ทฤษฎีเซต
Set Theory

ธนัชยศ จำปาหวาย

สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์

มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

2561

MAP1404

ทฤษฎีเซต

Set Theory

อาจารย์ ดร.ธนัชยศ จำปาหวาย
สาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา
เอกสารประกอบการสอนวิชาทฤษฎีเซต ภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2561

สารบัญ

บทที่ 1

ความรู้เบื้องต้น

1.1 ตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์

ข้อความที่ตัดสินใจได้ว่า ต้องเป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่งเท่านั้น จะเป็นทั้งสองอย่างไม่ได้ กล่าวคือถ้าข้อความใดไม่เป็นจริงแล้วข้อความนั้นต้องเป็นเท็จ ในนัยกลับกัน ถ้าข้อความใดไม่เป็นเท็จแล้วข้อความนั้นต้องเป็นจริง (พัฒนี อุดมกะวานิช. 2559. หน้า 2) เรียกข้อความหรือประโยคเหล่านั้นว่า **ประพจน์ (proposition หรือ statement)**

บทนิยาม 1.1.1 ประพจน์ คือประโยคหรือข้อความที่มีค่าความจริง (truth value) เป็นจริง (true) หรือค่าความจริงเป็นเท็จ (false) อย่างใดอย่างหนึ่งเพียงอย่างเดียว

ตัวอย่าง 1.1.2 จงพิจารณาว่าประโยคต่อไปนี้เป็นประพจน์หรือไม่ ถ้าเป็นประพจน์ให้บอกค่าความจริงของประพจน์เหล่านั้น

1. พระอาทิตย์ขึ้นทางทิศตะวันออก
2. เขาเป็นคนอังกฤษ
3. กรุณา เปิดหน้าต่างให้ฉันหน่อย
4. คุณมาทำอะไรที่นี้
5. จังหวัดเลยไม่อยู่ในภาคเหนือของประเทศไทย
6. คุณพระช่วย !
7. พี่ต้องพาฉันไปดูหนังนะ
8. $x > 1$

บทนิยาม 1.1.3 ประโยคเปิด คือประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธที่มีตัวแปร (variable) เมื่อแทนที่ตัวแปรด้วยสมาชิกในขอบเขตที่กำหนด แล้วประโยคนั้นจะเป็นประพจน์

ประพจน์ทางคณิตศาสตร์ที่เราพบมักจะเกิดจากหลายประพจน์ที่ถูกเชื่อมกันด้วยตัวเชื่อมต่าง ๆ ทำให้เกิดประพจน์ใหม่ **ตัวเชื่อม (connective)** ระหว่าง 2 ประพจน์ในทางตรรกศาสตร์มีอยู่ 4 ชนิดคือ

1. และ (and) เขียนแทนด้วย $\wedge$
2. หรือ (or) เขียนแทนด้วย $\vee$
3. ถ้า...แล้ว (if...then) เขียนแทนด้วย $\rightarrow$
4. ก็ต่อเมื่อ (if and only if) เขียนแทนด้วย $\leftrightarrow$

สรุปค่าความจริงในแต่ละกรณีตามตารางดังต่อไปนี้ ซึ่งเรียกว่า **ตารางค่าความจริง (truth table)** เมื่อ p และ q เป็นประพจน์ และ T แทนค่าความจริงเป็นจริง F แทนค่าความจริงเป็นเท็จ

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	F	F	T	T

นิเสธของประพจน์ (Negation of proposition) เขียนแทนด้วย $\neg p$ แทนนิเสธของประพจน์ p ซึ่งจะมีค่าความจริงตรงกันข้ามกับ p

p	$\neg p$
T	F
F	T

ตัวอย่างเช่นนิเสธของประพจน์ "ประเทศอังกฤษอยู่ในทวีปยุโรป" คือ "ประเทศอังกฤษ**ไม่**อยู่ในทวีปยุโรป" เป็นต้น

บทนิยาม 1.1.4 ประพจน์ P **สมมูล (equivalence)** กับ Q เขียนแทนด้วย $P \equiv Q$ ก็ต่อเมื่อประพจน์ทั้งสองมีค่าความจริงตรงกันทุกๆกรณี

จากประพจน์ที่ว่า $p \leftrightarrow q$ มีความหมายว่า $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ ดังนั้น

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

ตัวอย่าง 1.1.5 จงแสดงว่าประพจน์ $p \rightarrow q$ สมมูลกับ $\neg q \rightarrow \neg p$

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \rightarrow \neg p$
T	T	T	F	F	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

ดังนั้น $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ เราเรียกสมบัตินี้ว่า**กฎแย้งสลับที่ (contrapositive law)** ตัวอย่างเช่น "ถ้าแดงไปโรงเรียนแล้วแดงจะได้กินขนม" โดยใช้กฎแย้งสลับที่จะสมมูลกับประพจน์ "ถ้าแดง**ไม่**ได้กินขนมแล้วแดง**ไม่**ไปโรงเรียน" เป็นต้น

เมื่อกำหนดให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ จะได้สมมูลดังต่อไปนี้

(E1)	$p \wedge p \equiv p$	กฎนิจพล (Idempotent law)
	$p \vee p \equiv p$	
(E2)	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	กฎการสลับที่ (Commutative law)
	$p \vee q \equiv q \vee p$	
(E3)	$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)
	$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$	
(E5)	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	กฎการแจกแจง (Distributive law)
	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
(E6)	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)
	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$	
(E7)	$\neg(\neg p) \equiv p$	กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)
(E8)	$p \to q \equiv \neg q \to \neg p$	กฎแย้งสลับที่ (contrapositive law)
(E9)	$p \to q \equiv \neg p \vee q$	
(E10)	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \equiv (q \leftrightarrow p)$	
(E11)	$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (\neg p \to \neg q)$	
(E12)	$p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$	
(E13)	$p \to (q \wedge r) \equiv (p \to q) \wedge (p \to r)$	
(E14)	$p \to (q \vee r) \equiv (p \to q) \vee (p \to r)$	
(E15)	$(p \wedge q) \to r \equiv (p \to r) \vee (q \to r)$	
(E16)	$(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$	

บทนิยาม 1.1.6 ประพจน์ที่มีรูปแบบที่มีค่าความจริงเป็นจริงเสมอเราจะเรียกว่า **สัจนิรันดร์ (tautology)** และเรียกนิเสธของสัจนิรันดร์ว่า **ข้อความขัดแย้ง (contradiction)**

ตัวอย่าง 1.1.7 จงแสดงว่าประพจน์ $p \to (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์

p	q	$p \vee q$	$p \to (p \vee q)$
T	T	T	**T**
T	F	T	**T**
F	T	T	**T**
F	F	F	**T**

ดังนั้น $p \to (p \vee q)$ เป็นสัจนิรันดร์ เราเรียกว่า**การเพิ่ม (addition)**

ประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์ เมื่อให้ p, q และ r เป็นประพจน์ใด ๆ

(T1)	$p \wedge p \leftrightarrow p$	กฎนิจพล (Idempotent law)
	$p \vee q \leftrightarrow p$	
(T2)	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$	กฎการสลับที่ (Commutative law)
	$p \vee q \leftrightarrow q \vee p$	
(T3)	$p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$	กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)
	$p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$	
(T4)	$p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	กฎการแจกแจง (Distributive law)
	$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
(T5)	$\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$	กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's law)
	$\neg(p \wedge) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$	
(T6)	$\neg(\neg p) \leftrightarrow p$	กฎนิเสธซ้อน (Double negation law)
(T7)	$\neg p \vee p$ หรือ $\neg(\neg p \wedge p)$	
(T8)	$p \to p$	
(T9)	$p \to p \vee q$	Addition
(T10)	$p \wedge q \to p$	Simplification
	$p \wedge q \to q$	
(T11)	$p \wedge (p \to q) \to q$	Modus ponens
(T12)	$\neg q \wedge (p \to q) \to \neg p$	Modus tollens
(T13)	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$	Hypothetical syllogism
(T14)	$(p \vee q) \wedge \neg p \to q$	Disjunctive syllogism
	$(p \vee q) \wedge \neg q \to p$	
(T15)	$(\neg p \to c) \to p$	

ให้ p แทนประพจน์ $x > 2$ เมื่อ $x \in \{1, 2, 3, 4\}$

x	$p: \ x > 2$	ค่าความจริง
1	$1 > 2$	F
2	$2 > 2$	F
3	$3 > 2$	T
4	$4 > 2$	T

จากตารางจะเห็นได้ว่าค่าความจริงของประพจน์ p เปลี่ยนไปตามค่า x นิยมใช้ $p(x)$ แทนประพจน์ p และเรียก $\{1, 2, 3, 4\}$ ว่า **เอกภพสัมพัทธ์ (universe)** นิยมเขียนแทนด้วย $\mathcal{U}$ เมื่อกล่าวว่า

" มี x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ "

ประพจน์นี้มีค่าความจริงเป็นจริงเพราะว่ามี $x = 3$ ซึ่งทำให้ $p(3)$ มีค่าความจริงเป็นจริง เขียนแทนคำว่า "มี" ด้วย $\exists$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\exists x \in \mathcal{U}, p(x)$ ในทำนองเดียวกัน ถ้ากล่าวว่า

" ทุก ๆ x ใน $\mathcal{U}$ ที่สอดคล้อง $p(x)$ "

ประพจน์นี้จะมีค่าความจริงเป็นเท็จเพราะว่ามี $x = 1$ ที่ทำให้ $p(1)$ มีค่าความจริงเป็นเท็จ เขียนแทนคำว่า "ทุก ๆ " ด้วย $\forall$ ดังนั้นเขียนประพจน์ดังกล่าวได้เป็น $\forall x \in \mathcal{U}, p(x)$ เรียก 2 สัญลักษณ์ว่า **ตัวบ่งปริมาณ (quantifier)** และเรียกวิธีการนี้ว่า **วิธีบ่งปริมาณ (quantification)** ซึ่งมีได้ 2 แบบ ดังนิยามดังต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.8 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

แบบที่ 1 นำหน้า $p(x)$ ด้วยวลีบ่งปริมาณ

ทุก x ใน $\mathcal{U}$ / สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ / ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$

สำหรับแต่ละ x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\forall x \in \mathcal{U}\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$$

เรียก $\forall$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณทั้งหมด (universal quantifier)**

แบบที่ 2 นำหน้า $p(x)$ ด้วยวลีบ่งปริมาณ

มี x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่ง / บาง x ใน $\mathcal{U}$ มีสมบัติว่า

