow \sim q) \rightarrow (p \wedge q)$

1.3 $\sim p \rightarrow (p \vee q)$

1.4 $\sim (p \wedge q) \rightarrow \sim p \wedge \sim q$

1.5 $(\sim p \rightarrow \sim q) \vee (p \leftrightarrow q)$

1.6 $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \vee q)$

2. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์โดยใช้ทฤษฎีบท

2.1 $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$

2.2 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow q)$

2.3 $\sim (p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

2.4 $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

2.5 $(p \rightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim (p \wedge q)$

2.6 $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow (p \rightarrow r)$

2.7 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]$

2.8 $[\sim p \vee (r \rightarrow s)] \leftrightarrow [(r \vee s) \rightarrow p]$

2.9 $[p \rightarrow (r \rightarrow s)] \leftrightarrow [(\sim r \wedge s) \rightarrow p]$

2.10 $[(p \wedge q) \rightarrow r] \leftrightarrow [\sim r \rightarrow (\sim p \vee \sim q)]$

3. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์โดยใช้วิธีขัดแย้ง

3.1 $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow \sim q$

3.2 $[p \rightarrow (q \rightarrow p)] \rightarrow p$

3.3 $\sim p \wedge q \rightarrow p$

3.4 $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$

3.5 $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \vee r)$

3.6 $(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$

3.7 $(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$

3.8 $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

3.9 $\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (\sim p \leftrightarrow q)$

3.10 $\sim [p \vee (\sim p \wedge q)] \rightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

3.11 $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

3.12 $(p \rightarrow r) \rightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)]$

4. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ใดๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นสัจนิรันดร์ หรือข้อความแบบขัดแย้ง

4.1 $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$

4.2 $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow q$

4.3 $[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

4.4 $[(p \rightarrow q) \wedge \sim p] \rightarrow \sim q$

2.4 การอ้างเหตุผล (Argument)

บทนิยาม 2.4.1 การอ้างเหตุผล (argument) คือการอ้างว่าข้อความ $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ ซึ่งจะเรียกว่า เหตุ นั้นสามารถสรุปข้อความ q ซึ่งจะเรียกว่าผลสรุป เขียนแทนด้วย

$$p_1, p_2, p_3, ..., p_n \vdash q$$

การอ้างเหตุผลจะ**สมเหตุสมผล** (valid) ก็ต่อเมื่อ

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \rightarrow q$$

เป็นสัจนิรันดร์ นอกเหนือจากนี้เป็นการอ้างเหตุผลที่**ไม่สมเหตุสมผล** (invalid)

ตัวอย่าง 2.4.2 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. เหตุ 1. $p \rightarrow q$
   2. $\sim q$

   ผล $\sim p$

p	q	$(\sim q$	$\wedge$	$p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$\sim p$
T	T	F	F	T	**T**	F
T	F	T	F	F	**T**	F
F	T	F	F	T	**T**	T
F	F	T	T	T	**T**	T

การอ้างเหตุผลนี้สมเหตุสมผล

2. เหตุ 1. $p \rightarrow q$
   2. $\sim p$

   ผล $\sim q$

p	q	$(\sim p$	$\wedge$	$p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$\sim q$
T	T	F	F	T	**T**	F
T	F	F	F	F	**T**	T
F	T	T	T	T	**F**	F
F	F	T	T	T	**T**	T

การอ้างเหตุผลนี้ไม่สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.4.3 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้ตารางค่าความจริง

1. เหตุ 1. $p \rightarrow q$
   2. $p \vee q$

   ผล p

p	q	$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow p$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

2. เหตุ 1. $p \rightarrow q$
   2. $p \wedge q$

   ผล q

p	q	$[(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

การตรวจสอบด้วยวิธีขัดแย้ง

วิธีการตรวจสอบ ให้ $p_1,\, p_2,\, p_3, ..., p_n \vdash q$ เป็นการอ้างเหตุผลอันหนึ่ง

สมมติประพจน์ $p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \rightarrow q$ มีค่าความจริงเป็น**เท็จ**

ถ้าแผนภาพต้นไม้**สอดคล้อง**แสดงว่า **ไม่สมเหตุสมผล** ถ้าแผนภาพต้นไม้**เกิดข้อขัดแย้ง** แสดงว่า**สมเหตุสมผล**

ตัวอย่าง 2.4.4 จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้วิธีขัดแย้ง

1. เหตุ 1. $p \vee q$
   2. $\sim q$
   ผล $\sim p$

2. เหตุ 1. $p \rightarrow q$
   2. $r \rightarrow \sim q$
   3. $\sim r$
   ผล p

3. เหตุ 1.ถ้าสมศรีไปเที่ยวทะเลแล้วสมศรีไม่สบาย
   2.สมศรีไม่สบาย
   ผล สมศรีไปเที่ยวทะเล

4. เหตุ 1. $r \rightarrow q$
   2. $p \vee q$
   3. q
   ผล $\sim r$

การพิสูจน์ด้วยวิธี Principle of demonstration

การอ้างเหตุผล $p_1,\, p_2,\, p_3, ..., p_n \vdash q$ จะสมเหตุสมผล ถ้ามีลำดับของข้อความ

$s_1,\, s_2,\, s_3, ..., s_k$ ลำดับสุดท้าย s_k คือ q

โดยแต่ละลำดับ $s_i, i = 1, 2, .., k$ ในลำดับนั้นต้องมีสมบัติอย่างน้อยหนึ่งใน 3 ข้อต่อไปนี้

(1) s_i เป็นเหตุอันหนึ่ง

(2) s_i เป็นสัจนิรันดร์

(3) s_i เป็น logical consequence ของข้อความมาก่อนลำดับนี้

ตัวอย่าง 2.4.5 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $p \rightarrow q,\ \sim q \vdash \sim p$ สมเหตุสมผล

1. $\sim q$ เป็นเหตุอันหนึ่ง
2. $p \rightarrow q$ เป็นเหตุอันหนึ่ง
3. $\sim q \rightarrow \sim p$ โดยกฎแย้งสลับที่ของข้อ 2
4. $\sim p$ จาก 1 และ 3 และ modus ponens (T6)

ตัวอย่าง 2.4.6 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $p \to \sim q,\ \sim r \vee q,\ r\ \vdash \sim p$ สมเหตุสมผล

1. $p \to \sim q$ เป็นเหตุอันหนึ่ง
2. $\sim r \vee q$ เป็นเหตุอันหนึ่ง
3. r เป็นเหตุอันหนึ่ง
4. $r \to q$ โดยสมมูลของข้อ 2
5. q จาก 3 และ 4 และ modus ponens (T6)
6. $q \to \sim p$ โดยกฎแย้งสลับที่ของข้อ 1
7. $\sim p$ จาก 5 และ 6 และ modus ponens (T6)

ตัวอย่าง 2.4.7 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $\sim p \to q,\ \sim q,\ p \to r\ \vdash\ r$ สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.4.8 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $\sim p \to \sim s,\ \sim p \vee q,\ s,\ t \to \sim q\ \vdash \sim t$ สมเหตุสมผล

ตัวอย่าง 2.4.9 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $p \to \sim q,\ \sim r \wedge \sim s,\ r \vee s \vee q,\ p \vee t\ \vdash\ t$ สมเหตุสมผล

การพิสูจน์ทางอ้อม (Indirect proof)

กำหนดให้ c แทนข้อความขัดแย้ง การอ้างเหตุผล $p_1, p_2, p_3, ..., p_n \vdash q$ จะสมเหตุสมผล โดยการพิสูจน์ว่าข้อความ

$$\sim (p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \to q) \to c$$

มีค่าความจริงเป็นจริง นั้นก็คือ

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge ... \wedge p_n \wedge \sim q) \to c$$

มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.4.10 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $p \vee \sim q,\ q\ \vdash\ p$ สมเหตุสมผล

1. $p \vee \sim q$ เป็นเหตุอันหนึ่ง
2. q เป็นเหตุอันหนึ่ง
3. $\sim p$ เป็นเหตุอันหนึ่ง (นิเสธของผลสรุปในการพิสูจน์ทางอ้อม)
4. $\sim q$ จาก 1, 3 และ disjunctive syllogism (T20)
5. $q \wedge \sim q$ จาก 2 และ 4 (เกิดข้อขัดแย้ง c)
6. p จาก 1-5 พิสูจน์โดยวิธีทางอ้อม

ตัวอย่าง 2.4.11 จงแสดงว่าการอ้างเหตุผล $r \vee s,\ \sim s,\ \sim r \vee t\ \vdash\ t$ สมเหตุสมผล

แบบฝึกหัด 2.4

1. จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้ตารางค่าความจริง

1.1 $\sim p \vee q,\ \sim p \to q\ \vdash\ q$

1.2 $p \wedge \sim q,\ q \to \sim r,\ r \wedge p\ \vdash\ q \to p$

1.3 $\sim p \to q,\ q \to p\ \vdash \sim q$

1.4 $p \to (p \to r),\ \sim q \to \sim p,\ p\ \vdash\ r$

2. จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่โดยใช้วิธีขัดแย้ง

2.1 เหตุ 1. $\sim p$
2. $\sim (p \wedge q) \to r$
ผล r

2.2 เหตุ 1. $q \to (r \vee \sim s)$
2. s
3. $s \to q$
ผล $r \wedge s$

2.3 เหตุ 1. $\sim t \to \sim r$
2. $\sim s$
3. $t \to w$
4. $r \vee s$
ผล w

2.4 เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วน้ำจะท่วม
2. น้ำท่วม
ผล ฝนตก

2.5 เหตุ 1. $\sim (p \to q)$
2. $\sim q \to r$
ผล $r \wedge p$

2.6 เหตุ 1. $p \to (\sim q \vee r)$
2. $q \to p$
3. $\sim p$
ผล r

2.7 เหตุ 1. $p \to (q \wedge r)$
2. $q \to \sim r$
3. $s \to r$
4. q
ผล $\sim p$

2.8 เหตุ 1. ถ้าฝนตกแล้วน้ำจะท่วม
2. ฝนตก
ผล น้ำท่วม

3. จงพิสูจน์การอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลโดยใช้วิธี Principle of demonstration

3.1 $p,\ \sim q \vee \sim p,\ \sim q \to (r \vee \sim s)\ \vdash\ s \to r$

3.2 $s \to t,\ p \to (q \to r),\ (s \wedge \sim t) \vee p\ \vdash\ r \vee \sim q$

4. จงพิสูจน์การอ้างเหตุผลต่อไปนี้สมเหตุสมผลโดยใช้วิธีการพิสูจน์ทางอ้อม (indirect proof)

4.1 $p \to \sim q,\ \sim q \to r,\ p\ \vdash\ r$

4.2 $p,\ \sim q \to \sim p,\ q \to (r \vee s)\ \vdash \sim r \to s$

5. จงพิจารณาว่าการอ้างเหตุผลต่อไปนี้ สมเหตุสมผลหรือไม่

เหตุ 1. ถ้า $2 \neq 3$ หรือ $6 > 2$ แล้ว 3 เป็นจำนวนเฉพาะ
2. $2 = 3$
3. $6 \leq 2$
ผล 3 ไม่เป็นจำนวนเฉพาะ

2.5 ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

บทนิยาม 2.5.1 ฟังก์ชันข้อความ (Proposition function) $p(x)$ คือข้อความที่ประกอบไปด้วยตัวแปร x
โดเมน (Domain) หรือเอกภพสัมพัทธ์ (Universe) ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ คือเซตของขอบเขตของ x ที่เราสนใจ

ตัวอย่าง 2.5.2 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ แทนข้อความ $x > 2$

$p(x)$	ข้อความ $x > 2$	ค่าความจริง
$p(1)$	$1 > 2$	F
$p(2)$	$2 > 2$	F
$p(3)$	$3 > 2$	T
$p(4)$	$4 > 2$	T

ตัวอย่าง 2.5.3 ให้ $\mathcal{U} = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ แทนข้อความ $x^2 > 0$

$p(x)$	ข้อความ $x^2 > 0$	ค่าความจริง
$p(-2)$		
$p(-1)$		
$p(0)$		
$p(1)$		
$p(2)$		

ตัวอย่าง 2.5.4 ให้ $\mathcal{U} = \{-4, -3, -2, -1\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ แทนข้อความ $\sqrt{x^2} = x$

$p(x)$	ข้อความ $\sqrt{x^2} = x$	ค่าความจริง
$p(-4)$		
$p(-3)$		
$p(-2)$		
$p(-1)$		

ตัวอย่าง 2.5.5 ให้ $\mathcal{U} = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ แทนข้อความ

ถ้า $x > 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$

$p(x)$	ข้อความ ถ้า $x > 0$ แล้ว $\sqrt{x^2} = x$	ค่าความจริง
$p(-2)$		
$p(-1)$		
$p(0)$		
$p(1)$		
$p(2)$		

วิธีบ่งปริมาณ (Quantification) ของฟังก์ชันข้อความมีได้ 2 แบบ คือ

บทนิยาม 2.5.6 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$

แบบที่ 1 นำหน้าฟังก์ชันข้อความด้วยวลีบ่งปริมาณ

ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$

สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$\forall x \in \mathcal{U}\ [p(x)]$ หรือ $\forall x\ [p(x)]$ ในหนังสือบางเล่มใช้ $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$

เรียก $\forall$ ว่า**ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด** (universal quantifier)

แบบที่ 2 นำหน้าฟังก์ชันข้อความด้วยวลีบ่งปริมาณ

มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า

มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$\exists x \in \mathcal{U}\ [p(x)]$ หรือ $\exists x\ [p(x)]$ ในหนังสือบางเล่มใช้ $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$

เรียก $\exists$ ว่า**ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง** (existential quantifier) เรียกสั้นๆว่า มี

กำหนดให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ $\mathbb{Q}^c$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ
$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม $\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

ตัวอย่าง 2.5.7 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญญาลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 = x$
2. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะได้ว่า $x > 0$
3. จำนวนจริงทุกจำนวนมีค่าเป็นบวกเสมอ
4. ไม่มีจำนวนนับใดเลยที่มีค่าน้อยกว่า 1
5. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่าเป็นลบ
6. ไม่มีจำนวนเต็ม x ใดเลย ที่ $x^2 + x + 1 = 0$

ตัวอย่าง 2.5.8 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1. ไม่มีผลเฉลยใดของสมการ $x^2 - 4 = 0$ เป็นจำนวนจริงบวก
2. จำนวนเต็มบางจำนวนเป็นจำนวนคี่หรือจำนวนคู่
3. จำนวนเต็มบางจำนวนเป็นจำนวนคี่และหาร 3 ลงตัว
4. จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

ตัวอย่าง 2.5.9 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปข้อเขียน

1. $\forall x \in \mathbb{R}\ [\, x > 0 \,]$
2. $\forall x \in \mathbb{R}\ [\, (x < 0) \vee (x > 0) \,]$
3. $\exists x \in \mathbb{Z}\ [\, (x \neq 1) \to (x^2 > 1) \,]$
4. $\forall n \in \mathbb{N}\ [\, n > 1 \,]$
5. $\forall x \in \mathbb{R}^+\ [\, (x < 1) \to (x^2 < x) \,]$
6. $\forall x \in \mathbb{R}\ [\, x > 0 \,] \to \exists x \in \mathbb{Z}\ [\, x < 0 \,]$

ค่าความจริงของตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.5.10 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$

- ข้อความ $\forall x\ [\,p(x)\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

  ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ $p(x)$ มีค่าความเป็น**จริง** นอกนั้นข้อความนี้เป็น**เท็จ**

- ข้อความ $\exists x\ [\,p(x)\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

  มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็น**จริง** นอกนั้นข้อความนี้เป็น**เท็จ**

ตัวอย่าง 2.5.11 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของ

$\forall x\ [\,x > 0\,]$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1	$1 > 0$	T
2	$2 > 0$	T
3	$3 > 0$	T
4	$4 > 0$	T

ดังนั้นข้อความ $\forall x\ [\,x > 0\,]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง**

$\exists x\ [\,x < 2\,]$

x	ข้อความ $x < 2$	ค่าความจริง
1	$1 < 2$	T
2	$2 < 2$	F
3	$3 < 2$	F
4	$4 < 2$	F

ดังนั้นข้อความ $\exists x\ [\,x < 2\,]$ มีค่าความจริงเป็น**จริง**

ตัวอย่าง 2.5.12 ให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{\,-2, -1,\ 1,\ 2\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\exists x\ [\,x^2 + 1 = 0\,]$

x	ข้อความ $x^2 + 1 = 0$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

2. $\forall x\ [\,|x| > x\,]$

x	ข้อความ $|x| > x$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

3. $\exists x\ [\,x^2 = x\,]$

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

4. $\exists x\ [\,-x = x\,]$

x	ข้อความ $-x = x$	ค่าความจริง
-2		
-1		
1		
2		

ตัวอย่าง 2.5.13 ให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x\ [\,(x^2 = x) \to (x > 0)\,]$

x	ข้อความ $(x^2 = x) \to (x > 0)$	ค่าความจริง
-2		
-1		
0		
1		
2		

2. $\forall x\ [\,x^2 = x\,] \to \forall x\ [\,x > 0\,]$

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง		ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-2					
-1					
0					
1					
2					

3. $\exists x\ [\,x^2 > x\,] \to \forall x\ [\,|x| > x\,]$

x	ข้อความ $x^2 > x$	ค่าความจริง		ข้อความ $\lvert x\rvert > x$	ค่าความจริง
-2					
-1					
0					
1					
2					

4. $\exists x\ [\,(x > 1) \wedge (x < 3)\,] \wedge \exists x\ [\,x^2 < x\,]$

x	ข้อความ $(x > 1) \wedge (x < 3)$	ค่าความจริง		ข้อความ $x^2 < x$	ค่าความจริง
-2					
-1					
0					
1					
2					

ตัวอย่าง 2.5.14 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณา ถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้

1. $\square$ ถ้า $\forall x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $\exists x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
2. $\square$ ถ้า $\forall x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $\exists x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ
3. $\square$ ถ้า $\exists x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง แล้ว $\forall x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง
4. $\square$ ถ้า $\exists x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ แล้ว $\forall x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

ตัวอย่าง 2.5.15 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x\,[p(x)] \to \exists x\,[p(x)]$
2. $\exists x\,[p(x)] \to \forall x\,[p(x)]$
3. $\forall x\,[p(x)] \leftrightarrow \exists x\,[p(x)]$
4. $\forall x\,[p(x)] \vee \exists x\,[p(x)]$
5. $\forall x\,[p(x)] \wedge \exists x\,[p(x)]$

ตัวอย่าง 2.5.16 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$\forall x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\exists x\,[q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x\,[p(x) \to q(x)]$
2. $\forall x\,[p(x) \vee q(x)]$
3. $\exists x\,[p(x) \wedge q(x)]$
4. $\exists x\,[p(x) \leftrightarrow q(x)]$

ตัวอย่าง 2.5.17 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์

$\forall x\,[p(x)]$ มีค่าความจริงเป็นจริง และ $\exists x\,[q(x)]$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ

พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x\,[p(x) \to q(x)]$
2. $\forall x\,[p(x) \vee q(x)]$
3. $\exists x\,[p(x) \wedge q(x)]$
4. $\exists x\,[p(x) \leftrightarrow q(x)]$

ตัวอย่าง 2.5.18 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของ**จำนวนนับ** พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall n$ [2 หาร n ลงตัว $\rightarrow$ 4 หาร n ลงตัว]
2. $\forall n$ [4 หาร n ลงตัว $\rightarrow$ 2 หาร n ลงตัว]
3. $\exists n$ [n เป็นจำนวนเฉพาะ $\wedge$ $(n+2)$ เป็นจำนวนคู่]
4. $\forall n$ [2 หาร $n(n+1)$ ลงตัว]

ตัวอย่าง 2.5.19 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของ**จำนวนเต็ม** พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall n\ [\,(n^2 = 4) \leftrightarrow (n = 2)\,]$
2. $\forall n$ [3 หาร $(n^3 - n)$ ลงตัว]
3. $\forall n$ [ห.ร.ม. ของ n และ $n+2$ เท่ากับ 2]
4. $\exists n$ [$n^2 + n - 1$ เป็นจำนวนเฉพาะ]
5. $\exists n$ [n หาร $(n+1)$ ลงตัว]
6. $\forall n$ [n เป็นจำนวนคี่ $\rightarrow$ 4 หาร $(n^2 - 1)$ ลงตัว]

ตัวอย่าง 2.5.20 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของ**จำนวนจริง** พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\exists x\ [\,x = x + 1\,]$
2. $\forall x\ [\,x^2 > 0\,]$
3. $\forall x\ [\,x = x + 0\,]$
4. $\exists x\ [\,x^2 + 1 = 0\,]$
5. $\forall x\ [\,x^2 > x\,]$
6. $\exists x\ [\,(x \leq 0) \wedge (x \geq 0)\,]$
7. $\exists x\ [\,(x \in \mathbb{Q}) \vee (x \in \mathbb{Q}')\,]$
8. $\forall x\ [\,(x \neq 0) \rightarrow (x^2 > 0)\,]$
9. $\forall x\ [\,(x > 0) \rightarrow (x^2 > x)\,]$
10. $\forall x\ [\,(x \neq 0) \leftrightarrow (x^2 > 0)\,]$

ตัวบ่งปริมาณหลายตัวแปร

บทนิยาม 2.5.21 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x,y)$ ตัวบ่งปริมาณสองตัวแปรคือ

- $\forall x \in \mathcal{U}\, \forall y \in \mathcal{U}\, [p(x,y)]$ หรือ $\forall x\, \forall y\, [\, p(x,y)\,]$ หรือ $\forall x, y \in \mathcal{U}\, [\, p(x,y)\,]$
- $\forall x \in \mathcal{U}\, \exists y \in \mathcal{U}\, [p(x,y)]$ หรือ $\forall x\, \exists y\, [\, p(x,y)\,]$
- $\exists x \in \mathcal{U}\, \forall y \in \mathcal{U}\, [p(x,y)]$ หรือ $\exists x\, \forall y\, [\, p(x,y)\,]$
- $\exists x \in \mathcal{U}\, \exists y \in \mathcal{U}\, [p(x,y)]$ หรือ $\exists x\, \exists y\, [\, p(x,y)\,]$ หรือ $\exists x, y \in \mathcal{U}\, [\, p(x,y)\,]$

ตัวอย่าง 2.5.22 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1. ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y ซึ่ง $x + y = 0$

2. สำหรับจำนวนนับ n และ m จะได้ว่า $n + m > 1$

3. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x = y + 1$ ทุกๆจำนวนเต็ม y

4. มีจำนวนจริง x และ y ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 1$

ตัวอย่าง 2.5.23 จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปข้อเขียน

1. $\forall x, y \in \mathbb{R}\ [\, x + y > 0\,]$

2. $\forall x \in \mathbb{Z}\, \exists y \in \mathbb{Z}\ [\, (x \neq y) \vee (x = y)\,]$

3. $\exists x \in \mathbb{N}\, \forall y \in \mathbb{Z}\ [\, (x > y) \rightarrow (x - y > 0)\,]$

4. $\exists x \in \mathbb{Q}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, x^2 + y^2 = 1\,]$

ตัวอย่าง 2.5.24 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของ $\forall x\, \forall y\ [\, xy \geq 1\,]$

x	y	$xy \geq 1$	ค่าความจริง
1	1	$1(1) \geq 1$	T
	2	$1(2) \geq 1$	T
	3	$1(3) \geq 1$	T
2	1	$2(1) \geq 1$	T
	2	$2(2) \geq 1$	T
	3	$2(3) \geq 1$	T
3	1	$3(1) \geq 1$	T
	2	$3(2) \geq 1$	T
	3	$3(3) \geq 1$	T

ดังนั้นข้อความ $\forall x \forall y\ [\, xy \geq 1\,]$ มีค่าความจริงเป็นจริง

ตัวอย่าง 2.5.25 ให้ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของ

1. $\forall x, y\ [\, x + y \geq 0\,]$
2. $\forall x\, \exists y\ [\, (-1)^x = y\,]$
3. $\exists x\, \forall y\ [\, (-1)^x = y\,]$
4. $\exists x\, \exists y\ [\, xy > 1\,]$

ตัวอย่าง 2.5.26 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของ**จำนวนเต็ม** พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\exists m\, \exists n\ [\, m + n = mn\,]$
2. $\forall m\, \exists n\ [\, m \neq n \rightarrow |m - n| > 0\,]$
3. $\forall m\, \forall n\ [\, mn = 5 \rightarrow m + n = 6\,]$
4. $\exists m\, \exists n\ [\, m \neq n \rightarrow m^n = n^m\,]$

ตัวอย่าง 2.5.27 กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของ**จำนวนจริง** พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\exists x\, \exists y\ [\, x^2 + y^2 = 2\,]$
2. $\forall x\, \exists y\ [\, x + y = 0\,]$
3. $\exists x\, \forall y\ [\, x + y = 0\,]$
4. $\forall x\, \forall y\ [\, x^2 + y^2 \geq 2xy\,]$

สมมูลของตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.5.28 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ และ $q(x)$ สมมูลของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

- $\forall x\ [p(x)] \equiv \forall x\ [q(x)]$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) \equiv q(x)$ ทุกๆ $x \in \mathcal{U}$
- $\exists x\ [p(x)] \equiv \exists x\ [q(x)]$ ก็ต่อเมื่อ $p(x) \equiv q(x)$ ทุกๆ $x \in \mathcal{U}$

ตัวอย่าง 2.5.29 จงหาสมมูลของประพจน์ต่อไปนี้ในรูปแบบอื่น

1. $\exists x\ [\,p(x) \to q(x)\,]$
2. $\forall x\ [\,p(x) \vee q(x)\,]$
3. $\exists x\,\forall y\ [\,\sim p(x,y) \to q(x,y)\,]$
4. $\forall x\,\forall y\ [\,p(x,y) \leftrightarrow q(x,y)\,]$
5. $\exists x\ [\,p(x)\,] \to \forall x\ [\,q(x)\,]$
6. $\forall x\ [\,p(x)\,] \vee \exists x\ [\,\sim q(x)\,]$

ตัวอย่าง 2.5.30 จงหาสมมูลของประพจน์ต่อไปนี้ในรูปแบบอื่น

1. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x > 0$ แล้ว $x^2 > 0$
2. มีจำนวนนับ n และ m ซึ่ง $n + m$ เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ nm เป็นจำนวนคู่
3. ถ้า $x + y = 0$ แล้ว $x = -y$ ทุกๆจำนวนจริง x, y