มีบาง x ใน $\mathcal{U}$ ซึ่งมีสมบัติ $p(x)$ เขียนแทนด้วย

$$\exists x \in \mathcal{U}\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x\ [p(x)] \quad \text{หรือ} \quad \exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$$

เรียก $\exists$ ว่า **ตัวบ่งปริมาณมีอย่างน้อยหนึ่ง (existential quantifier)** เรียกสั้น ๆ ว่า **มี**

เพื่อความสะดวกในการเขียนตรรศาสตร์สัญลักษณ์ กำหนดให้

$\mathbb{C}$ แทนเซตของจำนวนเชิงซ้อน

$\mathbb{R}$ แทนเซตของจำนวนจริง

$\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ

$\mathbb{Q}^c$ แทนเซตของจำนวนอตรรกยะ

$\mathbb{Z}$ แทนเซตของจำนวนเต็ม

$\mathbb{N}$ แทนเซตของจำนวนนับ

ตัวอย่าง 1.1.9 จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ

1. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 = x$
2. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม จะได้ว่า $x > 0$
3. จำนวนจริงทุกจำนวนมีค่าเป็นลบเสมอ
4. มีจำนวนตรรกยะที่มีค่าเป็นลบ
5. จำนวนเต็มทุกจำนวนเป็นจำนวนบวกหรือจำนวนลบ

ตัวอย่าง 1.1.10 จงเปลี่ยนสัญลักษณ์ต่อไปนี้ในรูปข้อความ

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ n > 1$
2. $\exists x \in \mathbb{Z},\ (x \neq 1) \to (x^2 > 1)$
3. $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ (x < 1) \leftrightarrow (x^2 < x)$

บทนิยาม 1.1.11 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ $p(x)$ เป็นประพจน์

ข้อความ $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

ไม่ว่า x จะเป็นอะไรก็ตามใน $\mathcal{U}$ $p(x)$ มีค่าความเป็น**จริง** นอกนั้นข้อความนี้เป็น**เท็จ**

ข้อความ $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x)$ มีค่าความจริงเป็นจริงก็ต่อเมื่อ

มี x อย่างน้อยหนึ่งตัวใน $\mathcal{U}$ ทำให้ $p(x)$ มีค่าความเป็น**จริง** นอกนั้นข้อความนี้เป็น**เท็จ**

ตัวอย่าง 1.1.12 ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาค่าความจริงของ

$\forall x \in \mathcal{U},\ x > 0$

x	ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
1		
2		
3		
4		

$\exists x \in \mathcal{U},\ x < 2$

x	ข้อความ $x < 2$	ค่าความจริง
1		
2		
3		
4		

ตัวอย่าง 1.1.13 ให้เอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U} = \{-2, -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้

1. $\forall x \in \mathcal{U},\ (x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$

x	ข้อความ $(x^2 = x) \rightarrow (x > 0)$	ค่าความจริง
-2		
-1		
0		
1		
2		

2. $[\forall x \in \mathcal{U},\ x^2 = x] \rightarrow [\forall x \in \mathcal{U},\ x > 0]$

x	ข้อความ $x^2 = x$	ค่าความจริง		ข้อความ $x > 0$	ค่าความจริง
-2					
-1					
0					
1					
2					

หลายครั้งมักจะพบประพจน์ที่ซับซ้อนมากขึ้นเช่น "มีจำนวนเต็มจำนวนหนึ่งซึ่งบวกกับทุกจำนวนเต็มแล้วเท่ากับศูนย์" เขียนสัญลักษณ์ได้เป็น

$$\exists x \in \mathbb{Z} \forall y \in \mathbb{Z},\, x + y = 0$$

ประพจน์ลักษณะนี้กล่าวได้ว่ามีตัวบ่งปริมาณ 2 ตัว

ตัวอย่าง 1.1.14 จงแปลงประพจน์ต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. ทุกจำนวนจริง x มีจำนวนจริง y ซึ่ง $x + y = 0$

2. สำหรับจำนวนนับ n และ m จะได้ว่า $n + m > 1$

3. มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x = y + 1$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม y

4. มีจำนวนจริง x และ y ถ้า $x > 0$ และ $y > 0$ แล้ว $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1$

ตัวอย่าง 1.1.15 ให้ $\mathcal{U} = \{-1, 0, 1\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความ $x + y = 0$ โดยสร้างแผนภาพต้นไม้ได้ดังนี้

x	y	$x + y = 0$	ค่าความจริง
	-1	$-1 + (-1) = 0$	F
-1	0	$-1 + 0 = 0$	F
	1	$-1 + 1 = 0$	T
	-1	$0 + (-1) = 0$	F
0	0	$0 + 0 = 0$	T
	1	$0 + 1 = 0$	F
	-1	$1 + (-1) = 0$	T
1	0	$1 + 0 = 0$	F
	1	$1 + 1 = 0$	F

ให้ $p(x, y)$ แทนประพจน์ $x + y = 0$ เขียนตารางได้ดังนี้

$$\begin{array}{c|ccc} -1 & \circ & \circ & \bullet \\ 0 & \circ & \bullet & \circ \\ 1 & \bullet & \circ & \circ \\ \hline & -1 & 0 & 1 \end{array}$$

จะเรียกตารางนี้ว่า **ตารางจุด (Dot table)** โดยให้แนวนอนเป็นค่า x และแนวตั้งเป็นค่า y จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์ $\forall x \in \mathcal{U}\, \exists y \in \mathcal{U},\ x + y = 0$ และ $\exists x \in \mathcal{U}\, \forall y \in \mathcal{U},\ x + y = 0$

ตัวอย่าง 1.1.16 ให้ $\mathcal{U} = \{-1, -2, 0, 1, 2\}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ พิจารณาข้อความ

$$p(x, y) :\ |x| + y \geq x + |y|$$

จงตรวจสอบค่าความจริงของประพจน์

1. $\forall x \in \mathcal{U}\, \forall y \in \mathcal{U}, p(x, y)$
2. $\forall x \in \mathcal{U}\, \exists y \in \mathcal{U}, p(x, y)$
3. $\exists x \in \mathcal{U}\, \forall y \in \mathcal{U}, p(x, y)$
4. $\exists x \in \mathcal{U}\, \exists y \in \mathcal{U}, p(x, y)$

ต่อมาจะกล่าวถึงการหานิเสธของประพจน์ที่มีตัวบ่งปริมาณ เช่น "ไม่มีจำนวนเต็ม x ใดเลยที่สอดคล้อง $x^2+x+1=0$" เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\neg\exists x \in \mathbb{Z},\, x^2+x+1=0$$

หมายถึง "ทุกจำนวนเต็ม x จะสอดคล้อง $x^2+x+1\neq 0$" เขียนเป็นสัญลักษณ์คือ

$$\forall x \in \mathbb{Z},\, x^2+x+1\neq 0$$

สรุปได้ดังบทนิยามต่อไปนี้

บทนิยาม 1.1.17 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ของประพจน์ $p(x)$ นิเสธของตัวบ่งปริมาณนิยามโดย

นิเสธของ $\forall x \in \mathcal{U},\, p(x)$ คือ $\neg\forall x \in \mathcal{U},\, p(x) \equiv \exists x \in \mathcal{U},\, \neg p(x)$

นิเสธของ $\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)$ คือ $\neg\exists x \in \mathcal{U},\, p(x) \equiv \forall x \in \mathcal{U},\, \neg p(x)$

ตัวอย่าง 1.1.18 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 = x$

2. $\forall x \in \mathbb{R}\,, x = x+0$

3. $\forall x \in \mathbb{Z}\,\exists y \in \mathbb{Z},\, xy>0 \rightarrow x+y>0$

4. ไม่ว่า x เป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x\neq 0$ แล้ว $x^2>0$

5. ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม $x>0$ ก็ต่อเมื่อ $x^2>0$

ตัวอย่าง 1.1.19 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. มีจำนวนเต็ม x และ y ซึ่ง $xy = 1$

2. ผลบวกของจำนวนตรรกยะเป็นจำนวนตรรกยะ

ตัวอย่าง 1.1.20 จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

1. $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x) \to q(x)$

2. $\forall x \in \mathcal{U},\ p(x) \vee q(x)$

3. $\exists x \in \mathcal{U}\ \forall y \in \mathcal{U},\ \neg p(x, y) \to q(x, y)$

4. $\forall x \in \mathcal{U}\ \forall y \in \mathcal{U},\ p(x, y) \leftrightarrow q(x, y)$

5. $\exists x \in \mathcal{U},\ p(x) \to \forall x \in \mathcal{U},\ q(x)$

แบบฝึกหัด 1.1

1. พิจารณาประโยคต่อไปนี้ว่าเป็น ประพจน์ หรือ ประโยคเปิด หรือไม่เป็นทั้งสองอย่าง
   1.1 ห้ามเดินลัดสนาม
   1.2 ปีปัจจุบันเป็นปีระกา
   1.3 น่านเป็นจังหวัดในภาคใต้
   1.4 มีจำนวนนับที่น้อยกว่า 1
   1.5 5 หาร 11 ลงตัว
   1.6 ใครเป็นคนนัดพวกเราที่สยามพารากอน
   1.7 รถไฟมีสองหัว
   1.8 ถ้า $1 > 1$ แล้วประเทศไทยจะมี 100 จังหวัด
2. จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   2.1 ถ้า $2^0 = 0^2$ แล้ว $2 = 0$
   2.2 ปูม้าไม่มีขาก็ต่อเมื่อลิงไม่มีหู
   2.3 จำนวนนับเป็นจำนวนเต็มหรือตรรกยะ
   2.4 ถ้า $2 \neq 9$ แล้ว นกขมิ้นบินไม่ได้
   2.5 ถ้าช้างเป็นสัตว์ปีกแล้วช้างเป็นตั๊กแตน
   2.6 กระต่ายไม่มีฟัน ก็ต่อเมื่อ $1 > 2$
3. จงสร้างตารางค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   3.1 $(p \to \neg q) \vee (q \to p)$
   3.2 $p \wedge (\neg q \to r) \leftrightarrow (r \vee q)$
   3.3 $\neg[\neg p \wedge (q \to \neg r)] \to (p \wedge \neg r)$
   3.4 $\neg p \wedge (q \vee r) \to (p \to r \wedge s)$
4. ประพจน์ p, q, r, s มีค่าความจริงเป็น T, F, F, T ตามลำดับ จงหาค่าความจริงของประพจน์ต่อไปนี้
   4.1 $p \to (q \vee \neg(p \wedge r))$
   4.2 $\neg[(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \to \neg r)] \to \neg s$
   4.3 $\neg(r \wedge \neg s) \leftrightarrow (p \vee \neg q)$
   4.4 $[(\neg p \vee (\neg p \to (q \wedge r) \vee s) \to p) \wedge r] \leftrightarrow p$
5. กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง
   5.1 q และ $\neg p \vee (p \wedge q)$
   5.2 $\neg p \to q$ และ $\neg q \to p$
   5.3 $(p \vee r) \to q$ และ $p \to (q \vee r)$
   5.4 $p \leftrightarrow (q \vee r)$ และ $(p \vee r) \leftrightarrow q$
   5.5 $(p \vee q) \leftrightarrow r$ และ $p \vee (q \leftrightarrow r)$
   5.6 $p \to (q \to r)$ และ $p \wedge q \to r$
6. ให้ p, q, r เป็นประพจน์ใด ๆ จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้สมมูลกันหรือไม่ ถ้าสมมูลกันจงแสดงโดยใช้ทฤษฎีบท ถ้าไม่สมมูลจงยกตัวอย่างค้าน