นิเสธของตัวบ่งปริมาณ

บทนิยาม 2.5.31 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของฟังก์ชันข้อความ $p(x)$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

- นิสเธของ $\forall x\ [p(x)]$ คือ $\sim \forall x\ [p(x)] \equiv \exists x\ [\sim p(x)]$
- นิสเธของ $\exists x\ [p(x)]$ คือ $\sim \exists x\ [p(x)] \equiv \forall x\ [\sim p(x)]$

ตัวอย่าง 2.5.32 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x\ [\,p(x) \to q(x)\,]$
2. $\forall x\ [\,p(x) \vee q(x)\,]$
3. $\exists x\ [\,p(x) \to q(x) \vee r(x)\,]$
4. $\forall x\ [\,\sim p(x) \wedge q(x)\,]$
5. $\exists x\,\forall y\ [\,\sim p(x,y) \to q(x,y)\,]$
6. $\forall x\,\forall y\ [\,p(x,y) \leftrightarrow q(x,y)\,]$

7. $\exists x\ [\,p(x)\,] \rightarrow \forall x\ [\,q(x)\,]$

8. $\forall x\ [\,p(x)\,] \vee \exists x\ [\,\sim q(x)\,]$

ตัวอย่าง 2.5.33 ให้เอกภพสัมพัทธ์คือเซตจำนวนจริง จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x\ [\,x^2 = x\,]$

2. $\forall x\ [\,(x > 0) \rightarrow (x^2 > 0)\,]$

3. $\exists x\ [\,(x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)\,]$

4. $\forall x\ [\,(x \geq 0 \vee x \leq 0) \rightarrow (x \neq 0)\,]$

5. $\exists x\ [\,x \neq 1] \rightarrow \forall x\ [\,(x > 1) \vee (x < 1)\,]$

6. $\forall x\,\forall y\ [\,(xy = 1) \vee (x + y = 1)\,]$

7. $\exists x\,\forall y\ [\,xy = 0 \vee (x < 0 \wedge x > 0)\,]$

8. $\forall x\,\exists y\ [\,xy > 0 \rightarrow (x > 0 \wedge y > 0)\,]$

9. $\exists x\ [\,|x| = x\,] \rightarrow \forall x \exists y\ [\,x + y > 0\,]$

10. $\forall x\ [\,x \neq 0 \rightarrow \exists y\ [\,xy > 0 \vee xy < 0\,]\,]$

ตัวอย่าง 2.5.34 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x > 0$ แล้ว $x^2 > 0$

2. ทุกจำนวนจริง x ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x + y = 0$ บางจำนวนจริง y

3. ทุกๆเมทริกซ์ A ถ้า $\det(A) \neq 0$ แล้ว A^{-1} หาค่าได้

4. มีจำนวนนับ n และ m ซึ่ง $n + m$ เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ nm เป็นจำนวนคู่

5. มีจำนวนเต็ม x และ y ถ้า $xy = 6$ แล้ว $x + y = 6$

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ
   1.1 มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $|x| = x$
   1.2 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามจะได้ $x^2 > 0$
   1.3 จำนวนนับทุกจำนวนมีค่ามากกว่า 1
   1.4 ไม่มีจำนวนตรรกยะใดเลยที่เป็นจำนวนบวก
   1.5 มีจำนวนจริง x และ y ซึ่ง $x + y > 0$
   1.6 มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m > n$ ทุกๆจำนวนเต็ม n
2. จงแปลงข้อความต่อไปนี้ในรูปข้อเขียน
   2.1 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\, x \neq 0 \,]$
   2.2 $\exists x \in \mathbb{Z}\ [\, x + 2 > |x| \,]$
   2.3 $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, x > y^2 \to y^2 > x \,]$
   2.4 $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, x < y \vee xy < 0 \,]$
3. ให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $C = \{1, 2, 3, 4\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความ
   3.1 $\forall x \in A\ [\, x + 1 \geq x \,]$
   3.2 $\exists x \in C\ [\, x(x + 1) = x \,]$
   3.3 $\forall x \in B\ [\, x > 0 \to x^2 > x \,]$
   3.4 $\forall x \in A\, \forall y \in A\ [\, x \neq y \to x > y \,]$
   3.5 $\forall x \in B\, \exists y \in B\ [\, xy = 1 \,]$
   3.6 $\exists x \in C\, \exists y \in C\ [\, x + y < xy \,]$
4. พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้
   4.1 $\forall n \in \mathbb{N}$ [n เป็นจำนวนคี่ $\vee$ n เป็นจำนวนคู่]
   4.2 $\exists n \in \mathbb{N}$ [10 หาร $n^2 + 1$ ลงตัว]
   4.3 $\forall n \in \mathbb{Z}$ [$n(n + 1)$ เป็นจำนวนคู่]
   4.4 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\, (x < 0) \to (x^3 < 0) \,]$
   4.5 $\exists x \in \mathbb{R}\ [\, x^2 + x + 1 = 0 \,]$
   4.6 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\, (x \geq 0) \to (-x < 0) \,]$
5. พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้
   5.1 $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, (x > y) \to (y - x < 0) \,]$
   5.2 $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\ [\, (x > y) \vee (x < y) \vee (x = y) \,]$
   5.3 $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, x \neq 0 \to xy \leq 0 \,]$
   5.4 $\exists x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, \sqrt{x + y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \,]$
   5.5 $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, x = y \to x^2 = y^2 \,]$
   5.6 $\forall x \in \mathbb{R}\, \forall y \in \mathbb{R}\ [\, x^2 = y^2 \to x = y \,]$
6. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้
   6.1 $\forall x\ [\, \sqrt{x} \geq 0 \,]$
   6.2 $\forall x\ [\, x = 1 \to |x| > 2 \,]$
   6.3 $\exists x\ [\, (x < 3) \wedge (x > 3) \,]$
   6.4 $\forall x\, \forall y\ [\, xy > 0 \to \frac{x}{y} > 0 \,]$
   6.5 $\exists x\, \forall y\ [\, x = y \leftrightarrow x^2 = y^2 \,]$
   6.6 $\exists x\, \exists y\ [\, (xy = 10 \wedge x > 5) \to y > 2 \,]$
7. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้
   7.1 ไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่มากกว่าศูนย์
   7.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x + y = y$ สำหรับทุกๆจำนวนจริง y
   7.3 ทุกๆจำนวนเต็ม m, n ถ้า $m + n = mn$ แล้ว $n^m = 1$

บทที่ 3

วิธีการพิสูจน์ (Methods of Proof)

ในทางคณิตศาสตร์นั้นนักคณิตศาสตร์จะสร้างโลกของตัวเองขึ้นมาโดยสมมติสิ่งที่เรียกว่า "อนิยาม (undefined term)" ขึ้นมาจากนั้นก็ให้คำจำกัดความของสิ่งเหล่านั้นเรียกว่า "นิยาม (defined term)" และเพิ่มเติมด้วยข้อความจำนวนหนึ่งซึ่งถือว่าจริงในโลกโดยไม่ต้องพิสูจน์เรียกว่า "สัจพจน์ (axiom)" และใช้เครื่องมือต่างๆเหล่านี้เพื่อหาความจริงภายใต้สิ่งที่กำหนดเรียกว่า "ทฤษฎี (theorem)" ขั้นตอนสำคัญในการค้นพบความจริงเหล่านั้นคือการ "พิสูจน์ (proof)" หรือ "อ้างเหตุผล (argument)" โดยกฎเกณฑ์การพิสูจน์เหล่านั้นได้มาจาก "ตรรกศาสตร์ (logic)" ([1] หน้า 51)

3.1 การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข (Proofs of Conditional statements)

การพิสูจน์ข้อความ $p \to q$

สามารถทำได้ 3 วิธีดังนี้

1. พิสูจน์โดยวิธีตรง (direct proof)
2. พิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)
3. พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (proof by contradiction) เราจะกล่าวในหัวข้อ 3.4

1. **พิสูจน์โดยวิธีตรง** (direct proof)
เนื่องจาก $p \to q$ เป็นเท็จเพียงกรณีเดียวคือ p เป็นจริง และ q เป็นเท็จ การจะพิสูจน์ข้อความข้อต้นเป็นจริงทุกๆกรณีเพียงแค่พิสูจน์ว่า ถ้า p เป็นจริง แล้ว q เป็นจริงเสมอ ดังสรุป

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	ส่วนของการพิสูจน์
ดังนั้น	q	เป็นจริง

บทนิยาม 3.1.1 เราจะเรียกจำนวนเต็ม a ที่ไม่ใช่ศูนย์ว่าหารจำนวนเต็ม b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a|b$

ถ้ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $\quad b = ak$

และเรียก a ว่า**ตัวหาร** (divisor) หรือ**ตัวประกอบ** (factor) ของ b ถ้า a หาร b ไม่ลงตัวเขียนแทนด้วย $a \nmid b$

บทนิยาม 3.1.2 **จำนวนคู่** (even number) คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว หรือกล่าวได้ว่า

ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $2|a$ (หรือมีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$)

และจำนวนเต็มที่ไม่ใช่จำนวนคู่เรียกว่า **จำนวนคี่** (odd number) หรือ มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k + 1$

ตัวอย่าง 3.1.3 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่ "

เราจะเขียนข้อความในรูปสัญญาลักษณ์คือ $\forall n \in \mathbb{Z}$ [n เป็นจำนวนคู่ $\rightarrow n^2$ เป็นจำนวนคู่]

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ
สมมติว่า n เป็นจำนวนคู่
โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k$ แล้วจะได้ว่า

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

ให้ $p = 2k^2$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n^2 = 2p$
จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคู่ $\square$

ตัวอย่าง 3.1.4 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n เป็นจำนวนคี่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคี่ "

ตัวอย่าง 3.1.5 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $m + n$ เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 3.1.6 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว mn เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 3.1.7 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ซึ่ง $a \neq 0$ ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(2b + 3c)$ "

2. **พิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่** (contrapositive proof)
เนื่องจาก $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$ ดังนั้น

สมมติ $\quad \sim q \quad$ เป็นจริง

$\vdots \quad$ ส่วนของการพิสูจน์

ดังนั้น $\quad \sim p \quad$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.8 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่ "

เราจะเขียนข้อความในรูปสัญญาลักษณ์คือ $\forall n \in \mathbb{Z}$ [n^2 เป็นจำนวนคู่ $\rightarrow n$ เป็นจำนวนคู่] โดยกฎแย้งสลับที่จะได้ว่า $\forall n \in \mathbb{Z}$ [n ไม่เป็นจำนวนคู่ $\rightarrow n^2$ ไม่เป็นจำนวนคู่] หรือ $\forall n \in \mathbb{Z}$ [n เป็นจำนวนคี่ $\rightarrow n^2$ เป็นจำนวนคี่]

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ สมมติว่า n เป็นจำนวนคี่
โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$ แล้วจะได้ว่า

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ให้ $p = 2k^2 + 2k$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n^2 = 2p + 1$
จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่ $\square$

ตัวอย่าง 3.1.9 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n^2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว n เป็นจำนวนคี่ "

การพิสูจน์ข้อความ $p \to (q \vee r)$

เนื่องจาก $p \to (q \vee r) \equiv p \to (\sim q \to r)$ ดังนั้น

สมมติ p และ $\sim q$ เป็นจริง

$\vdots$ ส่วนของการพิสูจน์

ดังนั้น r เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.10 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่ หรือ n เป็นจำนวนคี่ "

เขียนข้อความในรูปสัญญาลักษณ์คือ $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ $[m{+}n$ เป็นจำนวนคี่ $\to (m$ เป็นจำนวนคี่ $\vee$ n เป็นจำนวนคี่ $)]$

บทพิสูจน์. ให้ m และ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ
สมมติว่า $n+m$ เป็นจำนวนคี่ และ m ไม่เป็นจำนวนคี่ (เป็นจำนวนคู่)
โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k และ p ซึ่ง $n+m=2k+1$ และ $m=2p$ แล้ว

$$\begin{aligned} m+n &= 2k+1 \\ 2p+n &= 2k+1 \\ n &= 2k-2p+1 = 2(k-p)+1 \end{aligned}$$

ให้ $d=k-p$ เนื่องจาก k และ p เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น d เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม d ซึ่งทำให้ $n=2d+1$
จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า n เป็นจำนวนคี่ □

ตัวอย่าง 3.1.11 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า mn เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 3.1.12 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน (counterexample)

1. ถ้า mn เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่ หรือ n เป็นจำนวนคี่
2. ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่
3. สำหรับจำนวนเต็ม x ถ้า $3x$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว x เป็นจำนวนคี่

บทนิยาม 3.1.13 ให้ x เป็นจำนวนจริง เราจะเรียก x ว่า**จำนวนตรรกยะ** (rational number) ถ้ามีจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $b \neq 0$ แล้ว $x=\frac{a}{b}$ จำนวนจริงที่ไม่ใช่ตรรกยะเราเรียกว่า**จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

ตัวอย่าง 3.1.14 จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

1. ผลบวกของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ
2. ผลคูณของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ
3. ผลบวกของจำนวนอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

การพิสูจน์ข้อความ $p \to (q \wedge r)$

เนื่องจาก $p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 ข้อความเป็นจริง

1. $p \to q$
2. $p \to r$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	ส่วนของการพิสูจน์
ดังนั้น	q	เป็นจริง

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	ส่วนของการพิสูจน์
ดังนั้น	r	เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.1.15 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4|a^2$ และ a^2+1 เป็นจำนวนคี่ "

เขียนข้อความในรูปสัญลักษณ์คือ $\forall a \in \mathbb{Z}$ [a เป็นจำนวนคู่ $\to (4|a^2 \;\wedge\; a^2+1$ เป็นจำนวนคี่ $)$]

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ
สมมติว่า a เป็นจำนวนคู่ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ แล้ว

$$a^2 = (2k)^2 = 4k^2$$

ให้ $p = k^2$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $a^2 = 4p$ จากบทนิยาม 3.1.1 สรุปได้ว่า $4|a^2$

$$a^2+1 = (2k)^2+1 = 4k^2+1 = 2(2k^2)+1$$

ให้ $d = 2k^2$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น d เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม d ซึ่งทำให้ $a^2+1 = 2d+1$ จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า a^2+1 เป็นจำนวนคี่ □

ตัวอย่าง 3.1.16 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m เป็นจำนวนคี่ แล้ว $4|(m^2+3)$ และ $4|(m^2-1)$ "

บทนิยาม 3.1.17 ให้ $x \in \mathbb{R}$ **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของ x เขียนแทนด้วย $|x|$ นิยามโดย $|x| = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 0 & \text{เมื่อ } x = 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$

ตัวอย่าง 3.1.18 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับจำนวนจริง x ถ้า $1 \le x \le 5$ แล้ว $|x-3| \le 3$ และ $|x+1| \ge 1$ "

แบบฝึกหัด 3.1

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธิพิสูจน์ที่เหมาะสม

    1.1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่

    1.2 ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3x$ เป็นจำนวนคู่

    1.3 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3n + 5m$ เป็นจำนวนคู่

    1.4 ถ้า m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว nm เป็นจำนวนคู่

    1.5 ถ้า $3mn$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่

    1.6 ถ้า m^3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่

    1.7 ถ้า m^3 เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่

    1.8 สำหรับจำนวนเต็ม a, b ถ้า $a + b$ เป็นจำนวนคู่ และ a และ b เป็นจำนวนคู่ หรือ a และ b เป็นจำนวนคี่

    1.9 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a|b$ และ $b|c$ แล้ว $a|c$

    1.10 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a|b$ และ $a|c$ แล้ว $a|(b + c)$

    1.11 สำหรับจำนวนเต็ม a ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $3|2a$ แล้ว $3|a$

    1.12 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a|b$ และ $a|(b + c)$ แล้ว $a|c$

    1.13 สำหรับจำนวนจริง x ถ้า $0 < x < 1$ แล้ว $\frac{1}{1-x} > 1$

    1.14 สำหรับจำนวนจริง x ถ้า $-4 < x \leq 1$ แล้ว $|x - 2| \geq 1$ และ $|x - 1| < 5$

    1.15 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $xy = 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว $y = 0$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

    2.1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^3 เป็นจำนวนคู่

    2.2 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $n - m$ เป็นจำนวนคู่

    2.3 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $4m$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนคู่

    2.4 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม และ $n^5 - n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่

    2.5 สำหรับจำนวนเต็ม m, n ถ้า $m^2 + n^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่

    2.6 ผลบวกของจำนวนตรรกยะกับอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

    2.7 ผลคูณของจำนวนตรรกยะกับอตรรกยะเป็นจำนวนอตรรกยะ

3.2 การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี (Proof by cases)

การพิสูจน์ข้อความ $(p \vee q) \to r$

เนื่องจาก $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 กรณีเป็นจริง

กรณีที่ 1 $p \to r$

กรณีที่ 2 $q \to r$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	ส่วนของการพิสูจน์
ดังนั้น	r	เป็นจริง

สมมติ	q	เป็นจริง
	$\vdots$	ส่วนของการพิสูจน์
ดังนั้น	r	เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.2.1 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่ "

เขียนข้อความในรูปสัญญาลักษณ์คือ $\forall a \in \mathbb{Z}$ [(a เป็นจำนวนคู่ $\vee$ a เป็นจำนวนคี่) $\to a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่)]

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ
กรณีที่ 1 สมมติว่า a เป็นจำนวนคู่ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k$ แล้ว

$$a^2 + a = (2k)^2 + 2k = 4k^2 + 2k = 2(2k^2 + k)$$

ให้ $p = 2k^2 + k$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $a^2 + a = 2p$ จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่
กรณีที่ 2 สมมติว่า a เป็นจำนวนคี่ โดยบทนิยาม 3.1.2 จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม c ซึ่ง $a = 2c + 1$ แล้ว

$$a^2 + a = (2c + 1)^2 + (2c + 1) = 4c^2 + 4c + 1 + 2c + 1 = 2(2c^2 + 3c + 1)$$

ให้ $m = 2c^2 + 3c + 1$ เนื่องจาก c เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น m เป็นจำนวนเต็ม นั้นคือมีจำนวนเต็ม m ซึ่งทำให้ $a^2 + a = 2m$ จากบทนิยาม 3.1.2 สรุปได้ว่า $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่ $\square$

ตัวอย่าง 3.2.2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $5n^2 + 3n + 7$ เป็นจำนวนคี่

ตัวอย่าง 3.2.3 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่

สำหรับ $(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \to r$ ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง n กรณีเป็นจริง

กรณีที่ 1 $p_1 \to r$

กรณีที่ 2 $p_2 \to r$

$\vdots$

กรณีที่ n $p_n \to r$

ตัวอย่าง 3.2.4 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า $x = -1$ หรือ $x = 0$ หรือ $x = 1$ แล้ว $x^3 = x$ "

ทฤษฎีบท 3.2.5 (Division Algorithm) ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม โดยที่ $a \neq 0$ แล้วมีจำนวนเต็ม q และ r เพียงคู่เดียวที่ทำให้

$$b = aq + r \qquad \text{โดยที่} \quad 0 \leq |r| < |a|$$

เรียก a ว่าตัวหาร (denominator) b ว่าตัวถูกหาร (numerator) q ว่าผลหาร (quotient) และ r ว่าเศษ (remainder)

การพิสูจน์ทฤษฎีบทนี้ดูได้ในวิชาทฤษฎีจำนวน หรือ [9] ทฤษฎีบทนี้จะช่วยในการแบ่งกรณีของจำนวนเต็ม เช่น

- จำนวนเต็ม a ถูกแบ่งด้วยการหาร 2 ได้ 2 กรณีคือ $a = 2k$ และ $a = 2k + 1$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว
- จำนวนเต็ม a ถูกแบ่งด้วยการหาร 3 ได้ 3 กรณีคือ $a = 3k$ และ $a = 3k + 1$ และ $a = 3k + 2$ สำหรับจำนวนเต็ม k บางตัว

ตัวอย่าง 3.2.6 จงแสดงว่า $3 \mid a(a^2 + 2)$ ไม่ว่า a เป็นจำนวนเต็มใดๆก็ตาม

บทพิสูจน์. ให้ a เป็นจำนวนเต็มใดๆ
กรณีที่ 1 $a = 3k$ แล้ว

$$a(a^2 + a) = 3k((3k)^2 + 2) = 3k(9k^2 + 2) = 3(9k^3 + 2k)$$

ให้ $p = 9k^3 + 2k$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ นั้นคือมี $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a(a^2 + a) = 3p$ ดังนั้น $3|a(a^2 + a)$
กรณีที่ 2 $a = 3k + 1$ แล้ว

$$\begin{aligned} a(a^2 + a) &= (3k + 1)((3k + 1)^2 + 2) = (3k + 1)(9k^2 + 6k + 1 + 2) \\ &= (3k + 1)(9k^2 + 6k + 3) = 3[(3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)] \end{aligned}$$

ให้ $p = (3k + 1)(3k^2 + 2k + 1)$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a(a^2 + a) = 3p$ ดังนั้น $3|a(a^2 + a)$
กรณีที่ 3 $a = 3k + 2$ แล้ว

$$\begin{aligned} a(a^2 + a) &= (3k + 2)((3k + 2)^2 + 2) = (3k + 2)(9k^2 + 12k + 4 + 2) \\ &= (3k + 2)(9k^2 + 12k + 6) = 3[(3k + 2)(3k^2 + 4k + 2)] \end{aligned}$$

ให้ $p = (3k+2)(3k^2+4k+2)$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a(a^2+a) = 3p$ ดังนั้น $3|a(a^2+a)$ □

ตัวอย่าง 3.2.7 จงพิสูจน์ว่า " ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนนับใดก็ตาม $2|n(n + 1)$ "

ตัวอย่าง 3.2.8 จงแสดงว่า $3 \mid a(2a^2 + 7)$ สำหรับจำนวนเต็ม a

ตัวอย่าง 3.2.9 จงแสดงว่า $8 \mid (a^2 - 1)$ เมื่อ a เป็นจำนวนเต็มคี่

ตัวอย่าง 3.2.10 จงแสดงว่ากำลังสองของจำนวนเต็มใดๆจะอยู่ในรูป $3k$ หรือ $3k + 1$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   1.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $7n^2 + n + 2$ เป็นจำนวนคู่

   1.2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + n + 1$ เป็นจำนวนคี่

   1.3 ไม่ว่า m จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $m^3 - m + 3 + 1$ เป็นจำนวนคี่

   1.4 $n^2 + n$ เป็นจำนวนคู่ ทุกๆจำนวนเต็ม n

   1.5 สำหรับจำนวนเต็ม n ถ้า $3|n^2$ แล้ว $3|n$

   1.6 สำหรับจำนวนเต็ม n ถ้า $3|(n^2 - n)$ แล้ว $6|(n^2 - n)$

   1.7 จงแสดงว่ากำลังสามของจำนวนเต็มใดๆจะอยู่ในรูป $9k$ หรือ $9k + 1$ หรือ $9k + 8$ สำหรับบางจำนวนเต็ม k

   1.8 จงแสดงว่า $16 \,|\, (n^4 + 4n^2 + 11)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มคี่

   1.9 $4 \,|\, (n^2 - 1)$ สำหรับจำนวนเต็มคี่ n

   1.10 $6 \,|\, n(n + 1)(n + 2)$ สำหรับจำนวนเต็ม n

   1.11 $6 \,|\, n(n + 1)(2n + 1)$ สำหรับจำนวนเต็ม n

   1.12 $32 \,|\, (a^2 + 3)(a^2 + 7)$ สำหรับจำนวนเต็มคี่ a

   1.13 $30 \,|\, (n^5 - n)$ สำหรับจำนวนเต็ม n

   1.14 $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 0$

   1.15 $\forall x \in \mathbb{R},\ x \leq |x|$

   1.16 $\forall x \in \mathbb{R},\ -x \leq |x|$

   1.17 $\forall x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \rightarrow (\frac{|x|}{x} = 1 \vee \frac{|x|}{x} = -1)$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^3 - n$ เป็นจำนวนคู่

   2.2 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $3|(n^3 - n)$

   2.3 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a|b^2$ แล้ว $a|b$

   2.4 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \rightarrow x^2 < y^2$

   2.5 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \rightarrow x^3 < y^3$

   2.6 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 < y^2 \rightarrow |x| < |y|$

3.3 การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้ (Proofs of Biconditional statements)

การพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$

เนื่องจาก $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 ขั้นตอน

1. $p \to q$ เรียกว่าขั้น if part หรือ sufficient part (p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q)
2. $q \to p$ เรียกว่าขั้น only if part หรือ necessily part (p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q)

ตัวอย่าง 3.3.1 จงพิสูจน์ข้อความ " สำหรับจำนวนเต็ม n ใดๆ n เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ n^2 เป็นจำนวนคี่ "

กำหนดให้ p แทนข้อความ n เป็นจำนวนคี่ และ q แทนข้อความ n^2 เป็นจำนวนคี่ ดังนั้น $\forall n \in \mathbb{Z},\ p \leftrightarrow q$

บทพิสูจน์. ให้ n เป็นจำนวนเต็มใดๆ

- พิสูจน์ $p \to q$ สมมติ n เป็นจำนวนคี่ แล้วจะได้ว่ามี $k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n = 2k+1$ จะได้ว่า

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ให้ $p = 2k^2 + 2k$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ นั้นคือมี $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n^2 = 2p + 1$ ดังนั้น n^2 เป็นจำนวนคี่

- พิสูจน์ $q \to p$ จะพิสูจน์โดยวิธีแย้งสลับที่ สมมติ n เป็นจำนวนคู่ แล้วจะได้ว่ามี $k \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n = 2k$ จะได้ว่า

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$$

ให้ $p = 2k^2$ เนื่องจาก $k \in \mathbb{Z}$ ดังนั้น $p \in \mathbb{Z}$ นั้นคือมี $p \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n^2 = 2p$ ดังนั้น n^2 เป็นจำนวนคู่

□

ตัวอย่าง 3.3.2 จงพิสูจน์ข้อความ " สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ $4|a^2$ "

ตัวอย่าง 3.3.3 จงพิสูจน์ข้อความ $\forall x, y \in \mathbb{R},\ xy = 0 \leftrightarrow (x = 0$ หรือ $y = 0)$

การพิสูจน์แบบ iff-string

การพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ โดยการสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจากข้อความ p ไปยังข้อความ q

$p \leftrightarrow p_1$	เขียนแทนด้วย	$p \leftrightarrow p_1$
$q_1 \leftrightarrow q_2$		$\leftrightarrow p_2$
$q_2 \leftrightarrow q_3$		$\leftrightarrow p_3$
$\vdots$		$\vdots$
$p_n \leftrightarrow q$		$\leftrightarrow q$

บทนิยาม 3.3.4 ให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แล้ว

- **ผลผนวก** (union) $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ หรือ } x \in B\}$
- **ผลตัด** (intersection) $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ และ } x \in B\}$
- **ผลต่าง** (difference) $A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A \text{ และ } x \notin B\}$
- **ส่วนเติมเต็ม** (complement) $A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$

ตัวอย่าง 3.3.5 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $A \cap B = B \cap A$

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ

$$\begin{aligned} x \in A \cap B &\leftrightarrow x \in A \wedge x \in B \\ &\leftrightarrow x \in B \wedge x \in A \\ &\leftrightarrow x \in B \cap A \end{aligned}$$

□

ตัวอย่าง 3.3.6 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $A \cup B = B \cup A$

การพิสูจน์ข้อมูลที่สมมูลกัน

พิจารณาข้อความที่สมมูลกันเป็นคู่เช่น $(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge (p_3 \leftrightarrow p_1)$ เราสามารถพิสูจน์อย่างง่ายๆได้จาก

$$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)$$

ตัวอย่าง 3.3.7 จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

p_1 : a เป็นจำนวนคู่

p_2 : a^2 หารด้วย 4 ลงตัว

p_3 : a^2 เป็นจำนวนคู่

แบบฝึกหัด 3.3

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม

   1.1 สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^2+1 เป็นจำนวนคี่

   1.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2+3 เป็นจำนวนคู่

   1.3 สำหรับจำนวนเต็ม x, y ใดๆ $xy=1$ ก็ต่อเมื่อ $x=1$ และ $y=1$

   1.4 มีจำนวนจริง x และ y ใดๆ $x<y$ ก็ต่อเมื่อ $x^3<y^3$

   1.5 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\,x^3=1 \leftrightarrow x=1\,]$

   1.6 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\,x<0 \leftrightarrow \frac{1}{x}<0\,]$

   1.7 $\forall x, y \in \mathbb{R}\ [\,x^2+y^2=0 \leftrightarrow (x=0 \wedge y=0)\,]$

   1.8 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\,x^3=y^3 \leftrightarrow x=y\,]$

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยวิธี iff-string

   2.1 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $A-B=A\cap B^c$

   2.2 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $A-B^c=A\cap B$

   2.3 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

   2.4 สำหรับเซต A และ B จะได้ว่า $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

3. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   3.1 สำหรับจำนวนเต็ม $a\neq 0$ และ b ซึ่ง $a|b$ ก็ต่อเมื่อ $a^2|b^2$

   3.2 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ $c\neq 0$ ซึ่ง $c|a$ และ $c|b$ ก็ต่อเมื่อ $c|ab$

   3.3 สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ $x>0$ ก็ต่อเมื่อ $x^2\geq x$

   3.4 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\,0<x<1 \leftrightarrow x^2<x\,]$

   3.5 $\forall x \in \mathbb{R}\ [\,|x|=x \leftrightarrow x\geq 0\,]$

4. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

   p_1 : n เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

   p_2 : n^3 เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

   p_3 : n^3+4 เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2

5. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

   p_1 : a เป็นจำนวนคี่ $\qquad$ p_2 : $a+3$ เป็นจำนวนคู่ $\qquad$ p_3 : a^4 เป็นจำนวนคี่

3.4 การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (Proof by contradiction)

การพิสูจน์ข้อความ p เป็นจริง โดยใช้สมบัติของสัจนิรันดร์ (T22) $(\sim p \to c) \to p$ เราเรียกวิธีนี้ว่า พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (proof by contradiction) มีขั้นตอนคือ

สมมติ $\sim p$ เป็นจริง

$\vdots$ ส่วนของการพิสูจน์

ดังนั้น เกิดข้อขัดแย้ง

ตัวอย่าง 3.4.1 จงพิสูจน์ข้อความนี้โดยวิธีขัดแย้ง " ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า $x^{-1} \neq 0$ "

ให้ p แทนข้อความ $\forall x \in \mathbb{R}, [\, x \neq 0 \to x^{-1} \neq 0\,]$ สมมติว่า $\sim p$ เป็นจริง นั่นคือ $\exists x \in \mathbb{R}, [\, x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0\,]$

บทพิสูจน์. สมมติว่า มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$
เนื่องจาก $x \neq 0$ โดยสมบัติจำนวนจริงจะได้ว่า $x(x^{-1}) = 1$ แต่จากการสมมติ $x^{-1} = 0$ จะได้ว่า $x(x^{-1}) = x(0) = 0$
เกิดขัดแย้งที่ได้ว่า $1 = 0$ $\square$

ตัวอย่าง 3.4.2 จงพิสูจน์ข้อความนี้โดยวิธีขัดแย้ง " ถ้า x, y เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 - 4y \neq 2$ "

ตัวอย่าง 3.4.3 จงพิสูจน์ข้อความนี้โดยวิธีขัดแย้ง " x เป็นจำนวนคู่ และ y เป็นจำนวนคู่ แล้ว $x + y$ เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 3.4.4 จงพิสูจน์ $\forall a \in \mathbb{R}\,[\,(\forall \varepsilon > 0,\, a \leq \varepsilon) \to a \leq 0\,]$

ตัวอย่าง 3.4.5 จงพิสูจน์ " $\sqrt{2}$ จะเป็นจำนวนอตรรกยะ "

บทนิยาม 3.4.6 กำหนดให้จำนวนเต็มบวก p เป็น**จำนวนเฉพาะ** (prime number) ถ้า $n \neq 1$ และตัวหารของ p มีแค่ 1 กับ p เท่านั้น

ตัวอย่าง 3.4.7 จงพิสูจน์ว่า " มีจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนอนันต์ "

แบบฝึกหัด 3.4

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   1.1 $\sqrt[3]{2}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   1.2 $\sqrt{3}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   1.3 $\sqrt{6}$ เป็นจำนวนอตรรกยะ

   1.4 สำหรับจำนวนเต็ม a ใดๆ ถ้า $a^2 + 2a + 5$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

   1.5 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 \neq 4a + 3$

   1.6 ไม่มีจำนวนเฉพาะ a, b และ c ที่ทำให้ $a^3 + b^3 = c^3$

   1.7 ถ้าทุกๆจำนวนเต็ม a และ b ซึ่ง $a > 1$ แล้ว $a \nmid b$ หรือ $a \nmid (b+1)$

   1.8 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x < 0$ แล้ว $x^{-1} < 0$

   1.9 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะได้ว่า $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

   1.10 ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม ถ้าไม่มีจำนวนเต็มอยู่ระหว่าง 0 กับ 1 แล้วจะไม่มีจำนวนเต็มอยู่ระหว่าง n กับ $n + 1$

   1.11 สำหรับจำนวนจริง $x \geq 0$ ถ้า ทุกๆจำนวนจริงบวก ε ซึ่ง $x < \varepsilon$ แล้ว $x = 0$

   1.12 $\forall a, b \in \mathbb{R}\,[\,(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \to a \leq b\,]$

   1.13 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + xy + y^2 \geq 0$

   1.14 $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x + y > 2\sqrt{xy}$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนเต็มบวกใดก็ตาม จะได้ว่า $x^2 + x + 11$ เป็นจำนวนเฉพาะ

   2.2 ทุกจำนวนจริง $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ จะได้ว่า $\sin x + \cos x \geq 1$

   2.3 ไม่ว่า a, b และ c จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม ถ้า $a^2 + b^2 = c^2$ แล้ว a หรือ b เป็นจำนวนคู่

   2.4 ทุกจำนวนอตรรกยะที่ไม่ศูนย์สามารถในรูปผลคูณของจำนวนอตรรกยะสองตัวได้เสมอ

   2.5 $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [\,(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \to a + b \neq 0\,]$

   2.6 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\,x < y \to |x| < |y|\,]$

   2.7 $\exists x \in \mathbb{R},\ [\,x^2 + 1 = 0\,]$

   2.8 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [\,(x + |y|)^2 = (|x| + y)^2\,]$

3.5 การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้อย่างเดียว (Uniqueness Proofs)

ข้อความที่เป็นไปได้อย่างเดียวเท่านั้นเขียนแทนด้วย $\exists! x \in \mathcal{U},\, p(x)$ ข้อความนี้สมมูลกับ

$$(\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)) \wedge (\forall x, y \in \mathcal{U},\, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

ดังนั้นการพิสูจน์ $\exists! x \in \mathcal{U},\, p(x)$ แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนคือ

1. $\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ อย่างน้อยหนึ่งตัว (existence)
2. $\forall x, y \in \mathcal{U},\, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น (uniqueness)

ตัวอย่าง 3.5.1 จงพิสูจน์ว่า " มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x^3 + 1 = 0$ "

เขียนข้อความได้เป็น $\exists! x \in \mathbb{R},\, x^3 + 1 = 0$

บทพิสูจน์. (existence) เลือก $x = -1$ จะได้ว่า $x^3 + 1 = (-1)^3 + 1 = -1 + 1 = 0$
(uniqueness) ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ $x^3 + 1 = 0$ และ $y^3 + 1 = 0$ แล้ว

$$x^3 + 1 = 0 = y^3 + 1 \quad \text{ดังนั้น} \quad x^3 = y^3$$

จากสมบัติของจำนวนจริงจะได้ว่า $x = y$ □

ตัวอย่าง 3.5.2 จงพิสูจน์ว่า " ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 1$ "

ตัวอย่าง 3.5.3 จงพิสูจน์ว่า " มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + y = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y "

การพิสูจน์ว่าไม่มี

ถ้าเราจะแสดงว่าประพจน์ p เป็นเท็จ เราอาจจะพิสูจน์ประพจน์ $\sim p$ เป็นจริงแทนก็ได้ ในกรณีที่ข้อความแบบมีคือ

$$\exists x \in \mathcal{U},\, p(x) \;\text{ เป็นเท็จ} \qquad \text{สมมูลกับการพิสูจน์} \qquad \forall x \in \mathcal{U},\, \sim p(x) \;\text{ เป็นจริง}$$

ตัวอย่าง 3.5.4 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in \mathbb{R},\, x^2 + 1 = 0$ เป็นเท็จ

ตัวอย่าง 3.5.5 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in \mathbb{Z},\, 0 < x < 1$ เป็นเท็จ

แบบฝึกหัด 3.5

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   1.1 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 5$

   1.2 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 0$

   1.3 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

   1.4 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

   1.5 มีจำนวนตรรกยะ x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นซึ่งทำให้ xy เป็นจำนวนตรรกยะ สำหรับทุกจำนวนอตรรกยะ y

   1.6 $\exists! x \in \mathbb{R},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \to \sin x = \cos x$

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $xy = 1$

   2.2 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $xy = 0$

   2.3 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = x$

   2.4 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = y$

   2.5 มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 0$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

   2.6 ทุกๆจำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = xy$

   2.7 $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^x = 1$

   2.8 $\exists! n \in \mathbb{N},\ n > 1 \to n^2 = 2^n$

   2.9 $\exists! x \in \mathbb{N}\, \exists! y \in \mathbb{N},\ x + y = xy$

3. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ

   3.1 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x = x + 1$

   3.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 + x + 1 = 0$

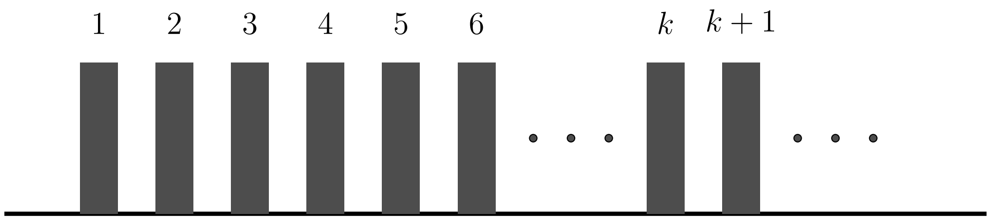
   3.3 $\exists x \in \mathbb{Z},\ -1 < x < 0$

   3.4 $\exists x \in \mathbb{Z},\ 4x^2 = 1$

   3.5 $\exists n \in \mathbb{N},\ 3|2^n$

3.6 การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Proof by Mathematical Induction)

หลักโดมิโน (Donimo principle)



ทฤษฎีบท 3.6.1 ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ เป็นประพจน์ หรือ $\forall n \in \mathbb{N},\ p(n)$ ถ้า

1. ขั้นพื้นฐาน (Basic step) : $P(1)$ เป็นจริง
2. ขั้นอุปนัย (Inductive step) : $\forall k \in \mathbb{N},\ P(k) \to p(k+1)$ เป็นจริง

เราจะสรุปได้ว่าประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N},\ p(n)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.6.2 จงแสดงว่า $1+2+3+4+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ให้ $P(n)$ แทน $1+2+3+4+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

1. ขั้นฐาน (Basic step) : เนื่องจาก $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ดังนั้น $P(1)$ เป็นจริง
2. ขั้นอุปนัย (Inductive step) : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ k ใดๆ นั้นคือ

$$1+2+3+4+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$$

โดยสมมติฐาน จะได้ว่า

$$\begin{aligned} 1+2+3+4+...+k+(k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= (k+1)\left[\frac{k}{2}+1\right] \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

ทำให้สรุปได้ว่า $P(k+1)$ เป็นจริง

ดังนั้น $1+2+3+4+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 3.6.3 จงแสดงว่า $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + ... + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 3.6.4 จงแสดงว่า $\dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 4} + ... + \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 3.6.5 จงพิสูจน์ว่า " ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนนับใดก็ตาม $3|(n^3 - n)$ "

ตัวอย่าง 3.6.6 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N},\, 4|(5^n - 1)$

ตัวอย่าง 3.6.7 จงแสดงว่า $(3!)^n \mid (3n)!$ สำหรับจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 3.6.8 จงแสดงว่า $\forall n \in \mathbb{N},\, 2^n < 2^{n+1}$

ตัวอย่าง 3.6.9 ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x \geq 0$ จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N},\, (1+x)^n \geq 1 + x^n$

อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เริ่มขั้นฐานด้วย n_0

ทฤษฎีบท 3.6.10 ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0,\, p(n)$ ถ้า

1. ขั้นพื้นฐาน (Basic step) : $P(n_0)$ เป็นจริง
2. ขั้นอุปนัย (Inductive step) : $\forall k \in \mathbb{N},, k \geq n_0,\; P(k) \to p(k+1)$ เป็นจริง

เราจะสรุปได้ว่าประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq n_0,\, p(n)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 3.6.11 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \geq n^2$

พิจารณา $2 = 2^1 \geq 1^2 = 1$, $4 = 2^2 \geq 2^2 = 4$, $8 = 2^3 \geq 3^2 = 9$, $16 = 2^4 \geq 4^2 = 16$, $32 = 2^5 \leq 5^2 = 25, 64 = 2^4 \leq 6^2 = 36$ ดังนั้นข้อความเป็นจริงเมื่อเริ่ม $n_0 = 4$ เราพิสูจน์ข้อความ

$$\forall n \in \mathbb{N},\, n \geq 4,\, 2^n \geq n^2$$

1. ขั้นฐาน (Basic step) : เนื่องจาก $16 = 2^4 \geq 4^2 = 16$ ดังนั้น $P(4)$ เป็นจริง
2. ขั้นอุปนัย (Inductive step) : สมมติว่า $P(k)$ เป็นจริง สำหรับจำนวนนับ $k \geq 4$ นั่นคือ $2^k \geq k^2$

เนื่องจาก $k \geq 4$ ดังนั้น $k^2 \geq 4k = 2k + 2k$ และ $2k > 1$ เราจึงสรุปได้ว่า $k^2 \geq 2k + 1$ จากสมมติฐานจะได้

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 \geq 2(k^2) = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$$

ดังนั้น $2^n \geq n^2$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ $n \geq 4$

ตัวอย่าง 3.6.12 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \leq n!$

แบบฝึกหัด 3.6

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

   1.1 $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.2 $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.3 $1+3+5+...+(2n-1)=n^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.4 $2+4+6+...+(2n)=n^2+n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.5 $2+2^2+2^3+...+2^n=2^{n+1}-2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.6 $1\cdot 2+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+...+n\cdot 2^n=(n-1)2^{n+1}+2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.7 $1(1!)+2(2!)+3(3!)+...+n(n!)=(n+1)!-1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

   1.8 $(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})...(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

2. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

   2.1 $12|(n^4-n^2)$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.2 $5|(n^5-n)$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.3 $3\,|\,(5^n-2^n)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   2.4 $5\,|\,(3^{3n+1}+2^{n+1})$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   2.5 $8\,|\,(5^{2n}+7)$ เมื่อ n เป็นจำนวนเต็มบวก

   2.6 $5\,|\,(2^{2n-1}+3^{2n-1})$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.7 $7\,|\,(3^{2n+1}+2^{n+2})$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.8 $7\,|\,(2^{3n}+6)$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.9 $8\,|\,(7\cdot 3^{2n}-7)$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.10 $11\,|\,(8\cdot 10^{2n}+6\cdot 10^{2n-1}+9)$ สำหรับ $n\in\mathbb{N}$

   2.11 $15\,|\,(2^{4n}-1)$ สำหรับจำนวนนับ n

   2.12 $21\,|\,(4^{n+1}+5^{2n-1})$ สำหรับจำนวนนับ n

3. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

   3.1 $\forall n\in\mathbb{N},\ 2^n>n$

   3.2 $\forall n\in\mathbb{N},\ 2^n\le 2^{n+1}-2^{n-1}-1$

   3.3 $\forall n\in\mathbb{N},\ 1+2^{-1}+2^{-2}+...+2^{-n}\le 2$

   3.4 $\forall n\in\mathbb{N},\ n\ge 10,\ 2^{n-10}(1000)<2^n-2^{n-6}$

   3.5 ให้ $x\in\mathbb{R}$ ซึ่ง $x>-1$ จงพิสูจน์ว่า $\forall n\in\mathbb{N},\ (1+x)^n\ge 1+nx$

4. จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์

   4.1 $2^{n-1}\le n!$

   4.2 $4^n>n^4$

   4.3 $(2n)!<2^{2n}(n!)^2$

   4.4 $n^2<(\frac{3}{2})^n$

บทที่ 4

เซต (Sets)

ในทางคณิตศาสตร์ จะถือว่า "**เซต**" เป็นมูลฐาน (fundamental) เพราะว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ของคณิตศาสตร์ ล้วนมีเซตเข้ามาเกี่ยวข้อง เป็นพื้นฐานเกือบทั้งหมด เซตเริ่มมีที่มามาจากนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ชื่อ เกอร์ก คันทอร์ (Georg Cantor) เป็นผู้ริเริ่มใช้คำว่าเซต ต่อจากนั้นนัก คณิตศาสตร์จึงใช้คำนี้อย่างแพร่หลาย Cantor เคยอธิบายอย่างง่าย ๆ เพื่อความเข้าใจเบื้องต้นว่า *"เซตคือกลุ่มของสิ่งของหรือจินตนาการ ซึ่งมีสมบัติบางประการคล้ายกัน และสิ่งของดังกล่าวนั้นเรียกว่า สมาชิกของเซต"*

เซต (set) ในทางคณิตศาสตร์เป็นคำอนิยาม (undefined term) หมายถึงคำที่ต้องยอมรับ กันในเบื้องต้นว่าไม่สามารถให้ความหมายที่รัดกุมได้ คำว่าเซตในทางคณิตศาสตร์ จึงหมายถึงกลุ่มของสิ่งของต่าง ๆ และเมื่อกล่าวถึงกลุ่มใดแล้วจะสามารถทราบได้แน่นอนว่าสิ่งใดอยู่ในกลุ่ม และสิ่งใดอยู่นอกกลุ่ม เราเรียกสิ่งที่อยู่ในเซตว่า สมาชิก (member/ element) สิ่งต่าง ๆ ที่อยู่ในเซต ต้องเป็นสิ่งที่สามารถระบุได้อย่างแจ่มชัด (well-defined) เพื่อที่เราสามารถระบุได้ว่า สิ่งนั้นเป็นสมาชิกในเซตหรือไม่ เช่น $\{1, 2, 3\}$, $\{a, b, c\}$, $\{2, 4, 6, ...\}$ และ $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ เป็นต้น

4.1 การดำเนินการบนเซต (Operation on Sets)

เพื่อความเข้าใจเราจะกำหนดสัญญาลักษณ์ดังนี้

- สำหรับเซตที่ไม่มีสมาชิกเลยเราเขียนแทนด้วย $\{\}$ หรือ $\varnothing$ และเรียกว่า **เซตว่าง** (empty set)
- **เอกภพสัมพัทธ์** (Universe) คือ เซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่า จะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ $\mathcal{U}$ เป็นสัญลักษณ์แทนเซตเอกภพสัมพัทธ์

บทนิยาม 4.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ เราจะกล่าวว่า A เป็น**เซตย่อย** (subset) ของ B ก็ต่อเมื่อ ทุกๆสมาชิกใน A เป็นสมาชิกใน B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$

$$A \subseteq B \;\leftrightarrow\; \forall x \in \mathcal{U}, \, (x \in A \rightarrow x \in B)$$

หรือกล่าวได้อีกอย่างว่า B เป็น**ซูเปอร์เซต** (superset) ของ A เขียนแทนด้วย $B \supseteq A$ ถ้า A ไม่เป็นสับเซตของ B เขียนแทนด้วย $A \nsubseteq B$ นั้นคือ

$$A \nsubseteq B \;\leftrightarrow\; \exists x \in \mathcal{U}, \, (x \in A \wedge x \notin B)$$

จากนิยามเราจะกล่าวได้ว่า $A \subseteq A$ และ $\varnothing \subseteq A$ ทุกๆเซต A

บทนิยาม 4.1.2 เราจะกล่าวว่าเซต A เท่ากับเซต B เขียนแทนด้วย $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $B \subseteq A$

$$A = B \ \leftrightarrow \ (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$$

ถ้า A ไม่เท่ากับ B เขียนแทนด้วย $A \neq B$

$$A \neq B \ \leftrightarrow \ (A \nsubseteq B) \vee (B \nsubseteq A)$$

บทนิยาม 4.1.3 เราจะกล่าวว่าเซต A เป็น**สับเซตแท้** (proper subset) ของเซต B เขียนแทนด้วย $A \subset B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ แต่ $B \neq A$

$$A \subset B \ \leftrightarrow \ (A \subseteq B) \wedge (A \neq B)$$

ถ้า A ไม่เป็นสับเซตแท้ของ B เขียนแทนด้วย $A \not\subset B$

$$A \not\subset B \ \leftrightarrow \ (A \nsubseteq B) \vee (A = B)$$

ตัวอย่าง 4.1.4 กำหนดให้ $A = \{1, 3, 5, 7\}$, $B = \{3, 5, 7\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ และ $D = \{3, 5, 7, 1\}$ จงพิจารณาความสัมพันธ์ของแต่ละเซต

บทนิยาม 4.1.5 ให้ A และ B เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ แล้ว

- **ผลผนวก** (union) $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A$ หรือ $x \in B\}$
- **ผลตัด** (intersection) $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A$ และ $x \in B\}$
- **ผลต่าง** (difference) $A - B = \{x \in \mathcal{U} \mid x \in A$ และ $x \notin B\}$
- **ส่วนเติมเต็ม** (complement) $A^c = \{x \in \mathcal{U} \mid x \notin A\}$

บทนิยาม 4.1.6 ให้ A เป็นเซตใดๆ เราจะเรียกเซตของสับเซตทั้งหมดของ A ว่า**เซตกำลัง** (power set) เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(A)$ นั้นคือ

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$$

ข้อสังเกต ทุกๆเซต A, $\mathcal{P}(A) \neq \varnothing$ เพราะว่า $\varnothing \subseteq A$

ตัวอย่าง 4.1.7 จงพิสูจน์ว่า " เซตว่าเป็นสับเซตของทุกๆเซต "

ตัวอย่าง 4.1.8 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$ "

ตัวอย่าง 4.1.9 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A และ B ใดๆ $A - B = A \cap B^c$ "

ตัวอย่าง 4.1.10 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A และ B ใดๆ $A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ "

ตัวอย่าง 4.1.11 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B \cap C$ "

ตัวอย่าง 4.1.12 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A และ B ใดๆ $A \cap (A - B) = \varnothing$ "

ตัวอย่าง 4.1.13 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A และ B ใดๆ ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ "

ตัวอย่าง 4.1.14 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A และ B ใดๆ $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ "

แบบฝึกหัด 4.1

1. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   1.1 $A - \varnothing = A$
   1.2 $\varnothing - A = \varnothing$
   1.3 $A \cup \varnothing = A$
   1.4 $A \cap \varnothing = \varnothing$
   1.5 $A - \mathcal{U} = \varnothing$
   1.6 $\mathcal{U} - A = A^c$
   1.7 $A \cup \mathcal{U} = \mathcal{U}$
   1.8 $A \cap \mathcal{U} = A$
   1.9 $(A^c)^c = A$
   1.10 $A - A = \varnothing$
   1.11 $A \cup A^c = \mathcal{U}$
   1.12 $A - B \subseteq A$
   1.13 $A \cap B \subseteq A$
   1.14 $A \cup B \supseteq B$
   1.15 $A \cup B \supseteq A \cap B$

2. กำหนดให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   2.1 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
   2.2 $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
   2.3 $A \cup (B - A) = A \cup B$
   2.4 $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
   2.5 $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   2.6 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   2.7 $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$
   2.8 $(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

3. กำหนดให้ A, B, C และ D เป็นเซตใดๆ และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   3.1 $A \subseteq \varnothing \leftrightarrow A = \varnothing$
   3.2 $A \cap B = A \leftrightarrow A \subseteq B$
   3.3 $A \subseteq B^c \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
   3.4 $A \subseteq B \leftrightarrow A^c \cup B = \mathcal{U}$
   3.5 $A - B = \varnothing \leftrightarrow A \subseteq B$
   3.6 $A \subseteq B \leftrightarrow A - B \subseteq B$
   3.7 $A = B \leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$
   3.8 $A \cap B = \mathcal{U} \leftrightarrow A = B = \mathcal{U}$
   3.9 $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$
   3.10 $A - B = A \leftrightarrow A \cap B = \varnothing$
   3.11 $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \leftrightarrow A \cup B \subseteq C$
   3.12 $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \leftrightarrow (A \cup B) \subseteq (C \cup D)$