6.1 $\neg(p \to \neg q)$ และ $p \wedge (p \to q)$

6.2 $p \to (q \leftrightarrow r)$ และ $(p \to q) \leftrightarrow r$

6.3 $p \wedge (q \vee r)$ และ $(p \wedge q) \vee r$

6.4 $p \leftrightarrow \neg q$ และ $\neg p \leftrightarrow q$

6.5 $p \to (q \vee r)$ และ $\neg(\neg r \to q) \to \neg p$

6.6 $\neg(p \wedge \neg q)$ และ $\neg q \to \neg p$

6.7 $\neg p \to q$ และ $(\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p)$

6.8 $p \to (q \to r)$ และ $(p \to q) \to r$

7. จงหานิเสธของประพจน์ต่อไปนี้

7.1 รองเท้าเป็นเครื่องแต่งกายชนิดหนึ่ง

7.2 ถ้าแดงไปโรงเรียน แล้วดำจะไม่ทำการบ้าน

7.3 $2 > 4$ และ $3 = 5$

7.4 $x + 1 = 3$ หรือ π เป็นจำนวนตรรกยะ

7.5 ถ้า 2 เป็นจำนวนคี่ แล้ว 1 เป็นจำนวนเฉพาะ

7.6 5 เป็นจำนวนเต็มบวก ก็ต่อเมื่อ e เป็นจำนวนอตรรกยะ

7.7 $ab = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

7.8 ถ้า $xy > 0$ แล้ว ($x > 0$ และ $y > 0$) หรือ ($x < 0$ และ $y < 0$)

7.9 $x + y = 0$ ก็ต่อเมื่อ $x = -y$ หรือ $y = -x$

7.10 ถ้า 2 หาร x ลงตัว หรือ 3 หาร x ลงตัว แล้ว 6 หาร x ลงตัว

8. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ตารางค่าความจริง

8.1 $(p \vee q) \vee \neg(p \wedge q)$

8.2 $(p \to \neg q) \to (p \wedge q)$

8.3 $\neg p \to (p \vee q)$

8.4 $\neg(p \wedge q) \to \neg p \wedge \neg q$

8.5 $(\neg p \to \neg q) \vee (p \leftrightarrow q)$

8.6 $(\neg p \to q) \leftrightarrow \neg(p \vee q)$

9. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้ทฤษฎีบท

9.1 $(p \to q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

9.2 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \to q)$

9.3 $\neg(p \to \neg q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

9.4 $(p \vee q) \leftrightarrow (p \wedge q)$

9.5 $(p \to \neg q) \leftrightarrow \neg(p \wedge q)$

9.6 $[p \to (q \to r)] \leftrightarrow (p \to r)$

9.7 $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)]$

9.8 $[\neg p \vee (r \to s)] \leftrightarrow [(r \vee s) \to p]$

9.9 $[p \to (r \to s)] \leftrightarrow [(\neg r \wedge s) \to p]$

9.10 $[(p \wedge q) \to r] \leftrightarrow [\neg r \to (\neg p \vee \neg q)]$

10. จงตรวจสอบว่าประพจน์ต่อไปนี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่ โดยใช้วิธีขัดแย้ง

10.1 $\neg(p \to q) \to \neg q$

10.2 $[p \to (q \to p)] \to p$

10.3 $\neg p \wedge q \to p$

10.4 $(p \wedge q) \to (p \vee q)$

10.5 $(p \to q) \wedge (p \to r) \to (p \to q \vee r)$

10.6 $(p \to r) \vee (q \to r) \to (p \vee q \to r)$

10.7 $(p \wedge q) \vee \neg(p \vee q)$

10.8 $((p \to q) \to r) \to (p \to (q \to r))$

10.9 $\neg(p \to q) \to (\neg p \leftrightarrow q)$

10.10 $\neg[p \vee (\neg p \wedge q)] \to (\neg p \wedge \neg q)$

10.11 $(p \to q) \to (q \to p)$

10.12 $(p \to r) \to [(p \to q) \wedge (q \to r)]$

11. จงเขียนข้อความต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์พร้อมบอกเอกภพสัมพัทธ์ในแต่ละข้อ
    11.1 มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $|x| = x$
    11.2 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามจะได้ $x^2 > 0$
    11.3 จำนวนนับทุกจำนวนมีค่ามากกว่า 1
    11.4 ไม่มีจำนวนตรรกยะใดเลยที่เป็นจำนวนบวก
    11.5 มีจำนวนจริง x และ y ซึ่ง $x + y > 0$
    11.6 มีจำนวนเต็ม m ซึ่ง $m > n$ ทุก ๆ จำนวนเต็ม n
12. ให้ $A = \{-1, 0, 1\}$, $B = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ และ $C = \{1, 2, 3, 4\}$ พิจารณาค่าความจริงของข้อความต่อไปนี้
    12.1 $\forall x \in A\ [\, x + 1 \geq x \,]$
    12.2 $\exists x \in C\ [\, x(x + 1) = x \,]$
    12.3 $\forall x \in B\ [\, x > 0 \to x^2 > x \,]$
    12.4 $\forall x \in A\, \forall y \in A\ [\, x \neq y \to x > y \,]$
    12.5 $\forall x \in B\, \exists y \in B\ [\, xy = 1 \,]$
    12.6 $\exists x \in C\, \exists y \in C\ [\, x + y < xy \,]$
13. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้
    13.1 $\forall x\ [\, \sqrt{x} \geq 0 \,]$
    13.2 $\forall x\ [\, x = 1 \to |x| > 2 \,]$
    13.3 $\exists x\ [\, (x < 3) \wedge (x > 3) \,]$
    13.4 $\forall x\, \forall y\ [\, xy > 0 \to \frac{x}{y} > 0 \,]$
    13.5 $\exists x\, \forall y\ [\, x = y \leftrightarrow x^2 = y^2 \,]$
    13.6 $\exists x\, \exists y\ [\, (xy = 10 \wedge x > 5) \to y > 2 \,]$
14. ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหานิเสธของข้อความต่อไปนี้
    14.1 ไม่มีจำนวนจริงใดเลยที่มากกว่าศูนย์
    14.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x + y = y$ สำหรับทุก ๆ จำนวนจริง y
    14.3 ทุก ๆ จำนวนเต็ม m, n ถ้า $m + n = mn$ แล้ว $n^m = 1$

1.2 วิธีการพิสูจน์

ผู้เขียนจะมีการนำเสนอวิธีการพิสูจน์ไว้ทั้งหมด 6 วิธี ประกอบไปด้วย

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข
2. การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี
3. การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้
4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง
5. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้อย่างเดียว
6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

1. การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข

การพิสูจน์ข้อความที่อยู่ในรูปแบบ $p \to q$ เรียกว่า **การพิสูจน์ข้อความแบบมีเงื่อนไข (proof of conditional statements)** ต้องการแสดงว่า $p \to q$ เป็นจริง ต้องแสดงให้ได้ว่า เมื่อไรก็ตามที่ p เป็นจริง ต้องแสดงให้ได้ว่า q เป็นจริงด้วย เขียนเป็นโครงพิสูจน์ได้ดังนี้

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	q	เป็นจริง (ข้อสรุป) $\square$

จะเรียกวิธีนี้ว่า**การพิสูจน์โดยวิธีตรง (direct proof)** นิยมใช้เครื่องหมาย $\square$ วางไว้บรรทัดสุดท้ายเพื่อบอกว่าจบการพิสูจน์ ในส่วนที่เว้นว่างไว้นั้นคือส่วนที่จะเติมรายละเอียดให้สมบูรณ์ อาจจะได้จากนิยาม ทฤษฎีบทที่พิสูจน์มาก่อนหน้า หรือสัจพจน์ เพื่อให้นำไปสู่ข้อสรุปอย่างเป็นเหตุเป็นผลกัน เพื่อใช้ในการพิสูจน์ในตัวอย่างต่อไปจากนี้ จะนิยาม

บทนิยาม 1.2.1 เรียกจำนวนเต็ม a ที่ไม่ใช่ศูนย์ว่าหารจำนวนเต็ม b ลงตัว เขียนแทนด้วย $a \mid b$

$$\text{ถ้ามีจำนวนเต็ม } k \text{ ซึ่ง} \qquad b = ak$$

และเรียก a ว่า**ตัวหาร (divisor)** หรือ**ตัวประกอบ (factor)** ของ b ถ้า a หาร b ไม่ลงตัวเขียนแทนด้วย $a \nmid b$

บทนิยาม 1.2.2 จำนวนคู่ (even number) คือจำนวนเต็มที่หารด้วย 2 ลงตัว หรือกล่าวได้ว่า

$$\text{ถ้า } a \text{ เป็นจำนวนคู่ แล้ว } 2 \mid a \text{ หรือมีจำนวนเต็ม } k \text{ ซึ่ง } a = 2k$$

และจำนวนเต็ม a ที่มีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $a = 2k + 1$ เรียกว่า **จำนวนคี่ (odd number)**

ตัวอย่าง 1.2.3 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^2 เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 1.2.4 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $m+n$ เป็นจำนวนคู่ "

ตัวอย่าง 1.2.5 จงพิสูจน์ว่า "สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ซึ่ง $a \neq 0$ ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (2b+3c)$"

ตัวอย่าง 1.2.6 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n^2 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่"
แนวคิด มีโครงพิสูจน์ดังนี้

$$\begin{array}{ll} \text{สมมติ} & n^2 \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ & \vdots \\ \text{ดังนั้น} & n \text{ เป็นจำนวนคู่} \qquad \square \end{array}$$