4. กำหนดให้ A และ B เป็นเซตใดๆ และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

   4.1 $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
   4.2 $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \supseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
   4.3 $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
   4.4 $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$
   4.5 $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$
   4.6 $A \subseteq B \rightarrow \mathcal{P}(B^c) \subseteq \mathcal{P}(A^c)$

4.2 ผลผนวกและผลตัดอย่างไม่เจาะจง (Aribitrary Union & Intersection)

บทนิยาม 4.2.1 ให้ Λ เป็นเซต และสำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ ให้ A_α เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ เราจะเรียกเซต Λ ว่า**เซตดรรชนี** (index set) และเรียกเซต $\mathbb{A}$ ซึ่งคือเซตของเซต A_α ทั้งหมดที่ $\alpha \in \Lambda$ ว่า **ชุดของเซต** (collection of sets)

$$\mathbb{A} = \{A_\alpha \,|\, \alpha \in \Lambda\}$$

บางครั้งจะเขียนเซต $\mathbb{A}$ แทนด้วย $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ ในกรณีที่ $\Lambda = \{1, 2, 3, ..., n\}$ เขียนแทนด้วย $\{A_i\}_{i=1}^{n}$ และ $\Lambda = \mathbb{N}$ เขียนแทนด้วย $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ $A_\alpha = \{1, 2, 3, ..., \alpha\}$ สำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ จงแจกแจงชุดของเซต $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$

1. เมื่อ $\Lambda = \{1, 3, 5\}$
2. เมื่อ $\Lambda = \{2, 4, 6\}$
3. เมื่อ $\Lambda = \{1, 2, 3, ..., 10\}$
4. เมื่อ $\Lambda = \{1, 2, 3, ...\}$

ตัวอย่าง 4.2.3 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ $A_i = (i-1, i+1)$ สำหรับแต่ละ $i \in \Lambda$ จงแจกแจงชุดของเซต $\{A_i\}_{i\in\Lambda}$

1. เมื่อ $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$
2. เมื่อ $\Lambda = \{2, 4, 6\}$
3. เมื่อ $\Lambda = \{1, 2, 3, ..., 100\}$
4. เมื่อ $\Lambda = \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 4.2.4 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ $A_x = (1 - \frac{1}{x}, 1 + \frac{1}{x})$ สำหรับแต่ละ $x \in \Lambda$ จงเขียนชุดของเซต $\{A_x\}_{x\in\Lambda}$

1. เมื่อ $\Lambda = \{1, 2, 3\}$
2. เมื่อ $\Lambda = \{0.5, 1, 1.5\}$
3. เมื่อ $\Lambda = \mathbb{N}$
4. เมื่อ $\Lambda = (0, 1]$

บทนิยาม 4.2.5 ให้ $\Lambda \neq \varnothing$ เป็นเซตดรรชนี และ $\mathbb{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ เป็นชุดของเซต

- **ผลผนวกอย่างไม่เจาะจง** (arbitrary union) ของ $\mathbb{A}$ คือ

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x \,|\, x \text{ เป็นสมาชิกของ } A_\alpha \text{ สำหรับบาง } \alpha \in \Lambda\} \quad \text{หรือ} \quad \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x \,|\, \exists \alpha \in \Lambda,\, x \in A_\alpha\}$$

- **ผลตัดอย่างไม่เจาะจง** (arbitrary intersection) ของ $\mathbb{A}$ คือ

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x \,|\, x \text{ เป็นสมาชิกของ } A_\alpha \text{ ทุก } \alpha \in \Lambda\} \quad \text{หรือ} \quad \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x \,|\, \forall \alpha \in \Lambda,\, x \in A_\alpha\}$$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหาผลผนวกอย่างไม่เจาะจง และผลผนวกอย่างไม่เจาะจง ของตัวอย่าง 4.2.2 − 4.2.4

ทฤษฎีบท 4.2.7 **หลักการของอาร์คีมีดีส** (Archimedean Principle)

- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N},\ n > x$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \exists n \in \mathbb{N},\ n > \frac{1}{x}$

บทพิสูจน์จะกล่าวในเรื่องระบบจำนวนจริง

บทนิยาม 4.2.8 **ฟังก์ชันพื้น** (floor function) หรือ**ฟังก์ชันจำนวนเต็มมากที่สุด** (the greatest integer function)

$$[x] = \text{จำนวนเต็มที่มากที่สุดที่น้อยกว่าหรือเท่ากับ } x$$

เมื่อ x เป็นจำนวนจริง เช่น $[1.5] = 1,\ [-1.1] = -2,\ [3] = 3$ ข้อสังเกต $[x] \leq x$ ทุกๆ $x \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 4.2.9 กำหนดให้ $A_n = (1-n, 1+n)$ จงหาผลผนวกและผลตัดอย่างไม่เจาะจง พร้อมทั้งพิสูจน์

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$

ตัวอย่าง 4.2.10 จงหาผลผนวกและผลตัดอย่างไม่เจาะจง พร้อมทั้งพิสูจน์

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$
2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (1-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$

ตัวอย่าง 4.2.11 จงพิสูจน์ว่า $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (1-\frac{1}{n}, 1) = \varnothing$

ทฤษฎีบท 4.2.12 ให้ $\mathbb{A} = \{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ เป็นชุดของเซต และ B เป็นเซตใดๆ

1. $\displaystyle B \cup \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (B \cup A_\alpha)$
2. $\displaystyle \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cup B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cup B)$
3. $\displaystyle B \cap \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (B \cap A_\alpha)$
4. $\displaystyle \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cap B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cap B)$
5. $\displaystyle B \cap \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (B \cap A_\alpha)$
6. $\displaystyle \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cap B = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cap B)$
7. $\displaystyle B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (B \cup A_\alpha)$
8. $\displaystyle \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha \cup B)$
9. $\displaystyle \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha)^c$
10. $\displaystyle \left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)^c = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} (A_\alpha)^c$

แบบฝึกหัด 4.2

จงหาผลผนวกและผลตัดอย่างไม่เจาะจง พร้อมทั้งพิสูจน์

1. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$
2. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$
3. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}]$
4. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-1, \frac{1}{n})$
5. $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n}, 1)$
6. $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+}(-x, x)$
7. $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+}(1-x, 1+x)$
8. $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+}[0, 1+x)$
9. $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+}(1-x, 1]$
10. $\bigcup_{y\in\mathbb{R}^+}(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$
11. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}]$
12. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n})$
13. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n}, 2+\frac{1}{n}]$
14. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-1, \frac{1}{n})$
15. $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n}, 1)$
16. $\bigcap_{x\in\mathbb{R}^+}(-x, x)$
17. $\bigcap_{x\in\mathbb{R}^+}(1-x, 1+x)$
18. $\bigcap_{x\in\mathbb{R}^+}[0, 1+x)$
19. $\bigcap_{x\in\mathbb{R}^+}(1-x, 1]$
20. $\bigcap_{y\in\mathbb{R}^+}(-\frac{y}{2}, \frac{y}{2})$

4.3 **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian Product)

ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง เราจะเรียก (a, b) ว่า**คู่อันดับ** (ordered pair) คือพิกัดบอกตำแหน่งในระนาบสองมิติ (ในทางเรขาคณิต) ในหนังสือบางเล่มอาจจะนิยามคู่อันดับในแง่ของเซตคือ

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

หรือบางเล่มอาจจะไม่นิยามคำว่าคู่อันดับก็ได้

บทนิยาม 4.3.1 ให้ (a, b) และ (c, d) เป็นคู่อันดับ เราจะกล่าวว่า

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = c \;\; \text{และ} \;\; b = d$$

บทนิยาม 4.3.2 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ **ผลคูณคาร์ทีเซียน** (Cartesian Product) นิยามโดย

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

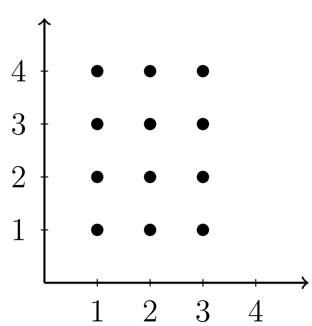
ข้อสังเกต $A \times \varnothing = \varnothing \times A = \varnothing$
ข้อตกลง ถ้า A และ B เป็นสับเซตของจำนวนจริง แผนภาพ $A \times B$ เขียนโดยให้ A เป็นแกน X และ B เป็นแกน Y

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้ พร้อมเขียนแผนภาพประกอบ

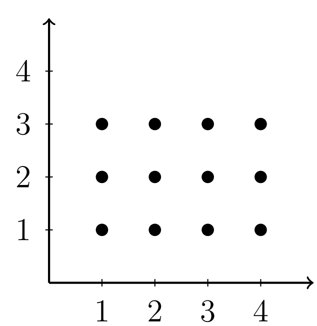
1. $A \times B$
2. $B \times A$
3. $A \times A$

ผลเฉลย $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

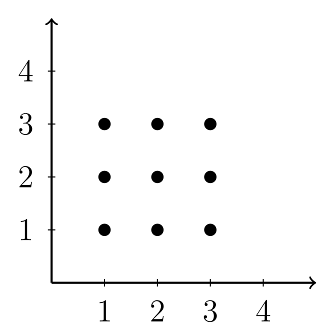
1. $A \times B = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
2. $B \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 2), (4, 3)\}$
3. $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$



$A \times B$



$B \times A$

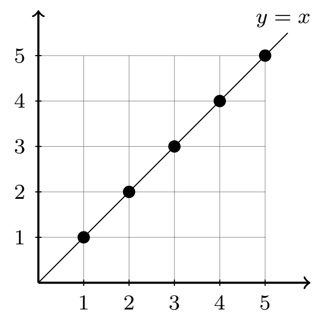


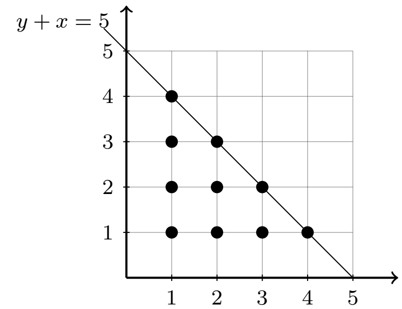
$A \times A$

ทฤษฎีบท 4.3.4 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$

ตัวอย่าง 4.3.5 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงเขียนแผนภาพแทนเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in A \times A \,|\, y = x\}$
2. $\{(x, y) \in A \times A \,|\, y + x \leq 5\}$

1. 

2. 

ตัวอย่าง 4.3.6 จงแจกแจงสมาชิกและเขียนแผนภาพ ของเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, x + y = 7\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, xy = 3x + 12\}$

ตัวอย่าง 4.3.7 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, yx + y = x + 13\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y^2 + x^2 - 2x + 4y + 5 = 0\}$

ตัวอย่าง 4.3.8 จงหาเงื่อนไขที่ $A \times B = B \times A$

ตัวอย่าง 4.3.9 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A และ B ใดๆ $A \times B = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A = \varnothing$ หรือ $B = \varnothing$ "

ตัวอย่าง 4.3.10 จงพิจารณา " สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ $A \times B = A \times C \rightarrow A = C$ " ว่าเป็นจริงหรือเท็จ

ตัวอย่าง 4.3.11 จงพิสูจน์ว่า " สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ ถ้า $A \neq \varnothing$ และ $A \times B = A \times C$ แล้ว $A = C$ "

ตัวอย่าง 4.3.12 สำหรับเซต A, B และ C ใดๆ จงแสดงว่า $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

ผลคูณตรง (direct product)

เราอาจจะขยายผลคูณคาร์เซียนให้มากกว่าสองตัว เราจะเรียกผลคูณดังกล่าวว่าผลคูณตรง ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นเซต **ผลคูณตรง** (direct product) ของเซต $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ เขียนแทนด้วย

$$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$$

และเราจะเขียน A^n แทน $\prod_{i=1}^{n} A_i$ และ $\mathbb{R}^n = \prod_{i=1}^{n} A_i = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$ เมื่อ $A_i = \mathbb{R}$ ทุกๆ i เรียกผลคูณตรงนี้ว่า ปริภูมิยูคลิด (Euclidean *n*-space) สำหรับ $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A^n$ เรียกว่า อันดับ n-tuple
และสามารถขยายไปสู่ลำดับอนันต์ $A_1, A_2, A_3, ...$

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \times ...$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้ พร้อมทั้งเขียนแผนภาพ

   1.1 $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+y=5\}$

   1.2 $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x+2y<7\}$

   1.3 $\{(x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid xy=12\}$

   1.4 $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid xy=12\}$

   1.5 $\{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \mid x+\sqrt{2}y=1+\sqrt{2}\}$

   1.6 $\{(x,y) \in \mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c \mid x+\sqrt{2}y=1+\sqrt{2}\}$

   1.7 $\{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid x^y=y^x\}$

   1.8 $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy=12\}$

   1.9 $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (x+|y|)^2-(|x|+y)^2=xy\}$

   1.10 $\{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2+4y^2-2x+4y+2=0\}$

2. ให้ A,B,C และ D เป็นเซต ข้อความต่อไปนี้เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าเป็นเท็จจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$

   2.2 $(A\times B)-(C\times D)=(A-C)\times(B-D)$

   2.3 $A\times(B-C)=(A\times B)-(A\times C)$

   2.4 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$

   2.5 $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$

   2.6 $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$

   2.7 $(A\cap B)\times C=(A\times C)\cap(B\times C)$

   2.8 $A\times B=C\times D\rightarrow(A=C\wedge B=D)$

   2.9 $B\subseteq C\rightarrow A\times B\subseteq A\times C$

   2.10 $A\times B\subseteq C\times D\rightarrow(A\subseteq C\wedge B\subseteq B)$

   2.11 $A\times B=B\times A\rightarrow A=B$

บทที่ 5

ความสัมพันธ์ (Relations)

ในชีวิตประจำวันเรามีประโยคที่กล่าวถึงความสัมพันธ์ระหว่างสองอย่างอยู่บ่อยครั้ง เช่น " ศรีเรือนเป็นแม่ของศรีจันทร์ " จากประโยคดังกล่าว " เป็นแม่ " เป็นคำที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง ศรีเรือนกับศรีจันทร์ หรือตัวอย่างในทางคณิตศาสตร์ เช่น $5 < 7$ คำว่า " น้อยกว่า " เป็นคำที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่าง 5 กับ 7 ซึ่งก็คือ 5 น้อยกว่า 7 นั่นเอง ในบทนี้เราจะศึกษานิยามของความสัมพันธ์ในทางคณิตศาสตร์และสมบัติต่างๆของความสัมพันธ์เหล่านั้น

5.1 ความสัมพันธ์ (Relations)

บทนิยาม 5.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ **ความสัมพันธ์** (relation) จาก A ไป B คือสับเซตของ $A \times B$

ถ้า r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ $(a, b) \in r$ เราจะเขียนแทนด้วย $\quad a\,r\,b$

ในกรณีที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A เราจะเรียก r ว่าความสัมพันธ์บน A

- **โดเมน** (domain) ของ r เขียนแทนด้วย Dom(r) นิยามโดย Dom(r) $= \{a \in A \mid \exists b \in B,\ (a, b) \in r\}$
- **พิสัย** (image) ของ r เขียนแทนด้วย Im(r) นิยามโดย Im(r) $= \{b \in B \mid \exists a \in A,\ (a, b) \in r\}$

ข้อสังเกต Dom(r) $\subseteq A$ และ Im(r) $\subseteq B$

ตัวอย่าง 5.1.2 จงเขียนความสัมพันธ์ต่อไปนี้ในรูปเซต พร้อมทั้งหาโดเมนและพิสัย

1. ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{x, y, z\}$ กำหนดให้ $r = \{(1, x), (2, y), (3, x)\}$
   ดังนั้น r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B Dom(r) $= \{1, 2, 3\}$ และ Im(r) $= \{x, y\}$

2. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $\quad x\,r\,y \quad$ มีความหมายว่า $\quad x = y$
   ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x\} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}$
   มี Dom(r) $= \mathbb{R}$ และ Im(r) $= \mathbb{R}$

3. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $\quad x\,r\,y \quad$ มีความหมายว่า $\quad y = x^2$
   ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}$
   มี Dom(r) $= \mathbb{R}$ และ Im(r) $= [0, \infty)$

4. ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $\quad x\,r\,y \quad$ มีความหมายว่า $\quad x < y$
   ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x < y\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{R}$
   มี Dom(r) $= \mathbb{R}$ และ Im(r) $= \mathbb{R}$

5. ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $\quad x\,r\,y \quad$ มีความหมายว่า $\quad x|y$
   ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, x|y\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z}$
   มี Dom(r) $= \mathbb{Z} - \{0\}$ และ Im(r) $= \mathbb{Z}$

6. ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $\quad x\,r\,y \quad$ มีความหมายว่า $\quad 3|(x - y)$
   ดังนั้น $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, 3|(x - y)\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathbb{N}$
   มี Dom(r) $= \mathbb{N}$ และ Im(r) $= \mathbb{N}$

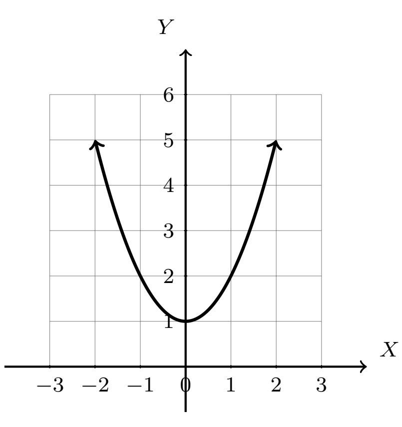
7. ให้ S เป็นเซต และ $A, B \in \mathcal{P}(S)$ กำหนดให้ $\quad A\,r\,B \quad$ มีความหมายว่า $\quad A \subseteq B$
   ดังนั้น $r = \{(A, B) \in \mathcal{P}(S) \times \mathcal{P}(S) \,|\, A \subseteq B\}$ เป็นความสัมพันธ์บน $\mathcal{P}(S)$
   มี Dom(r) $= \mathcal{P}(S)$ และ Im(r) $= \mathcal{P}(S)$

8. ให้ A เป็นเซตของเส้นตรงในระนาบสองมิติ และ $x, y \in A$
   กำหนดให้ $\quad x\,r\,y \quad$ มีความหมายว่า $\quad x$ ขนานกับ y
   ดังนั้น $r = \{(x, y) \in A \times A \,|\, x$ ขนานกับ $y\}$ เป็นความสัมพันธ์บน A
   มี Dom(r) $= A$ และ Im(r) $= A$

9. ให้ A เป็นเซตของประพจน์ และ $p, q \in A$
   กำหนดให้ $\quad p\,r\,q \quad$ มีความหมายว่า $\quad p \to q \quad$ เป็นสัจนิรันดร์
   ดังนั้น $r = \{(p, q) \in A \times A \,|\, p \to q$ เป็นสัจนิรันดร์ $\}$ เป็นความสัมพันธ์บน A
   มี Dom(r) $= A$ และ Im(r) $= A$

ตัวอย่าง 5.1.3 ให้ $\; r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y = x^2 + 1\} \;$ จงหาโดเมนและพิสัยของ r พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบ

จากกราฟจะได้ว่า Dom$(r) = \mathbb{R}$ และ Im$(r) = [1, \infty)$



บทพิสูจน์. จะแสดงว่า Dom$(r) = \mathbb{R}$ นั้นคือแสดงว่า Dom$(r) \subseteq \mathbb{R}$ และ $\mathbb{R} \subseteq$ Dom(r) จากนิยามของ r เห็นได้ชัดว่า Dom$(r) \subseteq \mathbb{R}$
ให้ $x \in \mathbb{R}$ เลือก $y = 1 + x^2$ ดังนั้น $y \in \mathbb{R}$ นั้นคือ $(x, y) \in r$ เพราะฉะนั้น $x \in$ Dom(r) สรุปได้ว่า Dom$(r) = \mathbb{R}$
สุดท้ายเราจะแสดงว่า Im$(r) = [1, \infty)$
ให้ $y \in r$ จะมี $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $y = 1 + x^2$ เนื่องจาก $x^2 \geq 0$
ดังนั้น $y = 1 + x^2 \geq 1$ นั้นคือ $y \in [1, \infty)$ เพราะฉะนั้น Im$(r) \subseteq [1, \infty)$
ให้ $y \geq 1$ แล้ว $y - 1 \geq 0$ เลือก $x = \sqrt{1 - y}$ ดังนั้น $x \in \mathbb{R}$ และ $x^2 = 1 - y$ นั้นคือ $(x, y) \in r$ จึงได้ว่า $y \in$ Im(r) เพราะฉะนั้น $[1, \infty) \subseteq$ Im(r) สรุปได้ว่า Im$(r) = [1, \infty)$

$\square$

ตัวอย่าง 5.1.4 ให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x^2 + y^2 = 1\}$ จงหาโดเมนและพิสัยของ r พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบ

ตัวอย่าง 5.1.5 ให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, 4x^2 + 9y^2 = 1\}$ จงหาโดเมนและพิสัยของ r พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบ

ตัวอย่าง 5.1.6 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จงแสดงว่า Dom$(r \cup s) \subseteq$ Dom$(r) \cup$ Dom(s)

ตัวอย่าง 5.1.7 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จงแสดงว่า Im$(r \cup s) \subseteq$ Im$(r) \cup$ Im(s)

บทนิยาม 5.1.8 ให้ A เป็นเซตใดๆ และ r เป็นความสัมพันธ์บน A เราจะกล่าวว่า

- r มี**สมบัติสะท้อน** (reflexive) ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in A, \quad a\,r\,a$
- r มี**สมบัติสมมาตร** (symmetric) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b \in A, \quad a\,r\,b \,\rightarrow\, b\,r\,a$
- r มี**สมบัติถ่ายทอด** (transitive) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b, c \in A, \quad (a\,r\,b \,\wedge\, b\,r\,c) \rightarrow\, a\,r\,c$
- r มี**สมบัติปฏิสมมาตร** (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b \in A, \quad (a\,r\,b \,\wedge\, b\,r\,a) \rightarrow\, a = b$

ตัวอย่าง 5.1.9 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีสมบัติใดบ้าง

1. $r = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}$
2. $r = \{(1,2), (2,3), (2,1), (3,2)\}$
3. $r = \{(1,2), (2,3), (3,1)\}$
4. $r = \{(1,1)\}$
5. $r = A \times A$
6. $r = \varnothing$

ตัวอย่าง 5.1.10 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y = x\}$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{R}$ มีสมบัติใดบ้าง พร้อมทั้งพิสูจน์

- r มีสมบัติสะท้อน เนื่องจาก $x = x$ ทุกๆ $x \in \mathbb{R}$
- r มีสมบัติสมมาตร เนื่องจาก ถ้า $x = y$ แล้ว $y = x$ ทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$
- r มีสมบัติถ่ายทอด เนื่องจาก ถ้า $x = y$ และ $y = z$ แล้ว $x = z$ ทุกๆ $x, y, z \in \mathbb{R}$
- r มีสมบัติปฏิสมมาตร เนื่องจาก ถ้า $x = y$ และ $y = x$ แล้ว $x = y$ ทุกๆ $x, y \in \mathbb{R}$

ตัวอย่าง 5.1.11 กำหนดให้ $r = \{(x,y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \,|\, y = |x|\}$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Q}$ มีสมบัติใดบ้าง พร้อมทั้งพิสูจน์

ตัวอย่าง 5.1.12 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $x \leq y$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{R}$ มีสมบัติใดบ้างพร้อมทั้งพิสูจน์

ตัวอย่าง 5.1.13 ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $2|(x - y)$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{N}$ มีสมบัติใดบ้างพร้อมทั้งพิสูจน์

ตัวอย่าง 5.1.14 จงพิจารณาข้อความ " ถ้า r หรือ s เป็นความสัมพันธ์ที่มีสมบัติสะท้อนบน $A \neq \varnothing$ แล้ว $r \cap s$ มีสมบัติสะท้อนบน A " เป็นจริงหรือไม่ ถ้าเป็นจริงให้พิสูจน์ ถ้าไม่จริงให้ยกตัวอย่างค้าน

แบบฝึกหัด 5.1

1. จงหาโดเมนและพิสัยของความสัมพันธ์ r พร้อมทั้งพิสูจน์คำตอบดังกล่าว

   1.1 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ มีความหมายว่า $x > y^2$

   1.2 ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $x + y = 10$

   1.3 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $2|(x - y)$

   1.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, 9x^2 + 16y^2 = 1\}$

   1.5 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, x^2 - y^2 = 1\}$

   1.6 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y = \sqrt{4 - x^2}\}$

   1.7 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, |x| + |y| < 1\}$

2. ให้ A และ B เป็นเซตใดๆ กำหนดให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จาก A ไป B จงแสดงว่า

   2.1 $\text{Dom}(r \cup s) = \text{Dom}(r) \cup \text{Dom}(s)$

   2.2 $\text{Dom}(r \cap s) \subseteq \text{Dom}(r) \cap \text{Dom}(s)$

   2.3 $\text{Im}(r \cup s) = \text{Im}(r) \cup \text{Im}(s)$

   2.4 $\text{Im}(r \cap s) \subseteq \text{Im}(r) \cap \text{Im}(s)$

3. จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ r มีสมบัติใดบ้างพร้อมทั้งพิสูจน์

   3.1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y^2 = x^2\}$

   3.2 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y \leq |x|\}$

   3.3 ให้ $x, y \in \mathbb{N}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $x|y$

   3.4 ให้ $x, y \in \mathbb{Z}$ กำหนดให้ $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $3|(x - 2y)$

   3.5 ให้ S เป็นเซต และ $A, B \in \mathcal{P}(S)$ กำหนดให้ $A\,r\,B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

   3.6 ให้ A เป็นเซตของเส้นตรงในระนาบสองมิติ และ $x, y \in A$ ให้ $x\,r\,y$ มีความหมายว่า x ขนานกับ y

4. กำหนดให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน $A \neq \varnothing$ จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้

   4.1 r และ s มีสมบัติสะท้อนบน A แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติสะท้อนบน A

   4.2 r หรือ s มีสมบัติสะท้อนบน A แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติสะท้อนบน A

   4.3 r และ s มีสมบัติสมมาตรบน A แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติสมมาตรบน A