จะเห็นได้ว่าการพิสูจน์โดยวิธีตรงนี้ทำไม่ได้ แต่สามารถทำได้โดยใช้กฎแย้งสลับที่ซึ่งมีความหมายเดียวกับข้อความที่ต้องการจะพิสูจน์คือ $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$ ดังนั้นจะทำการพิสูจน์

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ n \text{ เป็นจำนวนคี่ } \to n^2 \text{ เป็นจำนวนคี่}$$

***บทพิสูจน์*.** ให้ n เป็นจำนวนเต็มใด ๆ สมมติว่า n เป็นจำนวนคี่ จะได้ว่ามีจำนวนเต็ม k ซึ่ง $n = 2k + 1$ แล้ว

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$$

ให้ $p = 2k^2 + 2k$ เนื่องจาก k เป็นจำนวนเต็ม ดังนั้น p เป็นจำนวนเต็ม นั่นคือมีจำนวนเต็ม p ซึ่งทำให้ $n^2 = 2p + 1$ สรุปได้ว่า n^2 เป็นจำนวนคี่ $\square$

การพิสูจน์ $p \to q$ ในตัวอย่าง 1.2.6 เรียกว่า **การพิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)** มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

$$\begin{array}{lll} \text{สมมติ} & \neg q & \text{เป็นจริง} \\ & \vdots & \\ \text{ดังนั้น} & \neg p & \text{เป็นจริง} \qquad \square \end{array}$$

อนึ่งในกรณีที่พยายามใช้ทั้ง 2 วิธีแล้วแต่ยังไม่สามารถพิสูจน์ได้ยังมีอีกหนึ่งวิธีคือ **วิธีขัดแย้ง (contradiction)** ซึ่งจะกล่าวในวิธีที่ 4 ดังนั้นการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $p \to q$ ได้ 3 วิธีคือ

1. พิสูจน์โดยวิธีตรง (direct proof)
2. พิสูจน์โดยวิธีการแย้งสลับที่ (contrapositive proof)
3. พิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (proof by contradiction)

ตัวอย่าง 1.2.7 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n^3 เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่"

การพิสูจน์ข้อความ $p \to (q \vee r)$ เนื่องจาก $p \to (q \vee r) \equiv p \to (\neg q \to r)$ ดังนั้น

$$\begin{array}{ccc} \text{สมมติ} & p \text{ และ } \neg q & \text{เป็นจริง} \\ & \vdots & \\ \text{ดังนั้น} & r & \text{เป็นจริง} \end{array}$$

ตัวอย่าง 1.2.8 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า $m + n$ เป็นจำนวนคี่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนคี่ "

ตัวอย่าง 1.2.9 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า mn เป็นจำนวนคู่ แล้ว m หรือ n เป็นจำนวนคู่ "

การพิสูจน์ข้อความ $p \to (q \land r)$ เนื่องจาก $p \to (q \land r) \equiv (p \to q) \land (p \to r)$ ดังนั้น ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง 2 ข้อความเป็นจริง

1. $p \to q$
2. $p \to r$

สมมติ	p	เป็นจริง		สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$				$\vdots$	
ดังนั้น	q	เป็นจริง		ดังนั้น	r	เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.2.10 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า a เป็นจำนวนคู่ แล้ว $4|a^2$ และ a^2+1 เป็นจำนวนคี่ "

ตัวอย่าง 1.2.11 จงพิสูจน์ว่า " ถ้า m เป็นจำนวนคี่ แล้ว $4|(m^2+3)$ และ $4|(m^2-1)$ "

ตัวอย่าง 1.2.12 ข้อความ "ถ้า $m+n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m และ n เป็นจำนวนคู่" เป็นจริงหรือเท็จ

2. การพิสูจน์โดยการแจกแจงกรณี

จะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความในรูปแบบ $(p \vee q) \to r$ เนื่องจาก $(p \vee q) \to r \equiv (p \to r) \wedge (q \to r)$ ดังนั้นต้องพิสูจน์ทั้ง 2 กรณีคือ

กรณีที่ 1 $p \to r$

สมมติ	p	เป็นจริง
	$\vdots$	
ดังนั้น	r	เป็นจริง

กรณีที่ 2 $q \to r$

สมมติ	q	เป็นจริง	
	$\vdots$		
ดังนั้น	r	เป็นจริง	$\square$

เรียกว่า**การพิสูจน์โดยแจกแจงกรณี (proof by cases)** ดังจะยกตัวอย่างต่อไปนี้

ตัวอย่าง 1.2.13 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า a เป็นจำนวนคู่ หรือ a เป็นจำนวนคี่ แล้ว $a^2 + a$ เป็นจำนวนคู่"

ตัวอย่าง 1.2.14 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + 3n + 4$ เป็นจำนวนคู่"

สำหรับจำนวนเต็มแล้วไม่จำเป็นต้องแบ่งเป็น 2 กรณีคือจำนวนคู่และจำนวนคี่ บางครั้งอาจจะแบ่งมากกว่า 2 กรณี เช่นกรณีจำนวนเต็มบวก จำนวนเต็มลบ และจำนวนเต็มศูนย์ แบ่งเป็น 3 กรณี หรือจะแบ่งเป็นหลาย ๆ กรณีขึ้นอยู่กับข้อความที่ต้องการพิสูจน์โดยมีหลักว่าต้องพิจารณาให้ครบทุกกรณี ในกรณีอื่น ๆ ที่ไม่ใช่จำนวนเต็ม ย่อมสามารถพิจารณาโดยใช้หลักเดียวกัน

สำหรับกรณีทั่วไป $(p_1 \vee p_2 \vee ... \vee p_n) \to r$ ต้องพิสูจน์ว่าทั้ง n กรณีเป็นจริง

กรณีที่ 1 $p_1 \to r$

กรณีที่ 2 $p_2 \to r$

$\vdots$

กรณีที่ n $p_n \to r$

3. การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้

การพิสูจน์ในรูปแบบ $p \leftrightarrow q$ ซึ่งทำ 2 ขั้นตอนดังนี้

1. $p \to q$ เรียกว่าขั้น sufficient part (p เป็นเงื่อนไขที่เพียงพอสำหรับ q)
2. $q \to p$ เรียกว่าขั้น necessily part (p เป็นเงื่อนไขที่จำเป็นสำหรับ q)

เหตุผลที่ต้องพิสูจน์ทั้ง 2 ขั้นตอนเพราะว่า $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ และเรียกว่า **การพิสูจน์ข้อความแบบผันกลับได้ (proof of biconditional statements)**

ตัวอย่าง 1.2.15 จงพิสูจน์ว่า "จำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ $a + 3$ เป็นจำนวนคู่"

ตัวอย่าง 1.2.16 จงพิสูจน์ว่า

"สำหรับจำนวนเต็ม a และ b ใด ๆ ab เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a และ b เป็นจำนวนคี่"

การพิสูจน์ข้อความ $p \leftrightarrow q$ โดยการสร้างข้อความที่สมมูลต่อเนื่องกันจากข้อความ p ไปยังข้อความ q

$$\begin{array}{rcr} p \leftrightarrow p_1 & \text{เขียนแทนด้วย} & p \leftrightarrow q_1 \\ q_1 \leftrightarrow q_2 & & \leftrightarrow q_2 \\ q_2 \leftrightarrow q_3 & & \leftrightarrow q_3 \\ \vdots & & \vdots \\ q_n \leftrightarrow q & & \leftrightarrow q \end{array}$$

เรียกวิธีการพิสูจน์นี้ว่า **iff–string**

ต่อไปจะกล่าวถึงการพิสูจน์ข้อความที่สมมูลกันเป็นคู่ เช่น

$$(p_1 \leftrightarrow p_2) \wedge (p_2 \leftrightarrow p_3) \wedge (p_3 \leftrightarrow p_1)$$

สามารถพิสูจน์ได้จาก

$$(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge (p_3 \rightarrow p_1)$$

ตัวอย่าง 1.2.17 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

p_1 : a เป็นจำนวนคู่

p_2 : a^2 หารด้วย 4 ลงตัว

p_3 : a^2 เป็นจำนวนคู่

4. การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง

ถ้าการพิสูจน์ข้อความโดยวิธีต่าง ๆ ที่ผ่านมาแล้วไม่สามารถทำได้ ในหัวข้อนี้จะนำเสนอทางเลือกอีกวิธีหนึ่ง ถ้าต้องการพิสูจน์ p เป็นจริงโดยการสมมติว่า $\neg p$ เป็นจริง แล้วนำไปสู่ข้อความขัดแย้ง c หรือเกิดประพจน์ $r \wedge \neg r$ การพิสูจน์แบบนี้ได้จากสัจนิรันดร์ (T15) $(\neg p \to c) \to p$ เรียกวิธีนี้ว่า **การพิสูจน์โดยวิธีขัดแย้ง (proof by contradiction)** มีโครงการพิสูจน์ดังนี้

สมมติ $\neg p$ เป็นจริง

$\vdots$

ดังนั้น เกิดข้อขัดแย้ง $\square$

ตัวอย่าง 1.2.18 จงพิสูจน์ว่า "ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตามที่ไม่ใช่ศูนย์ จะได้ว่า $x^{-1} \neq 0$"

แนวคิด ให้ p แทนข้อความ $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0 \to x^{-1} \neq 0$ สมมติว่า $\neg p$ เป็นจริง นั่นคือ

$$\exists x \in \mathbb{R},\ x \neq 0 \wedge x^{-1} = 0$$

บทพิสูจน์. สมมติว่า มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x \neq 0$ และ $x^{-1} = 0$
เนื่องจาก $x \neq 0$ โดยสมบัติจำนวนจริงจะได้ว่า $x(x^{-1}) = 1$ แต่จากการสมมติ $x^{-1} = 0$ จะได้ว่า

$$1 = x(x^{-1}) = x(0) = 0$$

เกิดขัดแย้ง ดังนั้นข้อความนี้เป็นจริง $\square$

ตัวอย่าง 1.2.19 จงพิสูจน์ว่า "ไม่มีจำนวนเต็ม x ซึ่ง $x^2 + x = 1$"

ตัวอย่าง 1.2.20 จงพิสูจน์ว่า "ถ้า x, y เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $x^2 - 4y \neq 2$"

ตัวอย่าง 1.2.21 จงพิสูจน์ $\forall a \in \mathbb{R}^+, (\forall \epsilon > 0, a < \epsilon) \to (a = 0)$

ตัวอย่าง 1.2.22 จงพิสูจน์ $\forall a, b \in \mathbb{R}, (\forall \epsilon > 0, a \leq b + \epsilon) \to (a \leq b)$