   4.4 r หรือ s มีสมบัติสมมาตรบน A แล้ว $r \cap s$ มีสมบัติสมมาตรบน A

   4.5 r และ s มีสมบัติถ่ายทอดบน A แล้ว $r \cap s$ มีสมบัติถ่ายทอดบน A

   4.6 r และ s มีสมบัติถ่ายทอดบน A แล้ว $r \cup s$ มีสมบัติถ่ายทอดบน A

5. จงยกตัวอย่างความสัมพันธ์ r บนเซต A ที่มีสมบัติต่อไปนี้

   5.1 สะท้อน และสมมาตร แต่ไม่ถ่ายทอด

   5.2 สมมาตร และถ่ายทอด แต่ไม่สะท้อน

5.2 ความสัมพันธ์สมมูลและผลแบ่งกัน (Equivalent relation & Partition)

บทนิยาม 5.2.1 ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์สมมูล** (equivalent relation) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

บทนิยาม 5.2.2 ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์อันดับบางส่วน** (partial ordered relation) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 5.2.3 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

1. $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
2. $r = \{(1, 2), (2, 3), (2, 1), (3, 2)\}$
3. $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
4. $r = \{(1, 1)\}$
5. $r = A \times A$
6. $r = \varnothing$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

1. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y = x\}$
2. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y \leq x\}$
3. $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, 3|(x - y)\}$
4. $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, |x| + |y| \leq 1\}$

ตัวอย่าง 5.2.5 ให้ความสัมพันธ์สมมูล r บน N โดย $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $3|(x - y)$ พิจารณา

$$C_k = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x\,r\,k\}$$

$$C_1 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x\,r\,1\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3|(x - 1)\} = \{1, 4, 7, 10, ...\}$$

$$C_2 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x\,r\,2\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3|(x - 2)\} = \{2, 5, 8, 11, ...\}$$

$$C_3 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x\,r\,3\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3|(x - 3)\} = \{3, 6, 9, 12, ...\}$$

$$C_4 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x\,r\,4\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3|(x - 4)\} = \{1, 4, 7, 10, ...\}$$

$$C_5 = \{x \in \mathbb{N} \,|\, x\,r\,5\} = \{x \in \mathbb{N} \,|\, 3|(x - 5)\} = \{2, 5, 8, 11, ...\}$$

จะได้ว่า $C_1 = C_4 = C_7 = ...,\quad C_2 = C_5 = C_8 = ...\quad$ และ $\;C_3 = C_6 = C_9 = ...$

	1	2	3
	4	5	6
$\mathbb{N}$	7	8	9
	10	11	12
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	C_1	C_2	C_3

จากตารางจะได้ว่าเซต $\mathbb{N}$ ถูกแบ่งออกเป็นเซตย่อยได้ 3 เซตเท่านั้น C_1, C_2 และ C_3

จะเห็นว่าแต่ละเซตย่อยไม่มีสมาชิกซ้ำกันเลย และเมื่อรวมสมาชิกทั้งหมดของเซตย่อยเหล่านั้นย่อมเท่ากับ $\mathbb{N}$

บทนิยาม 5.2.6 ให้ $A \neq \varnothing$ และ Π เป็นชุดของเซตซึ่งเป็นสับเซตที่ไม่ว่างของเซต A เราจะกล่าวว่า Π เป็น**ผลแบ่งกัน** (partition) ของ A ถ้า

(1) $\bigcup\limits_{X\in\Pi} X = A$ (2) $\forall X, Y \in \Pi,\ X = Y \ \vee\ X \cap Y = \varnothing$

ตัวอย่าง 5.2.7 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ จงยกตัวอย่างผลแบ่งกั้นของ A มาอย่างน้อย 2 เซต

ต่อไปเราจะนิยามชั้นสมมูลของความสัมพันธ์สมมูลซึ่งต่อไปจะแสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างผลแบ่งกั้นกันความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 5.2.8 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลลนเซต $A \neq \varnothing$ และ $x \in A$ **ชั้นสมมูลของ** x **มอดุโล** r (equivalence class of x modulo r) จะเขียนแทนด้วย $[x]_r$ หมายถึง

$$[x]_r = \{y \in A \,|\, y\, r\, x\}$$

และเซตของชั้นสมมูลเรียกว่า **เซต** A **มอดุโล** r (A mudulo r) เขียนแทนด้วย A/r ดังนั้น

$$A/r = \{[x]_r \,|\, x \in A\}$$

ตัวอย่าง 5.2.9 ให้ความสัมพันธ์สมมูล r บน N โดย $x\, r\, y$ ก็ต่อเมื่อ $5|(x - y)$ จงหาชั้นสมมูลทั้งหมด และเซตของชั้นสมมูลของ r

ตัวอย่าง 5.2.10 ให้ความสัมพันธ์สมมูล r บน $\varnothing \neq A \subseteq R$ โดย $x\, r\, y$ ก็ต่อเมื่อ $y = x$ จงหาชั้นสมมูลทั้งหมด และเซตของชั้นสมมูลของ r

ตัวอย่าง 5.2.11 ให้ $A \neq \varnothing$ และ $r = A \times A$ จงหาชั้นสมมูลทั้งหมด และเซตของชั้นสมมูลของ r

ทฤษฎีบท 5.2.12 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลลนเซต $A \neq \varnothing$ แล้ว

1. $\forall x \in A,\ [x]_r \neq \varnothing$
2. $\forall x, y \in A,\ [x]_r \cap [y]_r \neq \varnothing \leftrightarrow x\, r\, y$
3. $\forall x, y \in A,\ [x]_r = [y]_r \leftrightarrow x\, r\, y$
4. $\forall x, y \in A,\ [x]_r \neq [y]_r \leftrightarrow [x]_r \cap [y]_r = \varnothing$

ทฤษฎีบท 5.2.13 ให้ $A \neq \varnothing$ และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต A แล้ว A/r เป็นผลแบ่งกั้นหนึ่งของเซต A

บทนิยาม 5.2.14 ให้ Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซต A เราจะนิยามความสัมพันธ์ A/Π บน A (A modulo Π) โดย

$$(x, y) \in A/\Pi \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{มี } B \in \Pi \text{ ซึ่ง } \{x, y\} \subseteq B$$

ตัวอย่าง 5.2.15 กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}\}$ จงหา A/Π

ตัวอย่าง 5.2.16 กำหนดให้ $A = \mathbb{N}$ และ $\Pi = \{\{1, 3, 5, 7, ...\}, \{2, 4, 6, 8, ...\}\}$ จงหา A/Π

ทฤษฎีบท 5.2.17 ให้ Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซต $A \neq \varnothing$ แล้ว A/Π เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

ทฤษฎีบท 5.2.18 ให้ Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซต $A \neq \varnothing$ และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว

$$A/(A/r) = r \quad \text{และ} \quad A/(A/\Pi) = \Pi$$

แบบฝึกหัด 5.2

1. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

   1.1 $r = \{(a, b), (b, a)\}$

   1.2 $r = \{(c, d), (c, c)\}$

   1.3 $r = \{(a, a), (b, b)\}$

   1.4 $r = \{(d, c)\}$

   จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูลหรือความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

   1.1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y > x\}$

   1.2 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y = 2\}$

   1.3 $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid 4|(x - y)\}$

   1.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid 5|(2x - 2y)\}$

   1.5 ให้ S เป็นเซต และ $A, B \in \mathcal{P}(S)$ กำหนดให้ $A\,r\,B$ มีความหมายว่า $A \subseteq B$

2. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\Pi = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}, \{7, 8\}\}$
   และ $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (1, 2), (2, 1)\}$
   จงหาสมาชิกของ

   2.1 A/r

   2.2 $[3]_r$

   2.3 A/Π

   2.4 $[3]_{A/\Pi}$

   2.5 $A/(A/r)$

   2.6 $A/(A/\Pi)$

3. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $r_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n|(y - x)\}$ จงแสดงว่า r_n เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{N}$ ทุกๆ $n \in \mathbb{N}$

4. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $r_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid n|(y - x)\}$ นิยาม $[x]_n = [x]_{r_n}$ และ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{N}/r_n$ จงหาสมาชิกของ

   4.1 $[2]_3$

   4.2 $[3]_4$

   4.3 $[5]_4$

   4.4 $\mathbb{Z}_3$

   4.5 $\mathbb{Z}_4$

   4.6 $\mathbb{Z}_7$

   4.7 $[2]_{\mathbb{N}/\mathbb{Z}_3}$

   4.8 $[3]_{\mathbb{N}/\mathbb{Z}_5}$

5. ให้ Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซตหนึ่ง ให้ A, B และ C เป็นสมาชิกใน Π จงแสดงว่า ถ้า $B \cap C \neq \varnothing$ แล้ว $B = C$

5.3 ความสัมพันธ์ผกผันและประกอบ (Inverse & Compound relations)

บทนิยาม 5.3.1 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B **ความสัมพันธ์ผกผัน** (inverse relation) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} คือความสัมพันธ์จาก B ไป A กำหนดให้ $x\,r^{-1}\,y$ ก็ต่อเมื่อ $y\,r\,x$

$$r^{-1} = \{(x,y) \in B \times A \,|\, (y,x) \in r\}$$

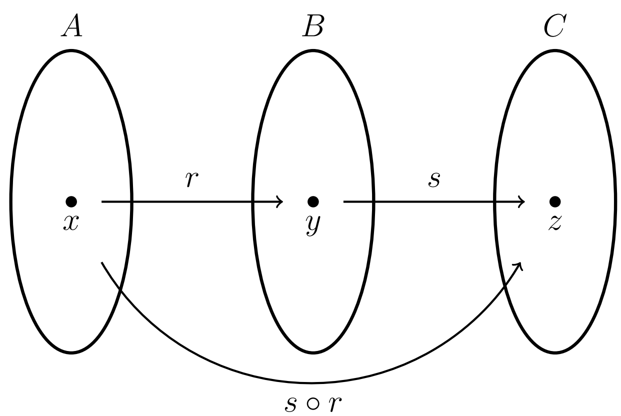
ข้อสังเกต $\text{Dom}(r^{-1}) = \text{Im}(r)$ และ $\text{Im}(r^{-1}) = \text{Dom}(r)$

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหา r^{-1} เมื่อกำหนดให้

1. $r = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$
2. $r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,|\, y \leq x\}$
3. $r = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,|\, 5|(y+x)\}$
4. ให้ $x,y \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $y = 2x+1$

บทนิยาม 5.3.3 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C **ความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s** (r composed with s) จะเขียนแทนด้วย $s \circ r$ คือความสัมพันธ์จาก A ไป C กำหนดโดย

$$s \circ r = \{(x,z) \in A \times C \,|\, \exists y \in B,\ (x,y) \in r \wedge (y,z) \in s\}$$



ตัวอย่าง 5.3.4 กำหนดให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{3,5,6,7\}$ และ $C = \{2,4,6,8\}$

1. $r = \{(1,3),(3,3),(3,5),(4,7)\}$ และ $s = \{(3,2),(5,4),(6,6),(7,4)\}$ จงหา $s \circ r$
2. $r = \{(2,3),(4,5),(6,7),(2,6)\}$ และ $s = \{(3,1),(5,2),(6,1),(7,4)\}$ จงหา $r \circ s$

บทนิยาม 5.3.5 ให้ $A \neq \varnothing$ เป็นเซต **ความสัมพันธ์เอกลักษณ์** (identity relation) บน A เขียนแทนด้วย i_A กำหนดโดย

$$i_A = \{(x,x) \,|\, x \in A\}$$

หรือ $a\,i_A\,b$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

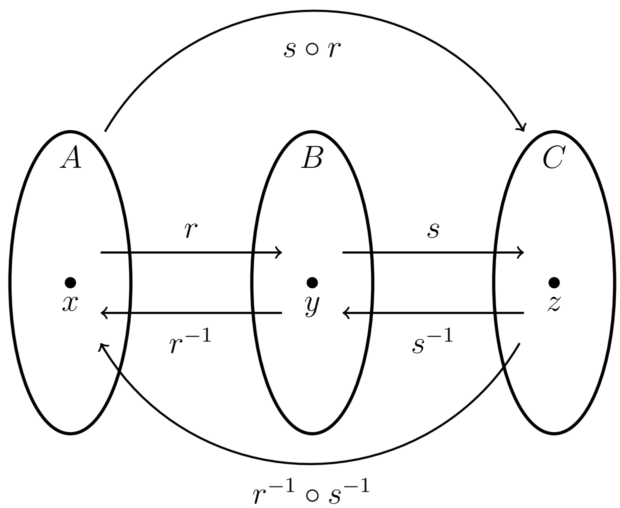
ตัวอย่าง 5.3.6 ให้ $A = \{1,2,3,4,5\}$ และ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A และ $r = \{(1,2),(2,3),(4,5),(5,1)\}$ จงหา

1. r^{-1}
2. i_A
3. $r \circ r$
4. $r^{-1} \circ r$
5. $r \circ r^{-1}$
6. $r \circ i_A$
7. $i_A \circ r$
8. $r^{-1} \circ r^{-1}$
9. $(r \circ r)^{-1}$
10. $(r \circ r) \circ r^{-1}$

ตัวอย่าง 5.3.7 ให้ $A = \{1,2,3\}$, $B = \{a,b,c\}$และ $C = \{4,5,6\}$ ให้ $r = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ ให้ $s = \{(a,4),(b,4),(c,5)\}$ เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C จงหา

1. r^{-1}
2. s^{-1}
3. $s \circ r$
4. $(s \circ r)^{-1}$
5. $r^{-1} \circ s^{-1}$

ตัวอย่าง 5.3.8 ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ ให้ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C จงแสดงว่า $(s \circ r)^{-1} = r^{-1} \circ s^{-1}$



ตัวอย่าง 5.3.9 ให้ A เป็นเซตใดๆ ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จงแสดงว่า r มีสมบัติถ่ายทอด ก็ต่อเมื่อ $r \circ r \subseteq r$

แบบฝึกหัด 5.3

1. กำหนดให้ $r = \{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ และ $s = \{(1,3),(2,2),(3,4),(4,2)\}$ จงหา

   1.1 $s \circ r$
   1.2 $r \circ s$
   1.3 Dom$(s \circ r)$
   1.4 Dom$(r \circ s)$
   1.5 Im$(s \circ r)$
   1.6 Im$(r \circ s)$
   1.7 $s^{-1} \circ r^{-1}$
   1.8 $r^{-1} \circ s^{-1}$
   1.9 $(s \circ r)^{-1}$
   1.10 $(r \circ s)^{-1}$
   1.11 $s \circ (r \circ s)$
   1.12 $(s \circ r) \circ s$

2. ให้ $A \neq \varnothing$ และ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A จงแสดงว่า

   2.1 $(r^{-1})^{-1} = r$
   2.2 $(i_A)^{-1} = i_A$
   2.3 r เป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็ต่อเมื่อ r^{-1} เป็นความสัมพันธ์สมมูล
   2.4 ถ้า r มีสมบัติสมมาตร แล้ว $r \circ r$ มีสมบัติสมมาตร
   2.5 r เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วน ก็ต่อเมื่อ r^{-1} เป็นความสัมพันธ์อันดับบางส่วน

3. ให้ A, B และ C เป็นเซตใดๆ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C จงแสดงว่า

   3.1 Dom$(s \circ r) \subset$ Dom(r)
   3.2 Im$(s \circ r) \subseteq$ Im(s)
   3.3 ถ้า Im$(r) \subseteq$ Dom(s) แล้ว Dom$(s \circ r) =$ Dom(r)

4. ให้ $A \neq \varnothing$ เป็นเซตใดๆ ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน A จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   4.1 ถ้า $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล แล้ว $s \circ r = r \circ s$
   4.2 ถ้า $r \cup s = r \circ s$ แล้ว $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล
   4.3 ถ้า $r \cup s = r \circ s$ แล้ว $s \circ r = r \circ s$

5. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใดๆ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C และ t เป็นความสัมพันธ์จาก C ไป D จงแสดงว่า $t \circ (s \circ r) = (t \circ s) \circ r$

บทที่ 6

ฟังก์ชัน (Functions)

6.1 ฟังก์ชัน (Functions)

บทนิยาม 6.1.1 ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B แล้ว f เป็น**ฟังก์ชันจาก A ไป B** (function from A to B) จะเขียนแทนด้วย $f : A \to B$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $\text{Dom}(f) = A$

(2) $\forall x \in A \, \forall y \in B,\ (x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \to y = z$

ถ้า f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $(x, y) \in f$ ขียนแทนด้วย $y = f(x)$ ข้อ (2) จากนิยามข้างต้นเขียนใหม่ได้เป็น

$$\forall x_1, x_2 \in A,\ x_1 = x_2 \to f(x_1) = f(x_2)$$

ตัวอย่าง 6.1.2 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ จงตรวจสอบว่าข้อใดต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, c)\}$
2. $g = \{(1, a), (1, b), (3, c), (4, d)\}$
3. $h = \{(1, a), (2, b), (3, c)\}$
4. $t = \{(a, 1), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$

ตัวอย่าง 6.1.3 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 1)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 1), (3, 3), (4, 2)\}$ จงหาค่าต่อไปนี้

1. $f(1) + f(2)$
2. $g(3) - g(4)$
3. $f(1) \cdot g(2)$
4. $f(g(3)) - g(f(3))$

ตัวอย่าง 6.1.4 จงแสดงว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x + 1\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 6.1.5 จงแสดงว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = x^2 - 1\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 6.1.6 จงแสดงว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x-1}{x^2+1}\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 6.1.7 จงแสดงว่า $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 = 1\}$ เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}^+$ ไป $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 6.1.8 ให้ $f : A \to B$ และ $g : A \to B$ แล้ว $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) = g(x)$ ทุกๆ $x \in A$

ตัวอย่าง 6.1.9 ให้ $f, g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x$ และ $g(x) = |x|$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f = g$

บทนิยาม 6.1.10 กำหนดให้ $f : A \to B$ เราจะกล่าวว่า

1. f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one/injection) ก็ต่อเมื่อ $\forall x_1, x_2 \in A,\ f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2$
2. f เป็น**ฟังก์ชันทั่วถึง** B (onto B/surjection) ก็ต่อเมื่อ $\text{Im}(f) = B$
3. f มี**สมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง** (one-to-one correspondence/bijection) ก็ต่อเมื่อ f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและทั่วถึง B

ตัวอย่าง 6.1.11 ให้ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ กำหนดโดย $(x, y) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $y = 2x - 1$ จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. f เป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$
2. f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
3. f มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{R}$
4. f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 6.1.12 ให้ $f \subseteq (0, 1) \times (0, 1)$ กำหนดโดย $(x, y) \in f$ ก็ต่อเมื่อ $y = \frac{x}{x+1}$ จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. f เป็นฟังก์ชันจาก $(0, 1)$ ไป $(0, 1)$
2. f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
3. f มีสมบัติทั่วถึง $(0, 1)$
4. f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 6.1.13 ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย $f(x) = x^2$ จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
2. f มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{R}$
3. f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 6.1.14 ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
2. f มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{N}$
3. f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 6.1.15 ให้ $A \neq \varnothing$ จงแสดงว่า $i_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ เป็นฟังก์ชัน และมีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง เราเรียกฟังก์ชันนี้ว่า **ฟังก์ชันเอกลักษณ์** (identity function)

ตัวอย่าง 6.1.16 ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ -\frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

1. f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง
2. f มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{Z}$
3. f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

แบบฝึกหัด 6.1

1. พิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$ หรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล ถ้าเป็นจงตรวจว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ทั่วถึง $\mathbb{R}$ และสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่พร้อมทั้งให้เหตุผล

   1.1 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 3x+2\}$

   1.2 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt{1-x}\}$

   1.3 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{1}{x-1}\}$

   1.4 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \frac{x}{x^2+1}\}$

   1.5 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = 2x^2+1\}$

   1.6 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2+y^2 = 9\}$

   1.7 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = \sqrt[3]{x}\}$

   1.8 $f = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y = |x-1|\}$

2. ให้ $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ โดยที่ $f(x) = x-1$ และ $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ จงแสดงว่าฟังก์ชัน $f = g$

3. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(x) = [x]$ จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง $\mathbb{Z}$

4. ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}+1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

   จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

   4.1 f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

   4.2 f มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{N}$

   4.3 f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

5. ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} -\frac{x-2}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

   จงพิจารณาว่า f มีสมบัติใดต่อไปนี้พร้อมทั้งให้เหตุผล

   5.1 f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

   5.2 f มีสมบัติทั่วถึง $\mathbb{N}$

   5.3 f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

6. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ว่าง และฟังก์ชัน $\chi_A : \mathbb{R} \to \{0,1\}$ นิยามโดย $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{เมื่อ } x \in A \\ 0 & \text{เมื่อ } x \notin A \end{cases}$

   เมื่อให้ A และ B เป็นสับเซตที่ไม่ว่างของจำนวนจริง จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์

   6.1 $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$

   6.2 $\chi_{A\cup B} = \chi_A \cdot \chi_B + \chi_A + \chi_B$

7. ให้ $f, g : A \to B$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์

   7.1 $f \cup g : A \to B$

   7.2 $f \cap g : A \to B$

   7.3 ถ้า $f \cup g : A \to B$ แล้ว $f = g$

   7.4 ถ้า $f \cap g : A \to B$ แล้ว $f = g$

   7.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cup g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

   7.6 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cap g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

   7.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง B แล้ว $f \cup g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง B

   7.8 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง B แล้ว $f \cap g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง B

6.2 ฟังก์ชันผกผันและประกอบ (Inverse & Compound functions)

จากหัวข้อที่ผ่านมาความสัมพันธ์ผกผันย่อมเป็นความสัมพันธ์ ในกรณีของฟังก์ชันแล้วฟังก์ชันผกผันไม่จำเป็นต้องเป็นฟังก์ชันเสมอไป ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงคุณสมบัติอะไรที่ทำให้ฟังก์ชันผกผันยังเป็นฟังก์ชัน

ทฤษฎีบท 6.2.1 ให้ $f : A \to B$ แล้วจะได้ว่า $f^{-1} : B \to A$ ก็ต่อเมื่อ f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

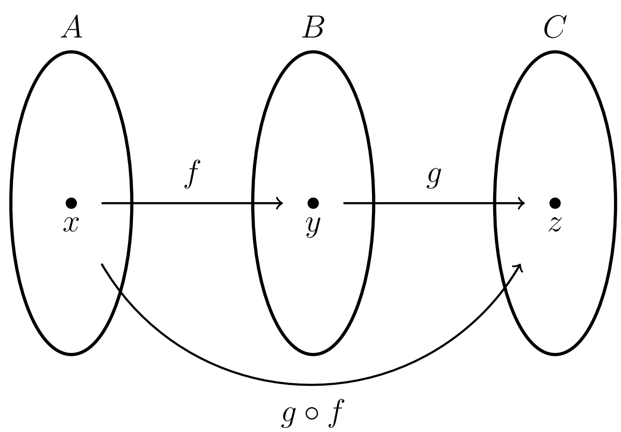
ทฤษฎีบท 6.2.2 $f : A \to B$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} : B \to A$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ตัวอย่าง 6.2.3 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 3x + 2$
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^2 + 1$
3. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \frac{x}{x+1}$
4. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = \sqrt[3]{x}$

จากนิยามของความสัมพันธ์ประกอบเราจะนิยาม**ฟังก์ชันก์ประกอบ** (composite function) ในทำนองเดียวกันสำหรับ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ แล้ว $g \circ f : A \to C$ คือเซต

$$g \circ f = \{(x, z) \in A \times C \,|\, \exists y \in B, (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\}$$



และโดยนิยามจะได้ว่า $g \circ f(x) = g(f(x))$

ทฤษฎีบท 6.2.4 $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งแล้ว $g \circ f : A \to C$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 6.2.5 ให้ $f : A \to B$ แล้ว

1. $f \circ i_A = f$
2. $i_B \circ f = f$
3. ถ้า f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \circ f^{-1} = i_B$ และ $f^{-1} \circ f = i_A$

แบบฝึกหัด 6.2

1. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้มีฟังก์ชันผกผันหรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

   1.1 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=1-2x$

   1.2 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=x^3+1$

   1.3 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

   1.4 $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x)=\sqrt{x}$

2. จงแสดงว่า ถ้า $f:A\to B$ และ $g:B\to C$ แล้ว $g\circ f:A\to C$

3. ให้ $f:A\to B$ และ $g:B\to C$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   3.1 ถ้า $g\circ f$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

   3.2 ถ้า $g\circ f$ มีสมบัติทั่วถึงบน C แล้ว g มีสมบัติทั่วถึงบน C

4. ให้ $f:A\to B$ และ $g:B\to C$ จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้

   4.1 ถ้า $g\circ f$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง

   4.2 ถ้า $g\circ f$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว f มีสมบัติทั่วถึงบน B

   4.3 ถ้า $g\circ f$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว g มีสมบัติทั่วถึงบน C

5. ให้ $f:A\to B$ จงพิสูจน์

   5.1 ถ้า f มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ มี $g:B\to A$ ซึ่ง $g\circ f=i_A$

   5.2 ถ้า f มีสมบัติทั่วถึงบน B ก็ต่อเมื่อ มี $g:B\to A$ ซึ่ง $f\circ g=i_B$

   5.3 ถ้า f มีสมบัติทั่วถึงบน B ก็ต่อเมื่อ $f\circ f^{-1}=i_B$

6. ให้ A และ B เป็นเซตไม่ว่าง และ $f:A\to B$ (f^-1 อาจไม่เป็นฟังก์ชันก็ได้)

   6.1 จงแสดงว่า $f^{-1}\circ f$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต A

   6.2 จงหาเซตของชั้นสมมูล $[x]_{f^{-1}\circ f}$

7. ให้ $f:A\to B$ และ $g:B\to C$ จงแสดงว่า ถ้า $g\circ f=i_A$ และ $f\circ g=i_B$ แล้ว f มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง และ $g=f^{-1}$

8. ให้ $f:A\to B$ มีสมบัติทั่วถึงบน B, $g:B\to C$ และ $h:B\to C$ จงแสดงว่า ถ้า $g\circ f=h\circ f$ แล้ว $g=h$

9. ให้ $f:B\to C$ มีสมบัติหนึ่งต่อหนึ่ง, $g:A\to B$ และ $h:A\to B$ จงแสดงว่า ถ้า $f\circ g=f\circ h$ แล้ว $g=h$

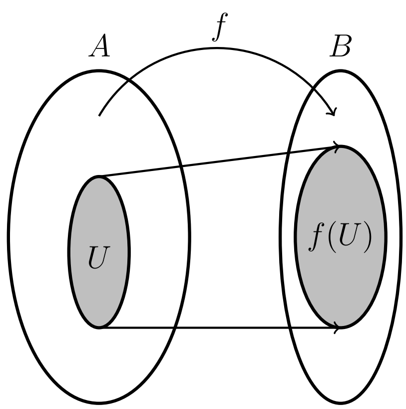
6.3 ภาพและภาพผกผัน (Image & Inverse image)

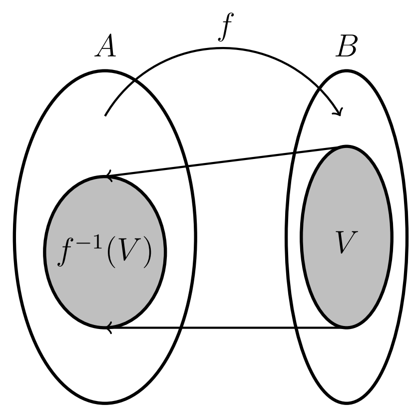
บทนิยาม 6.3.1 ให้ $f : A \to B$ และ $U \subseteq A$ เรานิยาม **ภาพของ** U (image of U) เขียนแทนด้วย $f(U)$

$$f(U) = \{f(x) \mid x \in A\}$$

และ $V \subseteq B$ เรานิยาม **ภาพผกผันของ** V (inverse image of V/preimage of V) เขียนแทนด้วย $f^{-1}(V)$

$$f(V) = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$$





จากนิยาม ถ้า $y \in f(U)$ หมายความว่า $\exists x \in A$ ซึ่ง $f(x) = y$ ดังนั้น

$$f(U) = \{y \mid \exists x \in A, y = f(x)\}$$

และถ้า $x \in f^{-1}(V)$ หมายถึง $f(x) \in V$ นั้นหมายความว่า

$$x \in f^{-1}(V) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad f(x) \in V$$

ข้อสังเกต $f(A) = \mathrm{Im}(f)$ และ $f^{-1}(B) = \mathrm{Dom}(f) = A$

ตัวอย่าง 6.3.2 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ และ $B = \{a, b, c, d\}$ กำหนดฟังก์ชัน $f : A \to B$ โดย

$$f = \{(1, a), (2, a), (3, b), (4, a), (5, c)\}$$

จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้

1. $f(\{1, 2\})$
2. $f(\{2, 4, 5\})$
3. $f(\varnothing)$
4. $f(A)$
5. $f^{-1}(\{a, d\})$
6. $f^{-1}(\{b, c, d\})$
7. $f^{-1}(\varnothing)$
8. $f^{-1}(B)$

ตัวอย่าง 6.3.3 ให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

1. $f([0, 1])$
2. $f((-1, 2])$
3. $f^{-1}((-1, 1))$
4. $f^{-1}([0, 2))$

ทฤษฎีบท 6.3.4 ให้ $f : A \to B$ และ $C, D \subseteq A$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad C \subset D \quad \text{แล้ว} \quad f(C) \subseteq f(D)$$

ทฤษฎีบท 6.3.5 ให้ $f : A \to B$ และ $C, D \subseteq B$ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad C \subset D \quad \text{แล้ว} \quad f^{-1}(C) \subseteq f^{-1}(D)$$

ตัวอย่าง 6.3.6 ให้ $f : A \to B$ และ $C, D \subseteq A$ จงแสดงว่า $f(C \cup D) = f(C) \cup f(D)$

ตัวอย่าง 6.3.7 ให้ $f : A \to B$ และ $C, D \subseteq B$ จงแสดงว่า $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$

ทฤษฎีบท 6.3.8 ให้ $f : C \to D$ และ $A_\alpha \subseteq C$ ทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ จะได้ว่า

$$f\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha)$$

ทฤษฎีบท 6.3.9 ให้ $f : C \to D$ และ $A_\alpha \subseteq D$ ทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ จะได้ว่า

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha)$$

ทฤษฎีบท 6.3.10 ให้ $f : A \to B$ จะได้ว่า

ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง B ก็ต่อเมื่อ $B - f(C) \subseteq f(A - C)$ ทุกๆ $C \subseteq A$

แบบฝึกหัด 6.3

1. ให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = |x|$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

   1.1 $f([0,1])$ 1.2 $f((-1,1))$ 1.3 $f^{-1}((-1,1))$ 1.4 $f^{-1}([1,3))$

2. ให้ฟังก์ชัน $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = x^2 + 1$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

   2.1 $f([0,2])$ 2.2 $f([-2,1))$ 2.3 $f^{-1}((-1,2])$ 2.4 $f^{-1}((-2,2))$

3. ให้ $f : A \to B$ จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้

   3.1 ถ้า $C, D \subseteq A$ แล้ว $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$

   3.2 ถ้า $C, D \subseteq B$ แล้ว $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$

   3.3 ถ้า $C \subseteq A$ แล้ว $f^{-1}(f(C)) = C$

   3.4 ถ้า $C \subseteq B$ แล้ว $f(f^{-1}(C)) = C$

   3.5 $f^{-1}(B - D) = A - f^{-1}(D)$ เมื่อ $D \subseteq B$

   3.6 ถ้า $A_\alpha \subseteq B$ ทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ แล้ว $f^{-1}\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(A_\alpha)$

   3.7 ถ้า $A_\alpha \subseteq A$ ทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ แล้ว $f\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda} f(A_\alpha)$

4. ให้ $f : A \to B$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   4.1 f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน B ก็ต่อเมื่อ $f(f^{-1}(C)) = C$ ทุกๆ $C \subseteq B$

   4.2 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $f^{-1}(f(C)) = C$ ทุกๆ $C \subseteq A$

   4.3 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $f(C \cap D) = f(C) \cap f(D)$ ทุกๆ $C, D \subseteq A$

   4.4 ถ้า f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงบน B จะได้ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $B - f(C) = f(A - C)$ ทุกๆ $C \subseteq A$

   4.5 ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ และ $D \subseteq C$ จะได้ว่า $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$

6.4 การดำเนินการทวิภาค (Binary Operations)

เราคงคุ้นเคยกับการดำเนินการต่างๆ โดยเฉพาะทางเลขคณิต เช่น การบวก ลบ คูณ หาร $(+, -, \cdot, \div)$ มาบ้างแล้ว ในหัวข้อนี้จะมาเรียนนิยามของการดินการที่เรารู้จักให้ทั่วไปมากขึ้น ซึ่งเราเรียกว่าการดำเนินการทวิภาค (binary operation)

บทนิยาม 6.4.1 ให้ A เป็นเซต แล้ว $*$ เป็น**การดำเนินการทวิภาคบนเซต** G (binary operation on G) ก็ต่อเมื่อ

$$*: G \times G \to G$$

เขียน $a * b = c$ แทน $*(a, b) = c$

ตัวอย่าง 6.4.2 ข้อต่อไปนี้เป็นตัวอย่างการดำเนินการทวิภาคที่เรารู้จัก

1. การบวก การลบ และการคูณ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{R}$
2. การบวก และการคูณ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathbb{Z}$ และบน $\mathbb{N}$
3. สำหรับเซต S แล้วผลผนวก $(\cup)$, ผลตัด $(\cap)$ และผลต่าง $(-)$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน $\mathcal{P}(S)$
4. เมื่อ A คือเซตของประพจน์ แล้วตัวเชื่อม $\wedge$, $\vee$, $\to$ และ $\leftrightarrow$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบน A

ตัวอย่าง 6.4.3 นิยาม $a * b = \frac{1}{2}(a + b)(a + b - 1)$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{N}$ จงหาค่าของ

1. $2 * 3$
2. $1 * (2 * 3)$
3. $(1 * 2) * 3$
4. $5*(4*(3*(2*1)))$

ตัวอย่าง 6.4.4 นิยาม $a * b = \max\{a, b\}$ และ $a \star b = \min\{a, b\}$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ จงหาค่าของ

1. $2 * (3 \star 4)$
2. $(2 * 3) \star 4$
3. $(2 * 3) \star (2 * 4)$

ตัวอย่าง 6.4.5 สำหรับ x และ y เป็นจำนวนจริงบวกใดๆ กำหนดให้ $x * y$ ที่มีสมบัติต่อไปนี้

(1) $x * (xy) = (x * x)y$ (2) $x * (1 * x) = 1 * x$ (3) $1 * 1 = 1$

ค่าของ $2 * (5 * (5 * 6))$ เท่ากับเท่าใด

ตัวอย่าง 6.4.6 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G จงสร้างตารางผลการดำเนิน

1. นิยาม $a * b = a + b + 1$ บน $G = \{1, 2, 3\}$

$*$	1	2	3
1			
2			
3			

2. นิยาม $a * b = \frac{1}{2}(a + b)$ บน $G = \{-2, 0, 2\}$

$*$	-2	0	2
-2			
0			
2			

ตัวอย่าง 6.4.7 จงหาค่าต่อไปนี้ เมื่อกำหนดให้ผลการดำเนินการ $*$ บนเซต $G = \{1, 2, 3, 4\}$ สอดคล้องตาราง

$*$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	1	2	1	1
3	2	3	3	1
4	3	2	4	4

1. $(1 * 2) + (2 * 1)$
2. $(4 * 1) * (2 * 3)$
3. $(1 * 2) * 3 + 1 * (2 * 3)$
4. จงหา $x \in G$ ซึ่ง $x * y = y$ ทุกๆ $y \in G$

สมบัติของการดำเนินการ

บทนิยาม 6.4.8 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G และให้ $A \subseteq G$ ถ้า

$$\forall a, b \in A, \qquad a * b \in A$$

แล้วเราจะกล่าวว่า เซต A มี**สมบัติปิด** (closed) ภายใต้ $*$ หรือ $*$ มีสมบัติปิดบนเซต A

ตัวอย่าง 6.4.9 จงพิจารณา ✓ หรือ $\times$ ของข้อความต่อไปนี้

1. ☐ นิยาม $a * b = a + b - 2$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ แล้ว $*$ มีสมบัติปิดบนจำนวนนับ
2. ☐ นิยาม $a * b = \dfrac{(a+b)^2 - (a+b)}{2}$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{N}$ แล้ว $*$ มีสมบัติปิดบนจำนวนนับ
3. ☐ นิยาม $a * b = \sqrt{a^2 - ab + b^2}$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{Q}$ แล้ว $*$ มีสมบัติปิดบนจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 6.4.10 จงตรวจสอบสมบัติปิดของการดำเนินทวิภาคบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. นิยาม $*$ บน $A = \{2, 4, 6\}$ ดังตาราง

$*$	2	4	6
2	2	4	6
4	4	2	4
6	6	4	2

2. นิยาม $a * b = \sqrt[3]{ab}$ บน $A = \{-1, 0, 1\}$

$*$	-1	0	1
-1			
0			
1			

ตัวอย่าง 6.4.11 จงพิจารณาสมบัติปิดของ $*$ บนเซต G ต่อไปนี้

1. เซตของจำนวนคู่ $A = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$ กับการบวก และการคูณ
2. เซตของจำนวนคี่ $A = \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, ...\}$ กับการบวก และการคูณ
3. เซตของ $A = \{-1,\ 1,\ \sqrt{2} + 1, \sqrt{2} - 1\}$ การคูณ และการหาร

บทนิยาม 6.4.12 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ถ้า

$$\forall a, b \in G, \qquad a * b = b * a$$

แล้วเราจะกล่าวว่า เซต G มี**สมบัติสลับที่** (commutative law) ภายใต้ $*$ หรือ $*$ มีสมบัติสลับที่บนเซต G

ตัวอย่าง 6.4.13 จงตรวจสอบสมบัติการสลับที่ของการดำเนินทวิภาคบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. นิยาม $*$ บน $G = \{0, 1, 2\}$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
0	2	0	0
1	0	1	2
2	1	2	2

2. นิยาม $*$ บน $G = \{1, 2, 3\}$ ดังตาราง

$*$	1	2	3
1	1	3	2
2	3	2	1
3	2	1	3

ตัวอย่าง 6.4.14 จงตรวจสอบสมบัติการสลับที่ของการดำเนินทวิภาคบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $G = \mathbb{N}$ นิยาม $a * b = a + b + 5$
2. $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = a^b$
3. $G = \mathbb{Q}$ นิยาม $a * b = a(a + b) + b(a + b)$
4. $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a^2 - ab + b^2$

บทนิยาม 6.4.15 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต A และ $G \subseteq A$ ถ้า

$$\forall a, b, c \in G, \qquad a * (b * c) = (a * b) * c$$

แล้วเราจะกล่าวว่า เซต G มี**สมบัติการจัดกลุ่ม** (associative law) ที่ภายใต้ $*$ หรือ $*$ มีสมบัติการจัดกลุ่มที่บนเซต G

ตัวอย่าง 6.4.16 จงตรวจสอบสมบัติการจัดกลุ่มของการดำเนินทวิภาคบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

นิยาม $*$ บน $G = \{1, 2, 3\}$ ดังตาราง

$*$	1	2	3
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	3

วิธีทำ แสดงโดยการสร้างตารางผลการดำเนินการ

	$*$	1	2	3
$1 * 1$	1			
$1 * 2$	2			
$1 * 3$	3			
$2 * 1$	2			
$2 * 2$	1			
$2 * 3$	3			
$3 * 1$	3			
$3 * 2$	3			
$3 * 3$	3			

	$1 * 1$	$1 * 2$	$1 * 3$	$2 * 1$	$2 * 2$	$2 * 3$	$3 * 1$	$3 * 2$	$3 * 3$
$*$	1	2	3	2	1	3	3	3	3
1									
2									
3									

ตัวอย่าง 6.4.17 จงตรวจสอบสมบัติการจัดกลุ่มของการดำเนินทวิภาคบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $G = \mathbb{N}$ นิยาม $a * b = a + b + 1$
2. $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \sqrt{ab}$
3. $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a + b + ab$

บทนิยาม 6.4.18 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ถ้ามี $e \in G$ ซึ่งสอดคล้อง

$$\forall a \in G, \quad a * e = a = e * a$$

แล้วเราจะกล่าวว่า เซต G มี e เป็น**เอกลักษณ์**ภายใต้ $*$

ตัวอย่าง 6.4.19 จงตรวจหาเอกลักษณ์ (ถ้ามี) ของการดำเนินบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. นิยาม $a * b = \min\{a, b\}$ บน $G = \{1, 2, 3\}$

$*$	1	2	3
1			
2			
3			

2. นิยาม $*$ บน $G = \{1, 2, 3\}$ ดังตาราง

$*$	1	2	3
1	1	1	2
2	1	2	3
3	2	1	3

ตัวอย่าง 6.4.20 จงตรวจหาเอกลักษณ์ (ถ้ามี) ของการดำเนินบนเซตในแต่ละข้อต่อไปนี้

1. $G = \mathbb{N}$ นิยาม $a * b = a + b - 7$
2. $G = \mathbb{Q}$ นิยาม $a * b = 7ab$
3. $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = ab\sqrt{\pi}$
4. $G = \mathbb{Q}^+$ นิยาม $a * b = \dfrac{ab}{a + b}$

ทฤษฎีบท 6.4.21 ถ้า A มีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $*$ จะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 6.4.22 ให้ $*$ เป็นการดำเนินการทวิภาคบนเซต G ที่มี e เป็นเอกลักษณ์ ถ้า

$$\forall a \in G \; \exists b \in G, \quad a * b = e = b * a$$

แล้วเราจะกล่าวว่า เซต G **มีตัวผกผันหรืออินเวิร์ส** (inverse) ภายใต้ $*$ และเรียก b ว่า**ตัวผกผัน**ของ a

ตัวอย่าง 6.4.23 จงหาตัวผกผัน (ถ้ามี) ของสมาชิกทุกตัวในเซต G ภายใต้ของการดำเนินต่อไปนี้

1. นิยาม $a * b = \max\{a, b\}$ บน $G = \{1, 2, 3\}$

$*$	1	2	3
1			
2			
3			

2. นิยาม $*$ บน $G = \{1, 2, 3\}$ ดังตาราง

$*$	0	1	2
1	1	2	3
2	2	1	3
3	3	3	3

ตัวอย่าง 6.4.24 จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. จงหาตัวผกผันของ $-2,\ 0,\ 5$ และจำนวนเต็มทุกตัวมีตัวผกผันหรือไม่ ของการดำเนินการ
$$\text{นิยาม } a * b = a + b - 1 \quad \text{สำหรับ } a, b \in \mathbb{Z}$$
2. จงหาตัวผกผันของ $-\sqrt{2},\ 0,\ \sqrt{2},\ 2,\ \frac{1}{2},\ 1.5$ และจำนวนจริงทุกตัวมีตัวผกผันหรือไม่ ของการดำเนินการ
$$\text{นิยาม } a * b = ab\sqrt{2} \quad \text{สำหรับ } a, b \in \mathbb{R}$$

ทฤษฎีบท 6.4.25 ให้ A มีเอกลักษณ์ภายใต้การดำเนินการ $*$ และมีสมบัติการจัดกลุ่ม จะได้ว่าถ้าสมาชิกใดก็ตามใน A มีตัวผกผัน แล้วจะมีได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ตัวอย่าง 6.4.26 ให้ $A = \{-1, 0, 1\}$ จงพิจารณาถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้

1. เซต A มีสมบัติปิดภายใต้การบวก
2. เซต A มีเอกลักษณ์การบวก
3. สมาชิกทุกตัวของเซต A มีอินเวอร์สการบวก

ตัวอย่าง 6.4.27 ให้ $\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง เมื่อ $A \subset \mathbb{R}$ และ $A \neq \varnothing$ จงพิจารณาถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้

1. เซต A มีสมบัติปิดภายใต้การบวก
2. เซต A มีสมบัติสลับที่ภายใต้การบวก

ตัวอย่าง 6.4.28 ให้ $a * b = 2a + 2b$ แล้วเซตจำนวนจริงกับ $*$ จงพิจารณาถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้

1. สมบัติปิด
2. สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
3. สมบัติการสลับที่
4. สมบัติการมีเอกลักษณ์

ตัวอย่าง 6.4.29 กำหนดให้ $a \triangle b = a + b + 4ab$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{R}$ จงพิจารณาถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้

1. มีสมบัติปิดภายใต้ $\triangle$
2. มีสมบัติการสลับที่ $\triangle$
3. สมบัติเอกลักษณ์ภายใต้ $\triangle$ เป็น 0
4. มีอินเวิร์สของ 2 ภายใต้ $\triangle$ คือ $-\frac{2}{9}$

ตัวอย่าง 6.4.30 กำหนดให้ $a, b \in \mathbb{R}$ จงพิจารณาถูก/ผิด ของข้อความต่อไปนี้

1. ถ้า $a \oplus b = \frac{a+b}{2}$ แล้ว $a \oplus b \neq b \oplus a$
2. ถ้า $a \oplus b = a^b$ แล้ว $a \oplus 1 = 1 \oplus a$
3. ถ้า $a \oplus b = a + b + 2$ แล้ว -2 เป็นเอกลักษณ์ของ $\oplus$
4. ถ้า $a \oplus b = a + b - 8$ แล้วอินเวอร์สการ $\oplus$ ของ 5 คือ 11

แบบฝึกหัด 6.4

1. จงตรวจสอบสมบัติปิดของการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต A ต่อไปนี้

   1.1 นิยาม $a * b = \dfrac{a^2 - ab - 2b^2}{a+b}$ บน $A = \mathbb{N}$

   1.2 นิยาม $a * b = \dfrac{(a+b)^2 - (a+b)}{2}$ บน $A = \mathbb{N}$

   1.3 นิยาม $a * b =$ เศษที่เหลือจากการหาร $a + b$ ด้วย 7 บน $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

   1.4 นิยาม $a * b = (2^a)(2^b)$ บน $A = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$

   1.5 นิยาม $a * b = \dfrac{a+b}{a+b+1}$ บน $A = [0, 1]$

2. จงตรวจสอบสมบัติสลับที่ จัดกลุ่ม เอกลักษณ์ และตัวผกผัน ของการดำเนินการทวิภาค $*$ บนเซต G ต่อไปนี้

   2.1 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = a^2b + ab^2$

   2.2 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a(-1)^b + b(-1)^a$

   2.3 $G = \mathbb{Q}^+$ นิยาม $a * b = a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$

   2.4 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \dfrac{a^2 + ab}{a + b + ab}$

   2.5 $G = \mathbb{Q}$ นิยาม $a * b = 8ab$

   2.6 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = 2a + 2b$

   2.7 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$

   2.8 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = \max\{a, b\}$

   2.9 $G = \mathbb{N}$ นิยาม $a * b = \min\{a, b\}$

   2.10 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = 1 - a - b$

   2.11 $G = \mathbb{Z}$ นิยาม $a * b = a + b - \pi$

   2.12 $G = \mathbb{Q}$ นิยาม $a * b = 5ab$

   2.13 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = ab + 1$

   2.14 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a + 2b$

   2.15 $G = \mathbb{Q}^c$ นิยาม $a * b = a + b\sqrt{2}$

   2.16 $G = \mathbb{R}$ นิยาม $a * b = a + b + ab$

   2.17 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \sqrt{a} + \sqrt{b}$

   2.18 $G = \mathbb{R}^+$ นิยาม $a * b = \dfrac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$

3. จงหาตัวผกผันของ $-\frac{2}{3}, -2, 0, 1, \frac{1}{2}$ และจำนวนตรรกยะทุกตัวมีตัวผกผันหรือไม่ ของการดำเนินการ

   นิยาม $a * b = -ab$ สำหรับ $a, b \in \mathbb{Q}$

4. กำหนดให้ $a \boxtimes b = \frac{ab}{a-b}$ และ $p \bigtriangleup q = \frac{\frac{1}{p}+\frac{1}{q}}{pq}$ เมื่อ $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ จงหาค่าของ $(10 \boxtimes 5) \bigtriangleup (20 \boxtimes 10)$

5. กำหนดให้ $x \circledcirc (x - y) = x^2 + y^2$ เมื่อ $x, y \in \mathbb{R}$ จงหาค่าของ $20 \circledcirc (5 \circledcirc 3)$

6. กำหนดให้ $a \odot b = 2a + 3b$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Q}$ ถ้ามี $x, y, z \in \mathbb{Q}$ ซึ่ง $x \odot (y \odot z) = (x \odot y) \odot z$ และ $x \odot z = 3$ จงหาค่าของ $z \odot (y \odot x) - (z \odot y) \odot x$

7. กำหนดให้ $a \otimes b = a(a + b)$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}^+$ ถ้า $a \otimes b = 55$ แล้วค่ามากสุดของ $b \otimes a$ มีค่าเท่าใด

8. กำหนดให้ $a \oplus b = a + b + 2$ เมื่อ $a, b \in \mathbb{Z}$ จงหาตัวผกผันของ 4 ภายใต้ $\oplus$

9. กำหนดให้ $a, b, c \in \mathbb{R}$ ถ้ามี a เป็นอินเวอร์สการบวกของ b จงหา c ที่ทำให้ $4a + 4b - 2c + 12 = 0$

10. จงหาตัวผกผันภายใต้การคูณของ $\sqrt{a+1} - \sqrt{a}$ เมื่อ $a > 0$

บทที่ 7

เซตจำกัดและเซตอนันต์ (Finite and Infinite Sets)

7.1 เซตจำกัดและเซตอนันต์ (Finite & Infinite Sets)

เราคงเคยรู้จักกับเซตจำกัดและเซตอนันต์เมื่อตอนเรียนระดับมัธยมศึกษาแต่ยังไม่ได้รู้ถึงการนิยามที่แท้จริงของเซตจำกัดและเซตอนันต์ ในหัวข้อนี้เราจะกล่าวถึงการให้คำจัดกัดความที่แท้จริงของเซตดังกล่าว และสมบัติต่างๆของเซตลักษณะนี้

บทนิยาม 7.1.1 ให้ A และ B เป็นเซต เราจะกล่าวว่าเซต A **สมมูล** (equivalent) กับเซต B เขียนแทนด้วย $A \sim B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $f : A \to B$ ที่มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง หรือ

$$A \sim B \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \exists\, f : A \to B \ \text{ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง}$$

ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\}$ และ $\{1, \{1\}\} \sim \{c, d\}$ เป็นต้น

บทนิยาม 7.1.2 ให้ A เป็นเซตใดๆ เราจะกล่าวว่า A เป็น**เซตจำกัด** (finite set) ถ้า

- $A = \varnothing$ เราจะกล่าวว่า A มีสมาชิก 0 ตัว เขียนแทนด้วย $|A| = 0$
- $A \sim \{1, 2, 3, ..., n\}$ เราจะกล่าวว่า A มีสมาชิก n ตัว เขียนแทนด้วย $|A| = n$

ตัวอย่าง 7.1.3 จงแสดงว่า $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$ เป็นเซตจำกัด

บทตั้ง 7.1.4 ให้ $n \in \mathbb{N}$, A เป็นเซตใดๆ และ $a_0 \in A$ แล้วจะได้ว่า $\exists\, f : A \to \{1, 2, ..., n+1\}$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ก็ต่อเมื่อ $\exists\, g : A - \{a_0\} \to \{1, 2, ..., n\}$ มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง

ทฤษฎีบท 7.1.5 ถ้า $A \sim \{1, 2, ..., n\}$ สำหรับบางจำนวนนับ n ให้ $B \subset A$ จะได้ว่าไม่มีฟังก์ชัน $g : B \to \{1, 2, ..., n\}$ ที่มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้า $B \neq \varnothing$ จะได้ว่า $B \sim \{1, 2, ..., m\}$ เมื่อ $m \in \mathbb{N}$ ซึ่ง $m < n$

บทแทรก 7.1.6 ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว A จะไม่มีสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งกับสับเซตแท้ของตัวเอง

บทแทรก 7.1.7 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 7.1.8 เซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด เราเรียกว่า**เซตอนันต์** (infinite set) หรือ

$$A \text{ เป็นเซตอนันต์} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \forall n \in \mathbb{N} \nexists\, f : A \to \{1, 2, ..., n\} \text{ ที่มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่ง}$$

หรืออาศัยกฎแย้งสลับที่จากบทแทรก 7.1.6 จะได้ว่า

ถ้ามีฟังก์ชันที่มีสมบัติสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยังสับเซตแท้ของ A แล้ว A เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 7.1.9 $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 7.1.10 ให้ A เป็นเซตไม่ว่าง ถ้าเซต B เป็นเซตอนันต์และ $B \subseteq A$ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 7.1.11 ให้ A เป็นเซตไม่ว่าง และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันทั่วถึง $f : \{1, 2, ..., n\} \to A$
2. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $g : A \to \{1, 2, ..., n\}$
3. A เป็นเซตจำกัด และมาสมาชิกอย่างมากสุด n ตัว