บทนิยาม 1.2.23 จะเรียกจำนวนเต็มบวก p ที่มากกว่า 1 ว่าเป็น**จำนวนเฉพาะ (prime number)** ก็ต่อเมื่อ ตัวหารของ p มีแค่ 1 กับ p เท่านั้น

ตัวอย่าง 1.2.24 จงพิสูจน์ว่า " มีจำนวนเฉพาะเป็นจำนวนอนันต์ "

5. การพิสูจน์ข้อความซึ่งเป็นไปได้อย่างเดียว

ข้อความที่เป็นไปได้อย่างเดียวเท่านั้นเขียนแทนด้วย $\exists! x \in \mathcal{U},\, p(x)$ ข้อความนี้สมมูลกับ

$$(\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)) \wedge (\forall x, y \in \mathcal{U},\, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y)$$

ดังนั้นการพิสูจน์ $\exists! x \in \mathcal{U},\, p(x)$ แบ่งการพิสูจน์ออกเป็น 2 ส่วนคือ

1. $\exists x \in \mathcal{U},\, p(x)$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ อย่างน้อยหนึ่งตัว (existence)
2. $\forall x, y \in \mathcal{U},\, p(x) \wedge p(y) \rightarrow x = y$ แสดงว่ามี $x \in \mathcal{U}$ เพียงหนึ่งตัวเท่านั้น (uniqueness)

ตัวอย่าง 1.2.25 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $2^x = 1$"

แนวคิด เขียนในรูปสัญลักษณ์ได้เป็น $\exists! x \in \mathbb{R},\, 2^x = 1$

บทพิสูจน์. **ขั้นที่ 1 มีอย่างน้อยหนึ่งตัว** เลือก $x = 0$ จะได้ว่า

$$2^x = 2^0 = 1$$

ขั้นที่ 2 มีเพียงตัวเดียว ให้ $x, y \in \mathbb{R}$ สมมติ $2^x = 1$ และ $2^y = 1$ แล้ว

$$2^x = 1 = 2^y \quad \text{ดังนั้น} \quad 2^x = 2^y$$

จากสมบัติของเลขยกกำลังจะได้ว่า $x = y$ $\square$

ตัวอย่าง 1.2.26 จงพิสูจน์ว่า "มีจำนวนจริง x เพียงตัวเดียวที่ทำให้ $x^3 + 1 = 0$"

ตัวอย่าง 1.2.27 จงพิสูจน์ว่า "ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 1$"

ตัวอย่าง 1.2.28 จงพิสูจน์ว่า "ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x - y = 1$"

ตัวอย่าง 1.2.29 จงพิสูจน์ว่า

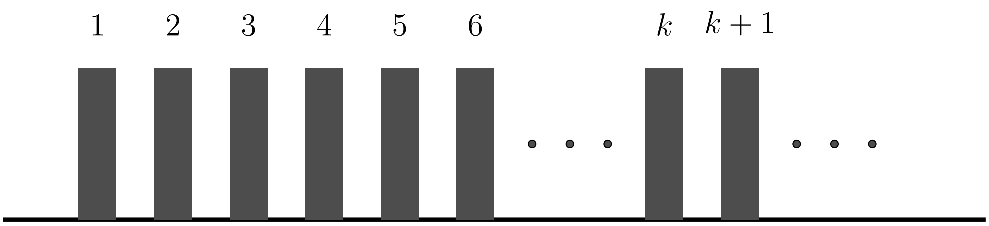
"มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $x + y = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y"

ตัวอย่าง 1.2.30 พิจารณาค่าความจริงของ $\exists! x \in \mathbb{R},\ x^2 = 1$

ตัวอย่าง 1.2.31 จงพิสูจน์ว่า $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 + 1 = 0$ เป็นเท็จ

6. การพิสูจน์โดยหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

หลักโดมิโน (domino principle) มีวิธีการก็คือต้องผลักชิ้นแรกให้ล้มเสียก่อน เรียกขั้นนี้ว่า**ขั้นฐาน** (basic step) จากนั้นต้องตรวจสอบว่าแต่ละชิ้นจะล้มไปไม่มีที่สิ้นสุดจริงหรือไม่ ด้วยการตรวจสอบขั้นที่ 2 คือตรวจสอบโดมิโนทุก ๆ คู่ โดยที่ชิ้นที่ k ต้องล้มไปทับชิ้นที่ k+1 เสมอเรียกขั้นนี้ว่า**ขั้นอุปนัย** (inductive step) ดังรูป



การเปรียบเทียบหลักโดมิโนกับหลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

การพิสูจน์ประพจน์ $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริงทำได้ 2 ขั้นตอน ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 1.2.32 ให้ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า

1. **ขั้นฐาน** : $P(1)$ เป็นจริง และ
2. **ขั้นอุปนัย** : $\forall k \in \mathbb{N}, P(k) \to P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ เป็นจริง

ตัวอย่าง 1.2.33 จงแสดงว่า $1+2+3+4+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.2.34 จงแสดงว่า $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$ สำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$

ตัวอย่าง 1.2.35 จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N},\ 4 \mid (5^n-1)$ สำหรับจำนวนนับ n

ตัวอย่าง 1.2.36 จงแสดงว่า $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n < 2^{n+1}$

ต่อไปจะกล่าวถึงการพิสูจน์แบบอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ที่เริ่มขั้นฐานด้วย n_0

ทฤษฎีบท 1.2.37 ให้ $n_0 \in \mathbb{N}$ และ $P(n)$ เป็นประโยคเปิด ถ้า

1. **ขั้นฐาน** : $P(n_0)$ เป็นจริง
2. **ขั้นอุปนัย** : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq n_0, P(k) \rightarrow P(k+1)$ เป็นจริง

สรุปได้ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0, P(n)$ เป็นจริง หรือ $P(n)$ เป็นจริงทุกจำนวนนับ $n \geq n_0$

ตัวอย่าง 1.2.38 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \geq n^2$

ตัวอย่าง 1.2.39 จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์ $2^n \leq n!$

แบบฝึกหัด 1.2

1. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธิพิสูจน์ที่เหมาะสม

   1.1 ถ้า n เป็นจำนวนคู่ แล้ว n^4 เป็นจำนวนคู่

   1.2 ถ้า x เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3x$ เป็นจำนวนคู่

   1.3 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3n + 5m$ เป็นจำนวนคู่

   1.4 ถ้า m เป็นจำนวนคู่ และ n เป็นจำนวนคี่ แล้ว nm เป็นจำนวนคู่

   1.5 ถ้า $3mn$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่

   1.6 ถ้า m^3 เป็นจำนวนคี่ แล้ว m เป็นจำนวนคี่

   1.7 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a \mid b$ และ $b \mid c$ แล้ว $a \mid c$

   1.8 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid (b + c)$

   1.9 สำหรับจำนวนจริง x และ y ถ้า $xy = 0$ และ $x \neq 0$ แล้ว $y = 0$

   1.10 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $7n^2 + n + 2$ เป็นจำนวนคู่

   1.11 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^2 + n + 1$ เป็นจำนวนคี่

   1.12 ไม่ว่า m จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $m^3 - m + 3 + 1$ เป็นจำนวนคี่

   1.13 ไม่ว่า m จะเป็นจำนวนเต็มใดก็ตาม $m^2 - m$ เป็นจำนวนคู่

2. จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือไม่ ถ้าจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^3 - n$ เป็นจำนวนคู่

   2.2 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $4m$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนคู่

   2.3 ถ้า m และ n เป็นจำนวนคู่ แล้ว $n - m$ เป็นจำนวนคู่

   2.4 ถ้า m เป็นจำนวนเต็ม และ $4m$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว $3m$ เป็นจำนวนคู่

   2.5 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม และ $n^5 - n$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว n เป็นจำนวนคู่

   2.6 สำหรับจำนวนเต็ม m, n ถ้า $m^2 + n^2$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว m เป็นจำนวนคู่ หรือ n เป็นจำนวนคู่

   2.7 ถ้า n เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $n^3 - n$ เป็นจำนวนคี่

   2.8 สำหรับจำนวนเต็ม a, b และ c ที่ไม่ใช่ศูนย์ ถ้า $a \mid b^2$ แล้ว $a \mid b$

   2.9 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \to x^2 < y^2$

   2.10 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x < y \to x^3 < y^3$

   2.11 $\forall a, b \in \mathbb{R},\ [(a \neq 0 \wedge b \neq 0) \to a + b \neq 0]$

3. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยเลือกวิธีพิสูจน์ที่เหมาะสม

   3.1 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคู่

   3.2 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a^2 เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคู่

   3.3 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^2+1 เป็นจำนวนคี่

   3.4 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ a เป็นจำนวนคี่ ก็ต่อเมื่อ a^2+3 เป็นจำนวนคู่

   3.5 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ $a+1$ เป็นจำนวนคู่ ก็ต่อเมื่อ a^3 เป็นจำนวนคี่

   3.6 สำหรับจำนวนเต็ม x, y ใด ๆ $xy = 1$ ก็ต่อเมื่อ $x = 1$ และ $y = 1$

   3.7 มีจำนวนจริง x และ y ใด ๆ $x < y$ ก็ต่อเมื่อ $x^3 < y^3$

   3.8 $\forall x \in \mathbb{R}\ [x^3 = 1 \leftrightarrow x = 1]$

   3.9 $\forall x \in \mathbb{R}\ [x < 0 \leftrightarrow \frac{1}{x} < 0]$

   3.10 $\forall x, y \in \mathbb{R}\ [x^2 + y^2 = 0 \leftrightarrow (x = 0 \wedge y = 0)]$

   3.11 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ [x^3 = y^3 \leftrightarrow x = y]$

4. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

   p_1 : n เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

   p_2 : n^3 เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 1

   p_3 : $n^3 + 4$ เป็นจำนวนเต็มที่หารด้วย 3 แล้วเหลือเศษ 2

5. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกันทุกคู่

   p_1 : a เป็นจำนวนคี่

   p_2 : $a + 3$ เป็นจำนวนคู่

   p_3 : a^4 เป็นจำนวนคี่

6. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

   6.1 สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ ถ้า $a^2 + 2a + 5$ เป็นจำนวนคู่ แล้ว a เป็นจำนวนคี่

   6.2 ถ้า a เป็นจำนวนเต็ม แล้ว $a^2 \neq 4a + 3$

   6.3 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงใดก็ตาม ถ้า $x < 0$ แล้ว $x^{-1} < 0$

   6.4 ไม่ว่า x จะเป็นจำนวนจริงบวกใดก็ตาม จะได้ว่า $\sqrt{x} < \sqrt{x+1}$

   6.5 สำหรับจำนวนจริง $x \geq 0$ ถ้า ทุก ๆ จำนวนจริงบวก ε ซึ่ง $x < \varepsilon$ แล้ว $x = 0$