ตัวอย่าง 7.1.12 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จงแสดงว่า

1. $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด
2. $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด
3. $A \times B$ เป็นเซตจำกัด

ทฤษฎีบท 7.1.13 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f : \mathbb{N} \to A$
2. มีฟังก์ชันสมนัยหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปยังสับเซตเซตแท้ของ A
3. A เป็นเซตอนันต์

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงพิสูจน์ว่า " สับเซตของเซตจำกัดย่อมเป็นเซตจำกัด "

2. จงพิสูจน์ว่า " สับเซตแท้ของเซตจำกัดย่อมมีสมาชิกน้อยกว่าจำนวนของสมาชิกของเซตจำกัดนั้น "

3. ให้ $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ เมื่อ A_α เป็นเซตจำกัดทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ จงพิสูจน์ว่า

    3.1 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด

    3.2 $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด

    3.3 $\prod\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด

4. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตจำกัด

5. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตอนันต์

6. ให้ A และ B เป็นเซต จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้

    6.1 $A \cap B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตอนันต์

    6.2 $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตจำกัด

    6.3 $A - B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัด

    6.4 $A - B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตอนันต์

7. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด ซึ่ง $A \cap B = \varnothing$ จงแสดงว่า $|A \cup B| = |A| + |B|$

8. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จงแสดงว่า $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

9. ให้ A และ B เป็นเซต และ $\mathbb{F} = \{f \mid f : A \to B\}$ จงแสดงว่า ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $\mathbb{F}$ เป็นเซตจำกัด

7.2 เซตนับได้และเซตนับไม่ได้ (Countable & Uncountable Sets)

บทนิยาม 7.2.1 เราจะกล่าวว่าเซต A เป็น**เซตอนันต์นับได้** (countably infinite set/ denumerable set) ถ้า $A \sim \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 7.2.2 จงแสดงว่า $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์นับได้

ตัวอย่าง 7.2.3 จงแสดงว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์นับได้

บทนิยาม 7.2.4 เราจะกล่าวว่าเซตA เป็น**เซตนับได้** (countable set) ถ้า A เป็นเซตจำกัด หรือเป็นเซตอนันต์นับได้ ถ้า A ไม่เป็นเป็นเซตนับได้ เราจะกล่าวว่า A เป็น**เซตนับไม่ได้** (uncountable set)

ทฤษฎีบท 7.2.5 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันทั่วถึง $f : \mathbb{N} \to A$
2. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $g : A \to \mathbb{N}$
3. A เป็นเซตนับได้

บทแทรก 7.2.6 สับเซตใดก็ตามของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้

ตัวอย่าง 7.2.7 เซต $\mathbb{Q}^+$ เป็นเซตอนันต์นับได้

ตัวอย่าง 7.2.8 เซต $(0,1)$ เป็นเซตนับไม่ได้

ตัวอย่าง 7.2.9 เซต $(0,1) \sim \mathbb{R}$

บทนิยาม 7.2.10 เราจะกล่าวว่า เซต A และ B มี**จำนวนเชิงการนับ** (cardinal number) เท่ากัน ถ้า $A \sim B$

ตัวอย่างจำนวนเชิงการนับในทางทฤษฎีเซต

- $A = \varnothing$ แล้ว A มีจำนวนเชิงการนับเท่ากับ 0
- $A \sim \{1, 2, .., n\}$ แล้ว A มีจำนวนเชิงการนับเท่ากับ n
- $A \sim \mathbb{N}$ แล้ว A มีจำนวนเชิงการนับเท่ากับ $\aleph_0$ (aleph null)
- $A \sim \mathbb{R}$ แล้ว A มีจำนวนเชิงการนับเท่ากับ $\aleph_1$ หรือ c (continuum)

แบบฝึกหัด 7.2

จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. เซต $(0, 1)$ เป็นเซตนับไม่ได้
2. ถ้า A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตนับได้
3. ถ้า A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cap B$ เป็นเซตนับได้
4. เซตของจำนวนคู่เป็นเซตนับได้
5. เซตของจำนวนคี่เป็นเซตนับได้
6. เซต $\mathbb{Q}$ เป็นเซตอนันต์นับได้
7. เซต $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์นับได้
8. เซต $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ เป็นเซตอนันต์นับได้
9. สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้
10. เซตใดก็ตามมีสับเซตที่เป็นเซตนับไม่ได้ย่อมเป็นเซตนับไม่ได้
11. ให้ A และ B เป็นเซต ถ้า $A \sim B$ และ A เป็นเซตนับได้ แล้ว B เป็นเซตนับได้

บทที่ 8

ระบบจำนวนจริง (The Real Number System)

การสร้างระบบจำนวนจริงนั้นทำได้หลายวิธี วิธีหนึ่งก็คือเริ่มต้นจากสัจพจน์เปอาโน (Peano postulates) ซึ่งเกี่ยวกับสมบัติจำนวนนับ หลังจากนั้นก็สร้างจำนวนเต็ม จำนวนตรรกยะ และจำนวนจริงในที่สุดหาอ่านได้จาก [7] ในบททนี้เราจะกล่าวถึงสัจพจน์สนามและสมบัติความบริบูรณ์ของจำนวนจริง

8.1 สัจพจน์สนาม (Field Axiom)

สัจพจน์สนาม (Field axioms) สมมติว่ามีเซต $\mathbb{R}$ ซึ่งเรียกว่า **เซตของจำนวนจริง** และมีการดำเนินการทวิภาค $+$ และ $\cdot$ ซึ่งเรียกว่า**การบวก**และ**การคูณ**ตามลำดับ โดยมีสมบัติดังนี้

(R1) $\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x+y$ และ $x \cdot y$ เป็นจำนวนจริง	
(R2) $\forall x, y \in \mathbb{R}$	$x+y=y+x$ และ $x \cdot y = y \cdot x$	
(R3) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$(x+y)+z=x+(y+z)$ และ $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$	
(R4) $\exists! 0 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}$	$x+0=x=0+x$	เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก
(R5) $\exists! 1 \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}$	$x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$	เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณ
(R6) $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}$	$x+y=0=y+x$	เรียก y ตัวผกผันสำหรับการบวกของ x เขียนแทนด้วย $-x$
(R7) $\forall x \in \mathbb{R}-\{0\}\, \exists y \in \mathbb{R}$	$x \cdot y = 1 = y \cdot x$	เรียก y ตัวผกผันสำหรับการคูณของ x เขียนแทนด้วย x^{-1}
(R8) $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$	$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z$	

ต่อไปนี้เพื่อความสะดวก xy แทน $x \cdot y$
ข้อสังเกตที่ได้จากสัจพจน์สนาม

- $-0=0$ เพราะว่า $0+0=0$ (R6)
- $1^{-1}=1$ เพราะว่า $1 \cdot 1 = 1$ (R7)

บทนิยาม 8.1.1 สำหรับจำนวนจริง x และ y กำหนดให้ $x-y=x+(-y)$ และ $\frac{x}{y}=xy^{-1}$ เมื่อ $y \neq 0$

ทฤษฎีบท 8.1.2 ให้ x เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. มีตัวผกผันสำหรับการบวกของ x ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น
2. ถ้า $x \neq 0$ มีตัวผกผันสำหรับการคูณของ x ได้เพียงตัวเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 8.1.3 ให้ x เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $-(-x) = x$
2. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $(x^{-1})^{-1} = x$

ทฤษฎีบท 8.1.4 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $x \cdot 0 = 0 = 0 \cdot x$
2. $1 \cdot x = x = x \cdot 1$
3. $(-x)y = x(-y) = -(xy)$ เพื่อความสะดวกเราจะใช้ $-xy$ แทน $-(xy)$
4. ถ้า $x \neq 0$ และ $xy = xz$ แล้ว $y = z$

ทฤษฎีบท 8.1.5 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม $(-1)x = -x$

บทแทรก 8.1.6 $(-1)(-1) = 1$

แบบฝึกหัด 8.1

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. $xy = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = 0$ หรือ $y = 0$
2. $x + y = y + z$ ก็ต่อเมื่อ $x = z$
3. $(-x))(-y) = xy$
4. $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$
5. ถ้า $x + y = x$ แล้ว $x = 0$
6. ถ้า $xy = y$ และ $x \neq 0$ แล้ว $y = 1$
7. $\frac{y}{x} = 0$ และ $x \neq 0$ ก็ต่อเมื่อ $y = 0$
8. ถ้า $x = x^{-1}$ และ $x \neq 0$ แล้ว $x = 1$ หรือ $x = -1$
9. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $x^{-1} \neq 0$
10. $x(y - z) = xy - xz$
11. $-(x - y) = -x + y = y - x$
12. ถ้า $x \neq 0$ แล้ว $\frac{x}{x} = 1$
13. ถ้า $y \neq 0$ แล้ว $\frac{-x}{y} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y}$
14. ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$
15. ถ้า $x \neq 0$ และ $y \neq 0$ แล้ว $\frac{xz}{xy} = \frac{z}{y}$

8.2 สัจพจน์เกี่ยวกับอันดับ (Ordered Axiom)

สัจพจน์ (ต่อ) สมมติว่ามีเซต $\mathbb{R}^+$ เป็นสับเซตของ $\mathbb{R}$ ซึ่งเรียกว่า **เซตของจำนวนจริงบวก** โดยมีสมบัติดังนี้

(R9) $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$ $\quad x + y$ และ $x \cdot y$ เป็นจำนวนจริงบวก

(R10) ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดกตาม ข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

(1) $x \in \mathbb{R}^+$ (2) $x = 0$ (3) $-x \in \mathbb{R}^+$

บทนิยาม 8.2.1 ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ เราจะกล่าวว่า x **น้อยกว่า** (less than) y เขียนแทนด้วย $x < y$ นิยามโดย

$$x < y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad y - x \in \mathbb{R}^+$$

หรือกล่าวได้อีกอย่างว่า y **มากกว่า** (greater than) x เขียนแทนด้วย $y > x$
ถ้า $x < y$ หรือ $x = y$ เราจะกล่าวว่า x **น้อยกว่าหรือเท่ากับ** (less than or equal to) y เขียนแทนด้วย $x \leq y$
ถ้า $x > y$ หรือ $x = y$ เราจะกล่าวว่า x **มากกว่าหรือเท่ากับ** (greater than or equal to) y เขียนแทนด้วย $x \geq y$

ทฤษฎีบท 8.2.2 ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $x \in \mathbb{R}^+$
2. $x = x - 0 \in \mathbb{R}^+$
3. $x > 0$

จากทฤษฎีบทข้างต้น เราจึงเขียนได้ว่า $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$

บทแทรก 8.2.3 ให้ x เป็นจำนวนจริงใดๆ แล้วข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. $-x \in \mathbb{R}^+$
2. $-x = 0 - x \in \mathbb{R}^+$
3. $x < 0$

บทนิยาม 8.2.4 เรานิยามให้ $\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 0\}$ เรียกว่า**จำนวนจริงลบ**

จากการนิยามข้างต้นเราจะได้ว่า

- $\forall x \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^- \leftrightarrow -x \in \mathbb{R}^+$
- สำหรับจำนวนจริง x และ y ข้อความต่อไปนี้จะเป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

  (1) $x < y$ (2) $x = y$ (3) $x < y$

  เราเรียกข้อสรุปนี้ว่า **กฎไตรวิภาค** (Trichotomy law)

ทฤษฎีบท 8.2.5 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. ถ้า $x < y$ แล้ว $x + z < y + z$
2. ถ้า $x < y$ และ $z > 0$ แล้ว $xz < yz$

แบบฝึกหัด 8.2

ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

1. $1 > 0$
2. ถ้า $x < y$ และ $z < 0$ แล้ว $xz > yz$
3. ถ้า $x < 0$ และ $y < 0$ แล้ว $xy > 0$
4. ถ้า $x < 0$ และ $z > 0$ แล้ว $xy < 0$
5. ถ้า $x < 0$ แล้ว $x^{-1} < 0$
6. ถ้า $x > 0$ แล้ว $x^{-1} > 0$
7. ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$
8. ถ้า $0 < x < y$ แล้ว $x^2 < y^2$
9. ถ้า $x \leq y$ และ $x \geq y$ แล้ว $x = y$
10. ถ้า $x < y$ และ $y < z$ แล้ว $x < z$

8.3 สัจพจน์ความบริบูรณ์ (Completeness Axiom)

บทนิยาม 8.3.1 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และให้ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว

- a เป็น**ขอบเขตบน** (upper bound) ของ A ก็ต่อเมื่อ $x \leq a$ ทุก $x \in A$
- b เป็น**ขอบเขตล่าง** (lower bound) ของ A ก็ต่อเมื่อ $x \geq b$ ทุก $x \in A$
- ถ้า A มีทั้งขอบเขตบนและขอบเขตล่าง เราจะเรียก A ว่าเป็น**เซตมีขอบเขต** (bounded)

ตัวอย่าง 8.3.2 จงพิจารณาว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตมีขอบเขตหรือไม่

1. $(-1,1)$
2. $[0,1]$
3. $[-1,2)$
4. $(1,\infty)$
5. $(-\infty,0]$
6. $\{0\}$
7. $\varnothing$
8. $\mathbb{N}$
9. $\mathbb{Z}$
10. $\mathbb{R}$

ตัวอย่าง 8.3.3 จงแสดงว่า $A = (1,\infty)$ ไม่มีขอบเขตบน

บทนิยาม 8.3.4 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และให้ a และ b เป็นจำนวนจริง แล้ว

- a เป็น**ขอบเขตบนน้อยสุด** (least upper bound/ supremum) ของ A เขียนแทนด้วย lub(A) หรือ sup(A) ก็ต่อเมื่อ

  (1) a เป็นขอบเขตบนของ A

  (2) ไม่ว่า c เป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า c เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $a \leq c$

  ถ้า sup(A) เป็นสมาชิกใน A เราจะเรียกว่า **ค่าสูงสุด** (maximum) ของ A

- b เป็น**ขอบเขตล่างมากสุด** (greatest lower bound/infimum) ของ A เขียนแทนด้วย glb(A) หรือ inf(A) ก็ต่อเมื่อ

  (1) b เป็นขอบเขตล่างของ A

  (2) ไม่ว่า c เป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า c เป็นขอบเขตล่า ของ A แล้ว $b \geq c$

  ถ้า inf(A) เป็นสมาชิกใน A เราจะเรียกว่า **ค่าต่ำสุด** (minimum) ของ A

ตัวอย่าง 8.3.5 จงหา inf(A) และ sup(A) ของเซต A ต่อไปนี้

1. $A = (-1,1)$
2. $A = [0,1]$
3. $A = (1,\infty)$
4. $A = \{1\}$
5. $A = \varnothing$
6. $A = \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 8.3.6 ให้ $A = (-2,1]$ จงแสดงว่า inf$(A) = -2$ และ sup$(A) = 1$

ทฤษฎีบท 8.3.7 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ แล้ว $s = \sup(A)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in A,\, x < s + \varepsilon$ และ (2) $\forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A,\, x > s - \varepsilon$

ทฤษฎีบท 8.3.8 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ แล้ว $\ell = \inf(A)$ ก็ต่อเมื่อ

(1) $\forall \varepsilon > 0\, \forall x \in A,\, x > \ell - \varepsilon$ และ (2) $\forall \varepsilon > 0\, \exists x \in A,\, x < \ell + \varepsilon$

ตัวอย่าง 8.3.9 ให้ $A = (-2, 1]$ จงแสดงว่า $\inf(A) = -2$ และ $\sup(A) = 1$ โดยใช้ทฤษฎีบท 8.3.7-8.3.8

ทฤษฎีบท 8.3.10 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ว่าง จะได้ว่าถ้า A มีขอบเขตล่าง แล้ว A จะมีขอเขตล่างมากสุด

ทฤษฎีบท 8.3.11 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ว่าง จะได้ว่าถ้า A มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีขอเขตบนน้อยสุด

ทฤษฎีบท 8.3.12 ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ว่าง และ $s = \sup(A)$ แล้ว

$\forall x \in \mathbb{R}$ ถ้า $x < s$ แล้วจะมี $a \in A$ ซึ่ง $x < a \leq s$

ทฤษฎีบท 8.3.13 ให้ $A \subseteq \mathbb{Z}$ ที่ไม่ว่าง ถ้า A มีขอบเขตบน แล้ว A จะมีค่าสูงสุด

ทฤษฎีบท 8.3.14 **หลักการของอาร์คีมีดีส** (Archimedean Principle)

ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $x < n$

บทแทรก 8.3.15 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $x > 0$ แล้วจะได้ว่ามีจำนวนเต็มบวก n ซึ่ง $y < nx$

บทแทรก 8.3.16 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะมีจำนวนเต็มบวก n ซึ่งทำให้ $\frac{1}{n} < x$

ทฤษฎีบท 8.3.17 สำหรับจำนวนจริง x ใดๆ ถ้า $0 \leq x < \frac{1}{n}$ ทุก $n \in \mathbb{N}$ แล้ว $x = 0$

บทแทรก 8.3.18 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $|x - y| < \varepsilon$ ทุก $\varepsilon > 0$ แล้ว $x = y$

แบบฝึกหัด 8.3

1. จงหาเซตของขอบเขตบน ค่าขอบเขตบนน้อยสุด เซตของขอบเขตล่าง และค่าขอบเขตล่างมากสุด (ถ้ามี) และพิสูจน์คำตอบเหล่านั้น

   1.1 $A = [1, 3]$
   1.2 $A = (-1, 5)$
   1.3 $A = (2, \infty)$
   1.4 $A = (-\infty, -3)$
   1.5 $A = \{1\} \cup (2, 5)$
   1.6 $A = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, ...\}$
   1.7 $A = \mathbb{Q}$
   1.8 $A = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$
   1.9 $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

2. จงหาขอบเขตบนน้อยสุด และขอบเขตล่างมากสุดของ $A = \{\frac{1}{n} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ และพิสูจน์เพื่อยืนยันคำตอบ

3. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ ที่ไม่ว่าง และ $\ell = \text{inf}(A)$ แล้ว $\forall x \in \mathbb{R}$ ถ้า $x > \ell$ แล้วจะมี $a \in A$ ซึ่ง $\ell \leq a < x$

4. ให้ $A \subseteq \mathbb{Z}$ ที่ไม่ว่าง จงพิสูจน์ว่า ถ้า A มีขอบเขตล่าง แล้ว A จะมีค่าต่ำสุด

5. ถ้า a เป็นขอบเขตบนของ A และ $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่าว่า $a + \varepsilon$ เป็นขอบเขตบนของ A

6. ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A และ $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ จงแสดงว่าว่า $a - \varepsilon$ เป็นขอบเขตล่างของ A

7. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ และนิยาม $-A = \{-x \,|\, x \in A\}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   7.1 ถ้า a เป็นขอบเขตบนของ A แล้ว $-a$ เป็นขอบเขตล่างของ $-A$
   7.2 ถ้า $s = \text{sup}(A)$ แล้ว $-s = \text{inf}(-A)$
   7.3 ถ้า a เป็นขอบเขตล่างของ A แล้ว $-a$ เป็นขอบเขตบนของ $-A$
   7.4 ถ้า $\ell = \text{inf}(A)$ แล้ว $-\ell = \text{sup}(-A)$

8. ให้ $A \subseteq \mathbb{R}$ จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   8.1 ถ้า A มีขอบเขตบนน้อยสุด แล้วจะมีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น
   8.2 ถ้า A มีขอบเขตล่างมากสุด แล้วจะมีได้เพียงค่าเดียวเท่านั้น

9. ให้ A และ B เป็นสับเซตของจำนวนจริงซึ่ง $A \neq \varnothing$ และ $A \subseteq B$ โดยที่ B เป็นเซตมีขอบเขต จงพิสูจน์ว่า

$$\text{inf}(B) \leq \text{inf}(A) \leq \text{sup}(A) \leq \text{sup}(B)$$

10. กำหนดให้ $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < \alpha\}$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า $\text{sup}(A_\alpha) = \alpha$

11. จงพิสูจน์ว่า $\forall \varepsilon > 0,\ |a - b| < \varepsilon \to \forall n \in \mathbb{N},\ |a - b| < \frac{1}{n}$

12. จงพิสูจน์ว่า สำหรับจำนวนจริง a ถ้า $\forall \varepsilon > 0,\ |a| < \varepsilon$ แล้ว $a = 0$

บทที่ 9

จำนวนเชิงซ้อน (The Complex Number)

ในบทนี้เราจะกล่าวถึงจำนวนเชิงซ้อนและสมบัติเบื้องต้น จำนวนเชิงซ้อนได้เกิดขึ้นมานานเท่าไรก็ยังไม่มีหลักฐานแน่ชัด แต่นักคณิตศาสตร์ก็คาดการณ์ได้เริ่มต้นจากการคบคิดปัญหาของสมการ ซึ่งไม่มีจำนวนในตอนนั้นที่ทำให้มันเป็นจริง

- ค.ศ. 50 Heron แห่งอเล็กซานเดีย ได้ศึกษาการวัดปริมาตรส่วนที่เป็นไปไม่ได้ของพีระมิดคือจำนวน $\sqrt{81-114}$ ซึ่งสร้างความสับสนให้เขาพอสมควร แต่ก็ยังไม่สามารถหาคำอธิบายได้

- ค.ศ. 1500 นักคณิตศาสตร์ก็มีการศึกษาการรากของพหุนามกำลังสอง กำลังสาม และกำลังสี่ ซึ่งได้รากที่อยู่ในรูปรูทติดลบ ซึ่งโดยปกติแล้วมันอธิบายไม่ได้ในทางธรรมชาติ

- ค.ศ. 1545 Girolamo Cardano ได้เขียนหนังสือชื่อ Ars Magna ในนั้นมีการหาคำตอบของสมการ $x(10-x)=40$ ซึ่งมีคำตอบเป็น $5+\sqrt{-15}$ และ $5-\sqrt{-15}$ ถึงแม้จะมีคำตอบสำหรับสมการนี้ แต่ก็ก็ยังอธิบายไม่แจ่มชัดในทางคณิตศาสตร์ ยังคงเป็นปัญหาที่ชวนให้ปวดขมับเลยทีเดียว

- ค.ศ. 1637 Rene Descartes ได้นำเสนอการเขียนคำตอบของสมการที่หาไม่ได้ในรูป $a+bi$ นั้นก็คือติดในรูปจำนวนจินตภาพ (imaginary number) นิวตันเองก็เห็นด้วยกับ Descartes และ Albert Girad ก็เรียกผลเฉลยลักษณะแบบนี้ว่า "ผลเฉลยที่เป็นไปไม่ได้ (solutions imposible)" ถึงแม้ว่าผู้คนยังไม่ยอมรับแนวคิดนี้เท่าที่ควร แต่นักคณิตศาสตร์ก็ยังเชื่อว่า i น่าจะมีอยู่จริง

- ค.ศ. 1777 Euler ได้กำหนดสัญญาลักษณ์ i แทน $\sqrt{-1}$ เพื่อให้เราได้เข้าใจเกียวกับจำนวนแบบนี้ง่ายขึ้น และสำหรับ $\theta \in \mathbb{R}$ ได้กำหนด
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
เรียกว่า**สูตรของออยเลอร์ (Euler's formula)** ต่อมามีบทบาทสำคัญมากในคณิตศาสตร์สมัยใหม่

- ค.ศ. 1831 Carl Friedrich Gauss ได้ศึกษาและอธิบาย $a+bi$ ที่ Descartes ได้ให้สัญญาลักษณ์ไว้ เขาได้ศึกษาอย่างเอาจริงเอาจัง และเรียกจำนวนนี้นี้ว่า จำนวนเชิงซ้อน (complex number) และเป็นที่ยอมรับอย่างกว้างขว้างในวงการคณิตศาสตร์

- ค.ศ. 1833 William Rowan Hamilton ได้เขียน $a+bi$ ในรูปคู่อันดับของจำนวนจริง (a,b) หลังจากนี้ก็มีนักคณิตศาสตร์มากมายศึกษาจำนวนเชิงซ้อน เช่น Karl Weierstrass, Hermann Schwarz, Richard Dedekind, Otto Holder และ Henri Poincare เป็นต้น จนเป็นแขนงหนึ่งในคณิตศาสตร์เรียกว่า **การวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อน (complex analysis)**

9.1 การดำเนินการบนจำนวนเชิงซ้อน (Operation on Complex Number)

บทนิยาม 9.1.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง และ $i = \sqrt{-1}$ หรือ $i^2 = -1$ เราจะเรียกจำนวน z ที่เขียนในรูป

$$z = a + bi$$

ว่า**จำนวนเชิงซ้อน** (complex number) เรียก a ว่า**ส่วนจริง** (real part) ของ z เขียนแทนด้วย Re(z) และ เรียก b ว่า**ส่วนจินตภาพ** (imaginary part) ของ z เขียนแทนด้วย Im(z) ให้ $\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน นั้นคือ $\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R},\ i = \sqrt{-1}\}$ และสรุปได้ว่า $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ เพราะว่า $a = a + 0i \in \mathbb{R}$

บทนิยาม 9.1.2 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง แล้วจำนวนเชิงซ้อน $a + bi = c + di$ ก็ต่อเมื่อ $a = c$ และ $b = d$

บทนิยาม 9.1.3 ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ $z_1 = a + bi$ และ $z_2 = c + di$ แล้ว

- $z_1 + z_2 = (a + c) + (b + d)i$
- $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)i$
- $z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{ac + bd}{b^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{b^2 + d^2}i$ เมื่อ $z_2 \neq 0$

ตัวอย่าง 9.1.4 จงเขียนจำนวนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

1. $(2 + 3i) + (5 - 2i)$
2. $(-1 + 5i) - (7 - 2i)$
3. $(5 - i)(3 + 4i)$
4. $(1 + i)^2(2 + i)(3 + i)$
5. $\dfrac{1 + i}{1 - i} + \dfrac{1 - i}{1 + i}$
6. $\dfrac{a + bi}{b - ai}$ เมื่อ a และ b ไม่เป็นศูนย์พร้อมกัน

ตัวอย่าง 9.1.5 กำหนดให้ $z = \left(\dfrac{2559 + 2016i}{2016 - 2559i}\right)^{2017}$ จงหาค่าของ Re$(z)+$ Im(z)

ทฤษฎีบท 9.1.6 สมบัติต่อไปนี้เป็นสมบัติพื้นฐานของจำนวนเชิงซ้อนที่คล้ายๆสมบัติของจำนวนจริง

(C1) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $z + w$ และ $z \cdot w$ เป็นจำนวนเชิงซ้อน

(C2) $\forall z, w \in \mathbb{C}$ $z + w = w + z$ และ $z \cdot w = w \cdot z$

(C3) $\forall z, w, u \in \mathbb{C}$ $(z + w) + u = z + (w + u)$ และ $(z \cdot w) \cdot u = z \cdot (w \cdot u)$

(C4) $\exists! 0 \in \mathbb{C}\, \forall z \in \mathbb{C}$ $z + 0 = z = 0 + z$ เรียก 0 ว่าเอกลักษณ์การบวก

(C5) $\exists! 1 \in \mathbb{C}\, \forall z \in \mathbb{C}$ $z \cdot 1 = z = 1 \cdot z$ เรียก 1 ว่าเอกลักษณ์การคูณ

(C6) $\forall z \in \mathbb{C}\, \exists w \in \mathbb{C}$ $z + w = 0 = w + z$ เรียก w ตัวผกผันสำหรับการบวกของ z เขียนแทนด้วย $-z$

(C7) $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}\, \exists w \in \mathbb{C}$ $z \cdot w = 1 = w \cdot z$ เรียก w ตัวผกผันสำหรับการคูณของ z เขียนแทนด้วย z^{-1}

(C8) $\forall z, w, u \in \mathbb{C}$ $z \cdot (w + u) = z \cdot w + z \cdot u$

แบบฝึกหัด 9.1

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $a + bi$

   1.1 $(4 - 3i) + (6 + i)$

   1.2 $(4 + 7i) - i(1 - i)$

   1.3 $(1 + i)^4 + (1 - i)^4$

   1.4 $(2 + i)^2 + (3 - 5i)$

   1.5 $\dfrac{3 + i}{4 - 3i}$

   1.6 $\dfrac{1 + 2i}{1 - 2i} + \dfrac{2 - i}{2 + i}$

2. จงหาจำนวนจริง x และ y ที่สอดคล้องสมการต่อไปนี้

   2.1 $(x + 3i) + 5 + yi + xi = 6 + 2i$

   2.2 $(y + xi) - (x - 2i) = 8 + i$

   2.3 $(x - 2yi)(1 + i)^2 = 3 - 6i$

   2.4 $(x + yi)(1 + i) = 2 - 3i$

3. จงหาจำนวนจริง a และ b ที่สอดคล้องสมการ $(1 + ai)^3 = -107 + bi$

4. จงหาจำนวนจริง x และ y ที่สอดคล้องสมการ $\dfrac{5 - 2i}{x + yi} = \dfrac{10}{i(1 + i)(2 + i)(3 + i)(4 + i)}$

5. กำหนดให้ $z_0 = 0$ และ $z_{n+1} = z_n^2 + i$ เมื่อ $n = 1, 2, 3, ...$ จงหา $|\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}|$

6. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนจริง กำหนดให้ $z = a + bi$ และ $w = c + di$ นิยาม $z * w = ac + bdi$ จงตรวจสอบว่า

   6.1 $\mathbb{C}$ มีสมบัติปิดภายใต้ $*$

   6.2 $\mathbb{C}$ มีสมบัติสบับที่ภายใต้ $*$

   6.3 $\mathbb{C}$ มีสมบัติเปลี่ยนกลุ่มภายใต้ $*$

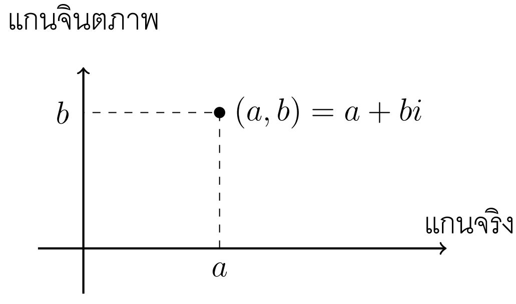
   6.4 $\mathbb{C}$ มีสมบัติการมีเอกลักษณ์ภายใต้ $*$

   6.5 $\mathbb{C} - \{0\}$ มีสมบัติการมีตัวผกผันภายใต้ $*$

   6.6 จงหาตัวผกผันของ $2 + i$ ภายใต้ $*$

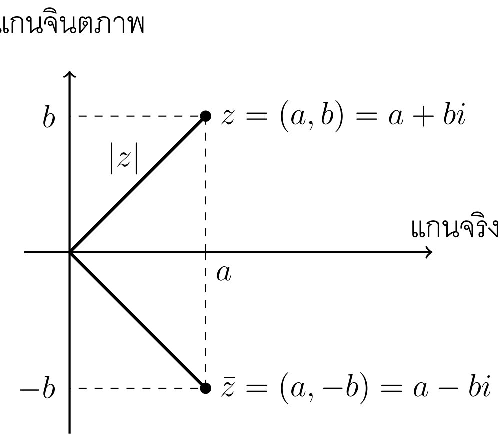
9.2 มอดูลัสและสังยุค (Modulus & Conjugate)

บทนิยาม 9.2.1 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน $a+bi$ เขียนแทนด้วยคู่อันดับจำนวนจริง (a,b) เรียกระนาบที่เกิดจากจุดดังกล่าวว่า **ระนาบเชิงซ้อน** (complex plane) แกน X เรียกว่า**แกนจริง** (real axis) และแกน Y เรียกว่า**แกนจินตภาพ** (imaginary axis)



บทนิยาม 9.2.2 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริง จำนวนเชิงซ้อน $z=a+bi$ แล้ว

- **มอดูลัส** (modulus) ของ z เขียนแทนด้วย $|z|$ นิยามโดย $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$
- **สังยุค** (conjugate) ของ z เขียนแทนด้วย $\bar{z}$ นิยามโดย $\bar{z}=a-bi$



ตัวอย่าง 9.2.3 จงหามอดูลัสและสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1. $3+4i$
2. $(1+2i)+(3-5i)$
3. $(3+i)(1+3i)$
4. $(2-3i)^2$
5. $\dfrac{2+4i}{1-i}$
6. $\dfrac{2+4i}{1-i}+\dfrac{1-i}{1+i}$

ตัวอย่าง 9.2.4 กำหนดให้ z เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงพิสูจน์ว่า

1. ถ้า $z=\bar{z}$ แล้ว $\mathrm{Im}(z)=0$ หรือเรียก z ว่าเป็นจำนวนจริงแท้
2. ถ้า $|z|^2=z^2$ แล้ว z ว่าเป็นจำนวนจริงแท้

ทฤษฎีบท 9.2.5 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$
2. $|z^n| = |z|^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
3. $\left|\dfrac{z}{w}\right| = \dfrac{|z|}{|w|}$ เมื่อ $w \neq 0$
4. $|z + w| \leq |z| + |w|$

ตัวอย่าง 9.2.6 จงหามอดูลัสของ z ที่สอดคล้องสมการ $(5 - 12i)\bar{z}(4 - 3i) = -13(7 + 24i)$

ทฤษฎีบท 9.2.7 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน แล้ว

1. $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
2. $\overline{z - w} = \bar{z} - \bar{w}$
3. $\overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$
4. $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$
5. $\overline{\left(\dfrac{z}{w}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{w}}$ เมื่อ $w \neq 0$
6. $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
7. $\overline{(\bar{z})} = z$
8. $|z| = |\bar{z}|$
9. $z + \bar{z} = 2\,\mathrm{Re}(z)$
10. $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

ตัวอย่าง 9.2.8 ให้ $z = 1 + i$ จงหาค่าของ $z^{2016} + (\bar{z})^{2016}$

ตัวอย่าง 9.2.9 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

1. $|z + w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$
2. $|z - w|^2 = |z|^2 - 2\mathrm{Re}(z\bar{w}) + |w|^2$

ตัวอย่าง 9.2.10 ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน ถ้า $z - w$ เป็นจำนวนจริงแท้ และ $\mathrm{Re}(z^2 - 2w^2) = 0$ จงแสดงว่า $z \cdot \bar{z} = \frac{1}{2}(w + \bar{w})$

ตัวอย่าง 9.2.11 จงหาจำนวนเชิงซ้อนที่สอดคล้องสมการ $z^2 = \bar{z}$

แบบฝึกหัด 9.2

1. จงหามอดูลัสและสังยุคของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

1.1 $7 - 24i$

1.2 $(1-2i) - i(2-3i)$

1.3 $(3+4i)^2$

1.4 $(2-i) - (1-5i)$

1.5 $\frac{11-i}{1-2i}$

1.6 $\frac{i-5}{i^3-7}$

2. จงหารากคำตอบสมการต่อไปนี้

2.1 $|z| + z = 2 + i$

2.2 $z^2 - z + i\bar{z} = 0$

3. กำหนดให้ a, b, c เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่งทำให้ z เป็นรากของสมการ $z^3 + az^2 + bz + c = 0$ มีขนาด $|z| = 1$ จงแสดงว่าราก w ของสมการ $w^3 + |a|w^2 + |b|w + |c| = 0$ มีขนาด $|w| = 1$

4. ให้ z และ w เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

4.1 $|z+w|^2 + |z+w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$

4.2 $|z+w|^2 - |z+w|^2 = 4\text{Re}(z\bar{w})$

5. ให้ z, w และ u เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า

5.1 $|z-w| \le |z| + |w|$

5.2 $|z-w| \le |z-u| + |u-w$

5.3 $|z-w| \ge ||z| - |w||$

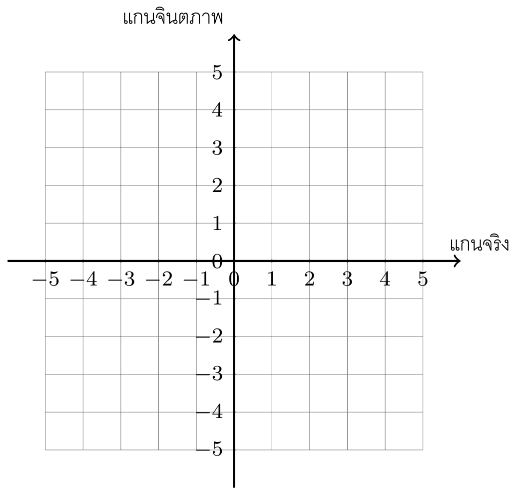
5.4 $|z+w| \ge ||z| - |w||$

5.5 $\left|\frac{u}{z+w}\right| \le \frac{|u|}{||z|-|w||}$ เมื่อ $|z| \ne |w|$

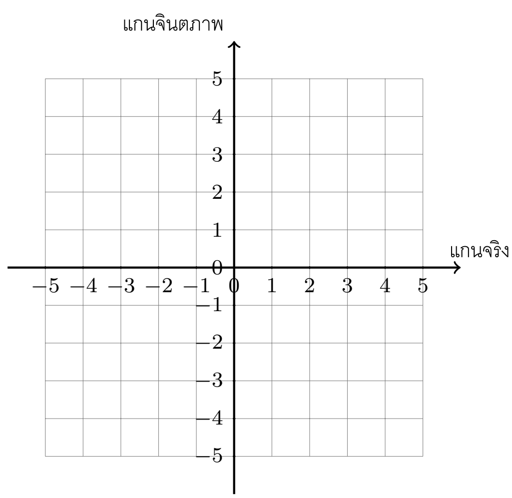
9.3 เรขาคณิตของจำนวนเชิงซ้อน (Geometry of Complex Numbers)

กำหนดให้ (x, y) แทนจำนวนเชิงซ้อน $x + yi$ ในระนาบเชิงซ้อน จะเขียนกราฟของเซตต่อไปนี้

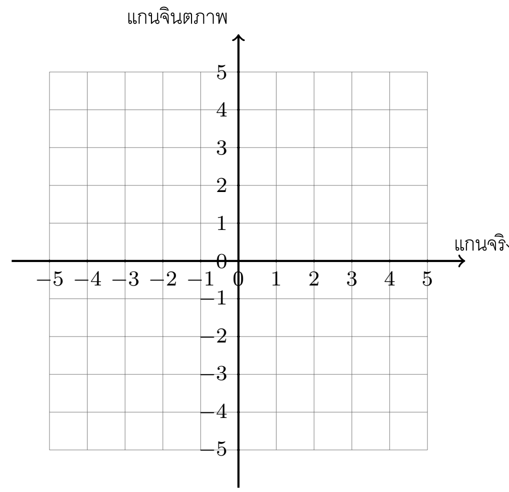
1. $L = \{z \in \mathbb{C} \mid i(z + \bar{z}) = z - \bar{z}\}$



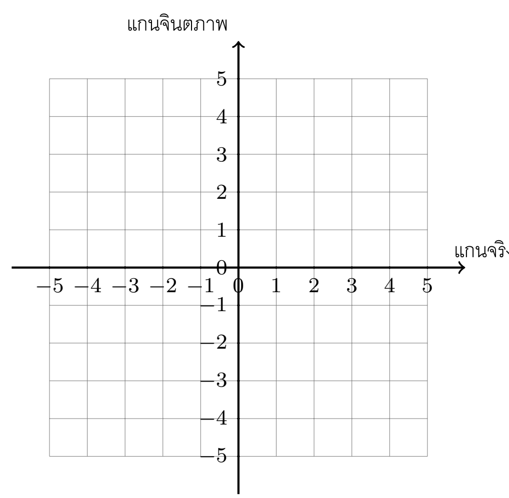
2. $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$



3. $E = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 1| + |z + 1| = 6\}$



4. $H = \{z \in \mathbb{C} \mid ||z - 1| - |z + 1|| = 6\}$



ตัวอย่าง 9.3.1 จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปสมการจำนวนเชิงซ้อน z เมื่อ $z = x + yi$

1. $x^2 + y^2 = 4$
2. $x^2 - y^2 = 4$
3. $9x^2 + 16y^2 = 144$
4. $y = x^2$

แบบฝึกหัด 9.3

1. จงเขียนกราฟแสดงเซตต่อไปนี้

   1.1 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$

   1.2 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 3\}$

   1.3 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 2\}$

   1.4 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 4\}$

   1.5 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| + |z-1| = 4\}$

   1.6 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z+i| + |z-i| = 6\}$

   1.7 $\{z \in \mathbb{C} \mid ||z+2i| - |z-2i|| = 10\}$

   1.8 $\{z \in \mathbb{C} \mid ||z-1+i| - |z+3+i|| = 8\}$

   1.9 $\{z \in \mathbb{C} \mid i(\bar{z} - z) = (z+\bar{z})^2\}$

   1.10 $\{z \in \mathbb{C} \mid z\bar{z} \leq 9\}$

2. จงเขียนสมการต่อไปนี้ในรูปสมการจำนวนเชิงซ้อน z เมื่อ $z = x + yi$

   2.1 $x^2 + y^2 = 9$

   2.2 $x^2 - y^2 = 16$

   2.3 $16x^2 + 9y^2 = 144$

   2.4 $x = y^2$

   2.5 $xy = x + y$

   2.6 $|x| + |y| = 1$

3. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อน จงแสดงว่า สามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดยอด z_1, z_2, z_3 ในระนาบเชิงซ้อนเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า ก็ต่อเมื่อ $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = z_1z_2 + z_1z_3 + z_2z_3$

4. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนซึ่ง $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ และ $z_1 + z_2 + z_3 = 0$ จงแสดงว่า สามเหลี่ยมที่เกิดจากจุดยอด z_1, z_2, z_3 ในระนาบเชิงซ้อนเป็นสามเหลี่ยมด้านเท่า

5. กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันทั้งหมดและ

$$z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = z_1^2 + z_1z_3 + z_3^2 = z_3^2 + z_3z_2 + z_2^2 = 0$$

   จงหาค่าของ $\dfrac{z_1+z_2}{z_3} + \dfrac{z_1+z_3}{z_2} + \dfrac{z_2+z_3}{z_1}$

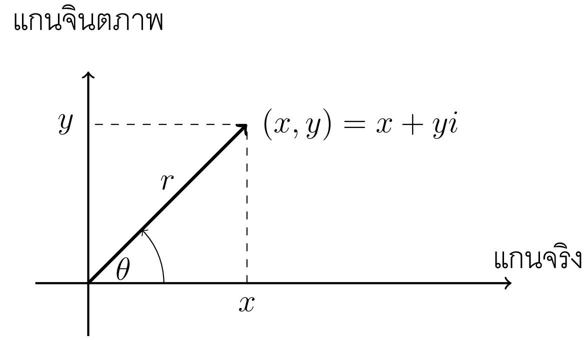
6. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่ไม่ใช่ศูนย์ และ $\dfrac{z_1}{z_2}$ ไม่เป็นจำนวนจริง และ

$$z_1 \log|z_1| + z_2 \log|z_2| = (z_1 + z_2) \log|z_1 + z_2|$$

   จงหาค่าของ $\dfrac{z_1}{z_2}$

9.4 ระบบพิกัดเชิงขั้ว (The Polar Coordinate System)

บทนิยาม 9.4.1 ให้จำนวนเชิงซ้อน $z = x + yi$ และมีมอดูลัสคือ $r = |z| = \sqrt{x^2 + x^2}$



อาร์กิวเมนต์ (argument) ของ z คือจำนวนจริง θ เขียนแทนด้วย arg(z) ซึ่ง $x = r\cos\theta$ และ $y = r\sin\theta$ สังเกตได้ว่า arg(z) มีได้หลายค่า ถ้าเราสนใจเฉพาะ $-\pi < \theta \leq \pi$ เราจะเรียก θ นี้ว่า**อาร์กิวเมนต์หลัก** (principle argument) เขียนแทนด้วย Arg(z) ดังนั้นเราจะสามารถเขียนจำนวนเชิงซ้อน z ใหม่ได้เป็น

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \qquad \text{หรือ} \qquad z = re^{i\theta}$$

เมื่อ $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ เรียกว่า**สูตรของออยเลอร์** (Euluer's formula) ซึ่ง $|e^{i\theta}| = 1$ เราเรียกจำนวนเชิงซ้อนที่เขียนขึ้นใหม่นี้ว่า จำนวนเชิงซ้อนใน **ระบบพิกัดเชิงขั้ว** (the polar coordinate system)

ตัวอย่าง 9.4.2 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปแบบเชิงขั้วโดย $r = |z|$ และ $\theta = \text{Arg}(z)$

1. $z = 1$
2. $z = 1 + i$
3. $z = -2i$
4. $z = \sqrt{3} - i$

ตัวอย่าง 9.4.3 จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + yi$

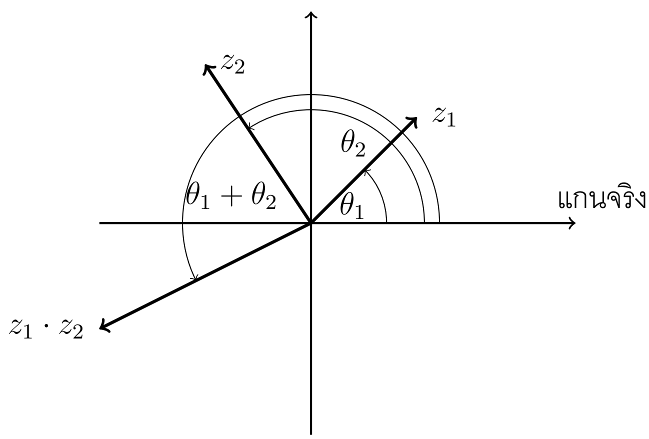
1. $z = 4(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$
2. $z = 6(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4})$
3. $z = 4e^{i\frac{5\pi}{4}}$
4. $z = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

ทฤษฎีบท 9.4.4 กำหนดให้ $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ และ $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ แล้ว

1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)]$
2. $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)]$
3. $z_1^n = r_1^n[\cos(n\theta_1) + i\sin(n\theta_1)]$ เมื่อ $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 9.4.5 จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

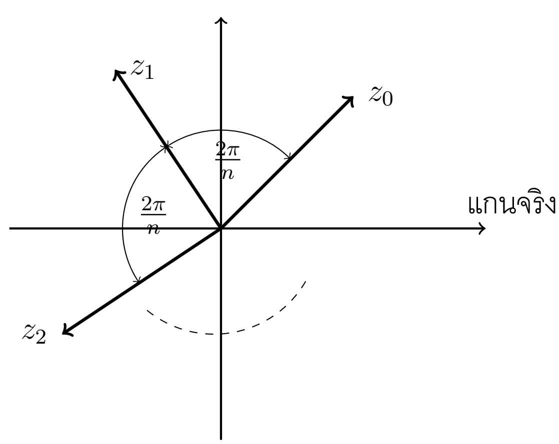
1. $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{52}$
2. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)^5$



การหารากของจำนวนเชิงซ้อนโดยใช้กฎของเดอร์มัวร์ (De Moivre's Theorem)

ทฤษฎีบท 9.4.6 ให้ $z =$ เป็นจำนวนเชิงซ้อนในระบบพิกัดเชิงขั้ว แล้วรากที่ n ของ z คือ

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad \text{เมื่อ} \quad k = 0, 1, 2, ..., n-1$$



ตัวอย่าง 9.4.7 จงหารากที่ต่อไปนี้

1. รากที่ 2 ของ -1
2. รากที่ 2 ของ $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$
3. รากที่ 3 ของ 1
4. รากที่ 3 ของ $-8i$
5. รากที่ 6 ของ -1

ตัวอย่าง 9.4.8 รากที่ 2 ของ $-7+24i$

ตัวอย่าง 9.4.9 กำหนดให้ z_1, z_2, z_3 เป็นรากของสมการ $(z+2i)^3 = 8i$ จงหาค่าของ $|z_1| + |z_2| + |z_3|$

ตัวอย่าง 9.4.10 จงหาสมการพหุนามโมนิคกำลังสองที่มีรากเป็น $2+\sqrt{3}i$ และ $2-\sqrt{3}i$

ตัวอย่าง 9.4.11 ถ้า z เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่เป็นคำตอบของสมการ $(z-1)^5 = 32(z+1)^5$ แล้ว $|z+\frac{5}{3}|$ มีค่าเท่าใด

แบบฝึกหัด 9.4

1. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูปแบบเชิงขั้วโดย $r = |z|$ และ $\theta = \text{Arg}(z)$

1.1 $z = 2$ 1.3 $z = -1 + i$ 1.5 $z = 2i$ 1.7 $z = -\sqrt{3} + i$

1.2 $z = -3$ 1.4 $z = 5i$ 1.6 $z = -4 - 4i$ 1.8 $z = 1 - \sqrt{3}i$

2. จงเขียนจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้ในรูป $x + yi$

2.1 $z = 8(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$ 2.4 $z = 5(\cos\frac{13\pi}{3} + i\sin\frac{13\pi}{3})$

2.2 $z = 10(\cos\frac{11\pi}{4} + i\sin\frac{11\pi}{4})$ 2.5 $z = 6e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

2.3 $z = 3(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$ 2.6 $z = \pi e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. จงหาค่าของจำนวนเชิงซ้อนต่อไปนี้

3.1 $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{10}$ 3.3 $\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{-10}$

3.2 $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{252}$ 3.4 $\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{8} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{8}$

4. จงหารากที่ต่อไปนี้

4.1 รากที่ 2 ของ -4 4.3 รากที่ 3 ของ -1 4.5 รากที่ 6 ของ -64

4.2 รากที่ 2 ของ $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ 4.4 รากที่ 3 ของ 27 4.6 รากที่ 6 ของ $64i$

5. กำหนดให้ $z = \cos\frac{5\pi}{14} + i\sin\frac{9\pi}{14}$ จงหาค่าของ $\left(\frac{1-\bar{z}}{1+z}\right)^7$

6. กำหนดให้ z_1, z_2 เป็นจำนวนเชิงซ้อนที่แตกต่างกันและ $z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2 = 0$ จงหา

6.1 อาร์กิวเมนต์ของ $\dfrac{z_1}{z_2}$

6.2 ถ้า $A = (1+\frac{z_1}{z_2}) + (1+\frac{z_1}{z_2})^2 + ... + (1+\frac{z_1}{z_2})^{2559}$ และ $B = (1+\frac{z_2}{z_1}) + (1+\frac{z_2}{z_1})^2 + ... + (1+\frac{z_2}{z_1})^{2559}$ จงหาค่าของ $A + B$

7. กำหนดให้ $\omega_k = \cos\frac{2k\pi}{5} + i\sin\frac{2k\pi}{5}$ เมื่อ $k = 1, 2, 3, 4$ จงหาค่าของ $(1-\omega_1)(1-\omega_2)(1-\omega_3)(1-\omega_4)$

8. กำหนดให้ $P(z) = z^3 + 2z^2 + 3z + 4$ และ $a = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$
จงหาค่าของ $P(a) \cdot P(a^2) \cdot P(a^2) \cdot P(a^3) \cdot P(a^4)$

บรรณานุกรม

[1] กรรณิกา กวักเพฑูรย์, **หลักคณิตศาสตร์**, สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 2542

[2] กรมวิชาการ กระทรวงศึกษาธิการ, **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์**, กรมวิชาการ, กรุงเทพมหานคร, 2539

[3] คณะผู้เขียนตำราวิชาคณิตศาสตร์, **ทฤษฎีจำนวน**, มูลนิธิ สอวน, กรุงเทพมหานคร, 2552

[4] จิตจวบ เปาอินทร์, **พีชคณิตนามธรรม**, ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2537

[5] ณัฐไชย์ ลีนาวงศ์, **ตรรกะแห่งการพิสูจน์**, บริษัทสำนักพิมพ์ท๊อปจำกัด, กรุงเทพมหานคร, 2547

[6] ณัฐพันธ์ กิติสิน, **การวิเคราะห์จำนวนเชิงซ้อนเบื้องต้น**, ภาควิชาคณิตศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย

[7] พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ, **ระบบจำนวน**, วี.พริ้นท์(1991), กรุงเทพมหานคร, 2558

[8] อนุกรรมการปรับปรุงหลักสูตรวิทยาศาสตร์ ทบวงมหาวิทยาลัย, **ตรรกศาสตร์และระบบจำนวนจริง**, โรงพิมพ์พิทักษ์การพิมพ์, กรุงเทพมหานคร, 2545

[9] อัจฉรา หาญชูวงศ์, **ทฤษฎีจำนวน**, จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, กรุงเทพมหานคร, 2542

[10] David S. Dummit and Richard M. Foote, **Abstract Algebra**, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, 2004

[11] Pual Glendinning, **Maths in minutes**, Quercus Editions Ltd, London, England, 2012

ประวัติผู้เขียน (VISTA)

นายธนัชยศ จำปาหวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสตร์, เกียรตินิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2^{nd} class honours), 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Contract me

Email: Luk_cu@hotmail.com
Facebook: www.facebook.com/Jampawai
IG & Line id: luxmaz
Tel: 0866008726
Office: 1145