   6.6 $\forall a, b \in \mathbb{R}\,[(\forall \varepsilon > 0,\ a \leq b + \varepsilon) \rightarrow a \leq b]$

   6.7 $\forall x, y \in \mathbb{R},\ x^2 + xy + y^2 \geq 0$

6.8 $\forall x, y \in \mathbb{R}^+,\ x + y > 2\sqrt{xy}$

7. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้

7.1 ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 5$

7.2 ทุก ๆ จำนวนจริง x จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $x + y = 0$

7.3 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = x$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

7.4 มีจำนวนจริง x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นที่ทำให้ $xy = y$ สำหรับทุกจำนวนจริง y

7.5 มีจำนวนตรรกยะ x เพียงจำนวนเดียวเท่านั้นซึ่งทำให้ xy เป็นจำนวนตรรกยะ สำหรับทุกจำนวนอตรรกยะ y

7.6 $\exists! x \in \mathbb{R},\ x \in [0, \frac{\pi}{2}] \to \sin x = \cos x$

8. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นเท็จ

8.1 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x = x + 1$

8.2 มีจำนวนจริง x ซึ่ง $x^2 + x + 1 = 0$

8.3 $\exists x \in \mathbb{Z},\ -1 < x < 0$

8.4 $\exists x \in \mathbb{Z},\ 4x^2 = 1$

8.5 $\exists n \in \mathbb{N},\ 3 \mid 2^n$

9. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

9.1 $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.3 $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.4 $2 + 4 + 6 + \cdots + (2n) = n^2 + n$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.5 $2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.6 $1 \cdot 2 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2^3 + \cdots + n \cdot 2^n = (n-1)2^{n+1} + 2$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.7 $1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \cdots + n(n!) = (n+1)! - 1$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

9.8 $(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3}) \cdots (1 - \frac{1}{n}) = \frac{1}{n}$ สำหรับทุกจำนวนนับ n

10. จงพิสูจน์ข้อความต่อไปนี้ โดยใช้หลักอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์

10.1 $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n > n$

10.2 $\forall n \in \mathbb{N},\ 2^n \leq 2^{n+1} - 2^{n-1} - 1$

10.3 $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 + 2^{-1} + 2^{-2} + \cdots + 2^{-n} \leq 2$

10.4 $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 10, 2^{n-10}(1000) < 2^n - 2^{n-6}$

10.5 ให้ $x \in \mathbb{R}$ ซึ่ง $x > -1$ จงพิสูจน์ว่า $\forall n \in \mathbb{N}, (1+x)^n \geq 1 + nx$

11. จงหาจำนวนนับเริ่มต้นที่ทำให้ข้อความนี้เป็นจริงพร้อมทั้งพิสูจน์

11.1 $2^{n-1} \leq n!$

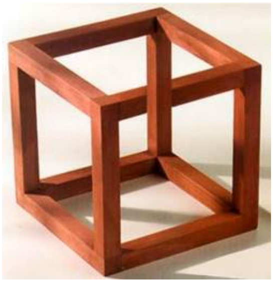
11.2 $4^n > n^4$

11.3 $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$

11.4 $n^2 < (\frac{3}{2})^n$

1.3 ปฏิทรรศน์

ปฏิทรรศน์ (paradox) คือประโยคหรือข้อความที่เกิดขัดแย้งในตัวเอง หรือความขัดแย้งกันแต่จริง หรือข้อความที่มีลักษณะย้อนแย้งในตัวเอง หมายถึงเหตุการณ์ของประโยคที่เป็นจริงชัดเจนแต่สุดท้ายนำไปสู่ความขัดแย้งในตัวเอง หรือสถานการณ์ที่อยู่นอกความคิดทั่วไป หรือปฏิทรรศน์ใช้กันในความหมายของข้อความที่ตรงกันข้าม หรือขัดแย้งกับความเชื่อที่คนทั่วไปมีหรือยอมรับว่าเป็น “สามัญสำนึก (common sense)”




ตัวอย่างรูปภาพที่เกิดปฏิทรรศน์

ต่อไปจะกล่าวถึงปฏิทรรศน์ที่มีชื่อเสียงในเรื่องทฤษฎีเซต นำเสนอโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอังกฤษชื่อว่า เบอร์ตแรนด์ รัสเซลล์ (Bertrand Russull) ในปี ค.ศ. 1901 ในเวลาต่อมาเรียกว่า **ปฏิทรรศน์รัสเซลล์ (Russull's paradox)** เขาได้ยกตัวอย่างสถานการณ์ในหมู่บ้านเล็ก ๆ แห่งหนึ่งที่มีช่างตัดผมเพียงคนเดียว ช่างตัดผมคนนั้นกล่าวขึ้นมาว่า

“ผู้ชายทุกคนในหมู่บ้านถ้าไม่ตัดผมเอง ก็ต้องถูกช่างตัดผมเป็นคนตัดให้”

คำถามคือ **ใครเป็นคนตัดผมช่างตัดผม** พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- ถ้าเขาตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาเป็นคนที่ไม่ได้ตัดผมของตนเอง
- ถ้าเขาไม่ได้ตัดผมของตนเอง แสดงว่าเขาถูกตนเองตัดผมให้

จะเห็นว่าเกิดข้อความขัดแย้งเพราะเขาเป็นทั้งช่างตัดผมขณะเดียวกันก็เป็นผู้ชายในหมู่บ้าน การพูดประโยคดังกล่าวจึงเกิดปฏิทรรศน์ขึ้น บางครั้งจะเรียกว่า **ปฏิทรรศน์ช่างตัดผม (the baber paradox)**

การนำเสนอปฏิทรรศน์ของรัสเซลล์ทำให้นักคณิตศาสตร์ต้องระมัดระวังมากขึ้น เมื่อจะนิยามหรือสร้างระบบสัจพจน์ใหม่ ๆ ในทางคณิตศาสตร์ เพื่อไม่ให้ขัดแย้งกันเองอันจะนำไปสู่การไม่ยอมรับทางคณิตศาสตร์

ในปี 1905 นักคณิตศาสตร์ชาวฝรั่งเศสชื่อ จูลส์ ริชาร์ด (Jules Richard) ได้นำเสนอปฏิทรรศน์ในด้านประโยคทางตรรกศาสตร์ ตัวอย่างเช่น มีนักศึกษาผู้หนึ่งพูดขึ้นว่า

" นักศึกษาทุกคนพูดโกหก "

ประโยคนี้สรุปได้ว่านักศึกษาคนนี้**พูดจริงหรือพูดโกหก** พิจารณา 2 กรณีต่อไปนี้

- ถ้านักศึกษาคนนี้พูดจริง แสดงว่านักศึกษาคนนี้พูดโกหก
- ถ้านักศึกษาคนนี้พูดโกหก แสดงว่านักศึกษาคนนี้พูดจริง

จะเห็นว่าเกิดข้อขัดแย้งเพราะนักศึกษาคนที่พูดประโยคนี้กล่าวถึงนักศึกษาทุกคนอันหมายรวมตัวเขาเองเข้าไปด้วย เรียกปฏิทรรศน์นี้ว่า **ปฏิทรรศน์ของริชาร์ด (Richard's paradox)**

ปฏิทรรศน์มีอีกหลายรูปแบบซึ่งพบเจอในสาขาวิชาอื่น ๆ เช่น

1. กรณีที่มีการย้อนกลับไปแก้ไขเหตุการณ์ในอดีต ที่จะส่งผลให้เกิดเหตุการณ์ในปัจจุบัน เช่น การย้อนกลับไปฆ่าพ่อแม่ของตนเองก่อนที่ตนจะเกิด ก็จะเกิดข้อขัดแย้งทางเวลาว่า ตัวของเราเกิดมาได้อย่างไร เมื่อพ่อแม่ถูกฆ่าไปแล้ว เรียกว่า ปฏิทรรศน์เวลา (time paradox) หรือปฏิทรรศน์คุณปู่ (grandfather paradox)

2. ปฏิทรรศน์ฝาแฝด (twin paradox) ซึ่งเป็นผลลัพธ์อันน่าฉงนที่สุดอันหนึ่งในทฤษฎีสัมพัทธภาพของไอน์สไตน์ ในสาขาวิทยาศาสตร์

3. ในวิชาเศรษฐศาสตร์ กล่าวถึงกรณีที่ว่าทำไมน้ำจึงถูกกว่าเพชร ทั้ง ๆ ที่คนต้องการน้ำมากกว่า เรียกว่า diamond–water paradox

4. ปฏิทรรศน์ซีโน (Zeno's paradox) ในวิชาปรัชญา กล่าวถึงข้อสรุปที่ฟังดูแล้วขัดกันของซีโนจากตัวอย่างอันมีชื่อเสียงที่สุดของเขาก็คือ **อาคีลิสแข่งกับเต่า** กล่าวคือ " เต่าแข่งกับอาคีลิส โดยเต่าบอกให้อาคีลิสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลิสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลิสว่า
   ถ้าอาคีลิสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลิสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก "

แบบฝึกหัด 1.3

จงอธิบายปฏิทรรศน์ของแต่ละเหตุการณ์ต่อไปนี้

1. ยักษ์กินคนจับเหยื่อได้ และเล่นกับเหยื่อว่าถ้าเหยื่อสามารถทายใจของตนได้ เหยื่อจะถูกปล่อยไป เหยื่อผู้หน้าสงสารก็เลยทายว่า "ท่านคิดว่าท่านจะกินข้า" สรุปว่าเหยือถูกปล่อยหรือถูกกินกันแน่

2. ชายคนหนึ่งสอบถามนาย A และ B นาย A พูดว่า "นาย B พูดแต่เรื่องโกหก" ส่วนนาย B ก็พูดว่า "นาย A พูดแต่ความจริง" แล้วใครพูดความจริง ใครพูดโกหกกันแน่

3. เผ่ากินคน จับเหยื่อได้และเสี่ยงทายกับเหยื่อว่าให้เล่าเรื่องมาเรื่องหนึ่ง ถ้าหัวหน้าเผ่าคิดว่าเรื่องนั้นเป็นเรื่องจริง ให้จับไปต้ม แต่ถ้าเป็นเรื่องโกหกให้จับไปย่าง เหยื่อจึงเล่าว่า "เขาจะถูกจับไปย่าง" หัวหน้าเผ่าคิดอยู่นานก็คิดไม่ออกว่าจะต้มหรือ ย่างดี จนในที่สุดก็เอาเหยื่อผู้นั้นไปขังไว้รอวันคิดเสร็จ และเหยื่อผู้นั้นก็ถูกขังอยู่ตั้งแต่วันนั้นจนถึงปัจจุบัน เกิดไรขึ้นกับเหตุการณ์นี้

4. (Crocodile Dilemma) จระเข้ขโมยลูกของชายผู้หนึ่งไป แต่มันให้คำสัญญาว่า มันจะคืนลูกให้หากชายผู้นั้นทายใจมันได้ถูกต้องว่ามันจะทำอะไร ชายผู้นั้นเดาใจมันว่า "เขาจะไม่ได้ลูกกลับคืนมา"

5. เต่าแข่งกับอาคีลิส โดยเต่าบอกให้อาคีลิสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลิสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลิสว่า ถ้าอาคีลิสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลิสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก อาคีลิสจะชนะเต่าได้หรือไม่

บทที่ 2

สัจพจน์ของทฤษฎีเซต

2.1 ประวัติและการเขียนเซต

ในทางคณิตศาสตร์ถือว่า **"เซต (set)"** เป็นมูลฐาน เพราะว่าทฤษฎีบทต่าง ๆ ล้วนมีเซตเข้ามาเกี่ยวข้องเป็นพื้นฐานเกือบทั้งหมด (กรรณิกา กวักเพฑูรย์. 2542. หน้า 79) ผู้ที่เริ่มใช้คำว่าเซตเป็นคนแรกคือ เกอร์ก คันทอร์ (Georg Cantor: 1845–1918) ซึ่งเป็นนักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ซึ่งขณะนั้นเขากำลังสนใจศึกษาเกี่ยวกับการลู่เข้าของอนุกรมฟูเรียร์ (Fourier series)

$$a_1\mathrm{sin}x + a_2\mathrm{sin}2x + a_3\mathrm{sin}3x + \cdots$$

และอนุกรมของจำนวนจริงต่าง ๆ ทำให้เขาเห็นความสำคัญของการเปรียบเทียบขนาดของเซตอนันต์ในระบบจำนวนจริง คันทอร์ได้แนะนำการเปรียบเทียบขนาดที่เท่ากันไว้ว่า

" เซตสองเซตมีขนาดเท่ากัน ถ้าสมาชิกของเซตหนึ่งจับคู่กับแต่ละสมาชิกของเซตหนึ่งได "

ในกรณีเซตจำกัดสองเซตจะเท่ากันก็ต่อเมื่อทั้งสองมีจำนวนสมาชิกเท่ากัน จึงจะสามารถจับคู่กันแบบตัวต่อตัวได้พอดี แนวคิดนี้เป็นรากฐานทำให้เกิดการนับจำนวนได้อย่างไม่สิ้นสุด จนกระทั่งได้จำนวนที่เรียกว่า **จำนวนเชิงอนันต์ (tranfinite number)** ต่อมาในปี 1873 ได้ตีพิมพ์ผลงานที่ได้แสดงว่า เราไม่สามารถจับคู่แบบตัวต่อตัวระหว่างจำนวนจริงกับจำนวนเต็มได้ ทำให้นักคณิตศาสตร์ตื่นตัวเรื่องราวเกี่ยวเซต

คันทอร์ได้อธิบายเซตอย่างง่าย ๆ เพื่อความเข้าใจเบื้องต้นว่า "เซตคือการรวมกันอยู่ของสิ่งซึ่งมีสมบัติซึ่งมีสมบัติเดียวกัน" การพิสูจน์ทฤษฎีของเขาเกือบทั้งหมด เขาพิสูจน์จากสัจพจน์ 3 ข้อ คือ

1. **The Axiom of Extensionality**
   เซตสองเซตเหมือนกัน (เซตที่เท่ากัน) เมื่อมันมีสมาชิกเป็นอันเดียวกัน

2. **The Axiom of Abstraction**
   เมื่อกำหนดคุณสมบัติใดย่อมมีเซตประกอบด้วยคุณสมบัตินั้น ๆ เสมอ

3. **The Axiom of Choice**
   สำหรับเซต A ใด ๆ มีฟังก์ชัน f ซึ่งสับเซต $B \neq \varnothing$ ใด ๆ ของ A แล้ว $f(B) \in B$

นักคณิตศาสตร์ได้นำทฤษฎีเซตของคันทอร์เป็นรากฐานในคณิตศาสตร์สาขาต่างๆ และถูกใช้อย่างแพร่หลายในเวลาต่อมา และมีการถกเถียงกันเกี่ยวกับข้อขัดแย้งกันเอง (paradox) มีอยู่ 2 ลักษณะ

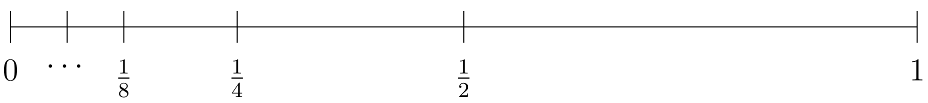
1. **ความเป็นอนันต์** การสร้างระบบจำนวนในรูปเซต สามารถนิยามจำนวนขึ้นได้เรื่อย ๆ จนได้จำนวนเชิงอนันต์ โดยเฉพาะการศึกษาการลู่เข้าของอนุกรมของจำนวนจริงซึ่งมีจำนวนขนาดใหญ่มากจนไม่สามารถแทนด้วยจำนวนจำกัดใด ๆ ได้ แต่เมื่อพิจารณาปัญหาที่มีชื่อเสียงของ ซีโน (Zeno of Elea : 490–430 ก่อนคริสตกาล) ที่กล่าวถึงการแข่งขันการวิ่งของอาคีลิสแข่งกับเต่าที่ว่า

   " เต่าแข่งกับอาคีลิส โดยเต่าบอกให้อาคีลิสต่อให้สิบเมตร ซึ่งอาคีลิสก็ตกลง แต่ก่อนจะเริ่มแข่งกัน เต่าก็บอกกับอาคีลิสว่า ถ้าอาคีลิสจะเดินทันเต่าจะต้องเดินผ่านครึ่งทางให้ได้ซะก่อน อาคีลิสก็เห็นด้วยกับที่เต่าบอก "

   อุปมาเหมือนกับการแบ่งช่วง $(0,1)$ ออกเป็นจุด

   $$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \cdots$$

   แสดงได้ดังแผนภาพ

   ทำให้ช่วงมีขนาดเล็กลงเรื่อย ๆ ถึงแม้ว่าแต่ละช่วงจะถูกแบ่งเล็กเท่าใดก็ตาม ขนาดช่วงเล็ก ๆ เหล่านั้นสามารถวัดขนาดได้และไม่เป็นศูนย์ ซึ่งทำให้ซีโนสรุปเป็นข้อแย้งกันเองแต่จริงที่เรียกว่า **ปฏิทรรศน์ซีโน (Zeno's paradox)** ที่กลาวว่า

   " ผลรวมของช่วงที่มีความยาวจำกัดเป็นอนันต์ช่วง จะยังคงได้ช่วงที่มีความยาวจำกัด "

   การแก้ปัญหาลักษณะนี้ได้มีการตกลงกันว่า เมื่อกล่าวถึงอนันต์ในทางคณิตศาสตร์จะมีอยู่ 2 ลักษณะ คือ การเป็นอนันต์ในลักษณะไม่มีที่สิ้นสุด (actual infinite) และการเป็นอนันต์ในลักษณะที่มีค่ามากเกินกว่าจำนวนจำกัดทุก ๆ ตัว (virtual infinite)

2. **การกำหนดนิยามเซตที่ไม่แจ่มชัด** จากที่คันทอร์กล่าวไว้ว่า เซตคือการรวมกันอยู่ของสิ่งซึ่งมีสมบัติซึ่งมีสมบัติเดียวกัน เช่นเมื่อสมมติว่า p เป็นสมบัติหนึ่ง ซึ่งถ้า x มีสมบัติ $p(x)$ นี้แล้ว

   $$\{x : p(x)\} \qquad \text{เป็นเซต}$$

   แต่คันทอร์ก็พบปัญหาความขัดแย้งในตัวเอง (Cantor's paradox) เมื่อเขากำหนด

   $$A = \{x : x = x\}$$

   จะได้ว่า A คือเซตของทุก ๆ เซต ถ้า $\mathcal{P}(A)$ คือเซตกำลัง (power set) ของ A จะได้ว่า

$$X \in \mathcal{P}(A) \quad \longrightarrow \quad X \in A$$

ทำให้ได้ข้อสรุปว่า จำนวนสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ น้อยกว่าหรือเท่ากับจำนวนสมาชิกของ A ซึ่งขัดแย้งกับทฤษฎีบทในทฤษฎีเซต และ ในปี 1902 รัสเซลล์ได้อธิบายว่าเกิดปฏิทรรศน์ ซึ่งขัดแย้งกับสัจพจน์ข้อที่ 2 ของคันทอร์ เมื่อกำหนด p เป็นสมบัติของการไม่เป็นสมาชิกของตัวมันเอง หรือกล่าวว่าเซต ๆ หนึ่งนิยามโดยเซตทุกเซตที่ไม่ได้มีตัวเองเป็นสมาชิก จะพบปัญหาคือเซตนั้นมีตนเองเป็นสมาชิกหรือไม่ นั่นคือสามารถสร้างเซต

$$B = \{x : x \notin x\}$$

ลักษณะนี้ได้หรือไม่ มีคำถามตามมาว่า B เป็นสมาชิกของ B หรือไม่ การตอบคำถามนี้ทำให้เกิด

$$B \in B \to B \notin B \qquad \text{และ} \qquad B \notin B \to B \in B$$

ทำให้เกิดข้อขัดแย้งแต่สมมูลกัน ซึ่งรู้จักกันในชื่อ **ปฏิทรรศน์รัสเซลล์ (Russull's paradox)** ดังนั้นไม่สามารถสร้างเซตของเซตที่มีสมาชิกเป็นตัวเองได้นั่นเอง

จากข้อขัดแย้งลักษณะที่ 2 ทำให้นักคณิตศาสตร์ตื่นตัวที่จะหาวิธีแก้ไข ในที่สุดได้มีผู้พยายามนำการศึกษาระบบสัจพจน์มาใช้แทนทฤษฎีเซตทำให้ขจัดปัญหาดังกล่าวไปได้ เรียกการศึกษาทฤษฎีเซตในลักษณะนี้ว่า **ระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซต (axiomatic set theory)** ที่ใช้กันแพร่หลายมี 2 ระบบคือ

1. **ระบบของแซร์มิโล**
   แซร์มิโล (Ernst Zermelo : 1871–1953) นักคณิตศาสตร์ชาวเยอรมัน ได้ตั้งระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตขึ้น โดยไม่อนุญาตให้การรวมกันอยู่ของเซตทั้งหมดอยู่ในระบบโดยการกำหนดว่า " การรวมของสิ่งจะเป็นเซตก็ต่อเมื่อ สิ่งต่างๆของการรวมกันอยู่นั้นเป็นสิ่งที่ถูกเลือก หรือถูกแบ่งมาจากการรวมกันอยู่หรือเซตที่มีอยู่ก่อนแล้วในระบบ เฉพาะสิ่งที่สอดคล้องกับสมบัติที่กำหนดขึ้นมาใหม่สมบัติหนึ่ง " นั่นคือจะกล่าวถึงเซตที่เป็นสับเซตของอีกเซตหนึ่งเสมอ ซึ่งเรียกว่าการกำหนด **เอกภพสัมพัทธ์ (universe)** ระบบแซร์มิโลเป็นที่นิยมอย่างกว้างขวาง อย่างไรก็ตามระบบนี้เกิดก่อนระบบตรรกศาสตร์เชิงสัญลักษณ์ ทำให้ยากต่อการเข้าใจในเวลาต่อมา เฟอร์นเคล (Fraenkel) และสโคเลน (Skolen) ได้เพิ่มเติมและดัดแปลงระบบแซร์มิโลในรูปภาษาตรรกศาสตร์ และได้รับความนิยมสูงสุดชื่อ " ระบบสัจพจน์ของแซร์มิโลและเฟอร์นเคล"

2. **ระบบของนอยมันน์**
   จอห์น ฟอน นอยมันน์ (John von Neumann : 1903–1957) เป็นนักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกันเชื้อสายฮังการี เป็นอีกคนที่พยายามกำหนดระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตขึ้น ส่วนใหญ่ในระบบนอยมันน์สอดคล้องกับระบบของแซร์มิโล นอกจากส่วนที่กล่าวว่า " สิ่งที่มีลักษณะเดียวกับเซตแต่มีขนาดมหาศาล จะถูกเรียกในชื่อที่ต่างกันว่า พวก หมู่ หรือ กลุ่ม (class or family) เป็นต้น " นั่นคือนอยมันน์แก้ไขความขัดแย้งที่เกิดขึ้นในทฤษฎีเซตของคันทอร์

ด้วยการกำหนดให้มีบ้าง "พวก" หรือบาง "หมู่" ซึ่งมีขนาดใหญ่เกิดกว่าจะเป็นเซตได้ ดังนั้น การรวมกันของทุก ๆ เซตจึงไม่เป็นเซต แต่หากเป็น "พวกของทุก ๆ เซต" เป็นต้น ระบบนอยมันน์เป็นที่นิยมในกลุ่มคนที่สนใจศึกษาเกี่ยวกับเซตที่ขนาดใหญ่มหาศาล เช่น หมู่ของจำนวนเชิงอันดับที่ เป็นต้น

เนื่องจากข้อขัดแย้งต่าง ๆ เกิดขึ้นเฉพาะกรณีเซตที่ขนาดใหญ่มหาศาลเท่านั้น ดังนั้นในสาขาใดที่ไม่เกี่ยวข้องกับจำนวนขนาดใหญ่ จึงยังคงยอมรับและศึกษาทฤษฎีเซตของคันทอร์ในรูปแบบเดิม หรือรูปแบบที่ไม่เกี่ยวกับระบบสัจพจน์ ซึ่งเรียกว่า **ทฤษฎีเซตไร้รูปสัจพจน์ (Naive set theory)** แต่ในวิชานี้เราจะศึกษาระบบของแซร์มิโล เนื่องจากต้องศึกษาเซตที่มีขนาดใหญ่โตมหาศาล

คันทอร์ได้ให้คำจำกัดความของเซตว่า คือกลุ่มของสิ่งซึ่งมีสมบัติบางประการคล้ายกัน และสิ่งของดังกล่าวนั้นเรียกว่า **สมาชิก (element)** ดังนั้นระบบสัจพจน์ของทฤษฎีเซตจึงกำหนดให้ "สมาชิก" และ "เป็นสมาชิก" เป็นอนิยาม และเป็นความสัมพันธ์อนิยาม ตามลำดับ

เมื่อกำหนดเซตใด ๆ ก็ตามมาให้ เราต้องบอกได้ว่า อะไรเป็นสมาชิกหรือไม่เป็นสมาชิกของเซตได้เสมอ นั่นคือ ประพจน์

.... เป็นสมาชิก ....

เป็นจริงหรือเป็นเท็จอย่างใดอย่างหนึ่ง เมื่อเติมสมาชิก และเซตในช่องว่างตามลำดับ ถ้าประพจน์ดังกล่าวเป็นจริง

สำหรับสมาชิก x และเซต A เขียนแทนด้วย $x \in A$

ในทำนองเดียวกันเขียน $\neg(x \in A)$ เขียนแทนด้วย $x \notin A$ หมายถึง x ไม่เป็นสมาชิกของ A

ตัวอย่าง 2.1.1 จงตรวจสอบว่า 1, $\{1\}$ และ $\{1, \{1\}\}$ เป็นสมาชิกของเซตต่อไปนี้หรือไม่

1. $A = \{1\}$
2. $B = \{1, \{1\}\}$
3. $C = \{\{1\}\}$

เซตที่มีแนวคิดของการนำสิ่งต่าง ๆ ที่มีลักษณะเดียวกัน การเขียนเซตจึงนิยมเขียนในรูปสมบัติที่กำหนดให้ ถ้า p เป็นสัญลักษณ์แทนสมบัติดังกล่าว แล้ว $p(x)$ หมายถึงข้อความซึ่ง x สอดคล้องกับ p โดยที่ x เป็นตัวแปรแทนสมาชิกของเซต ดังนั้นจะได้ประโยคเปิด

$$p(x) : x \text{ มีสมบัติ } p$$

เราสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนเซตของสมาชิกที่สอดคล้องสมบัติ p ได้ด้วยสัญลักษณ์ดังนี้

$$\{x : p(x)\}$$

ตัวอย่าง 2.1.2 จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

1. เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10 และ 3 หารลงตัว

2. เซตของเลขฐานสิบสามหลักที่สร้างจากเลขโดด $1, 2$ และ 3 โดยแต่ละหลักไม่ซ้ำกัน

3. เซตประเทศสมาชิกประชาคมอาเซียน (AEC)

4. เซตของคู่อันดับที่เกิดจาก $1, 2$ และ 3

5. เซตเลขฐานสองที่มี 3 หลัก

บางครั้งเราทราบสมาชิกทั้งหมดของเซตอาจเขียนด้วยการแจกแจงสมาชิกได้ตัวอย่าง

$$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13\}$$

นั่นคือ $\{x : x$ เป็นจำนวนคี่บวกที่ไม่เกิน $14\}$ สรุปได้ว่าการเขียนเซตประกอบด้วย 2 วิธีคือ

1. **วิธีแจกแจงสมาชิก (Tabular form)** การเขียนเซตแบบแจกแจงสมาชิก คือการเขียนเซตโดยเขียนสมาชิกลงในเครื่องหมายวงเล็บปีกกา และใช้เครื่องหมายจุลภาค คั่นระหว่างสมาชิกแต่ละตัว ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\}, \{4, 5, 6\}$ และ $\{a, b, c\}$ เป็นต้น มีข้อตกลงในการเขียนดังนี้

   (ก) ถ้าสมาชิกในเซตซ้ำกันจะเขียนสมาชิกตัวนั้นเพียงครั้งเดียว เช่น $\{1, 1, 2, 3\}$ เขียนแทนด้วย $\{1, 2, 3\}$

   (ข) สมาชิกในเซตเดียวกันสามารถเขียนลำดับแบบใดก็ได้ซึ่งความหมายของเซตนั้นไม่เปลี่ยนแปลง เช่น $\{1, 2, 3\}$ เขียนเป็น $\{3, 1, 2\}$ หรือ $\{2, 1, 3\}$ ก็ได้ ถือว่าทั้ง 3 เซตเป็นเซตเดียวกัน

(ค) สำหรับเซตที่มีสมาชิกจำนวนมากและบอกสมาชิกที่ตามมาได้แน่ชัด เขียน ... แทนด้วยสมาชิกลำดับถัดไปจนถึงตัวสุดท้าย ตัวอย่างเช่น

$$\{1, 2, 3, ..., 10\} \text{ หมายถึง } \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

ทำนองเดียวกับสำหรับเซตที่มีสมาชิกไม่มีที่สิ้นสุด เช่น $\{1, 2, 3, ...\}$ หมายถึงเซตที่ประกอบด้วยสมาชิก $1, 2, 3$ และลำดับถัดไปไม่มีที่สิ้นสุด

2. **วิธีบอกเงื่อนไขของสมาชิก** (Set builder form) การเขียนเซตแบบบอกเงื่อนไขประกอบด้วย 2 ส่วน ส่วนแรกหมายถึงสมาชิก และส่วนที่สองคือเงื่อนไขของสมาชิก โดยมีเครื่องหมาย : คั่นระหว่างสองส่วนนั้น อ่านว่า "โดยที่"

$$A = \{ \text{ สมาชิก } : \text{ เงื่อนไขของสมาชิก } \}$$

ตัวอย่างเช่น $A = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $5\}$ และเขียนแจกแจงสมาชิกได้เป็น $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

ข้อสังเกต 2.1.3 การเขียนเซตแต่ละชนิดมีข้อสังเกตดังนี้

1. เซตที่เขียนโดยวิธีแจกแจงสมาชิกจะสามารถเขียนโดยวิธีบอกเงื่อนไขสมาชิกได้ แต่ในบางเซตที่เขียนโดยวิธีบอกมีเงื่อนไขสมาชิกไม่สามารถเขียนโดยวิธีแจกแจงสมาชิกได้ เช่น

$$\{x : x \text{ เป็นจำนวนอตรรกยะที่อยู่ระหว่าง } 0 \text{ ถึง } 1\}$$

2. การเขียนเซตแบบมีเงื่อนไขเขียนได้หลายรูปแบบขึ้นอยู่กับผู้เขียน ตัวอย่างเช่น $\{x : x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า $5\}$ หรือ $\{x : x$ เป็นจำนวนเต็มที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง $6\}$ หมายถึงเซตเดียวกันคือ $\{1, 2, 3, 4, 5\}$

ตัวอย่าง 2.1.4 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10 ที่ 3 หารไม่ลงตัว $\}$

2. $B = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $x^2 = 4\}$

3. $C = \{(x, y) : x, y$ เป็นจำนวนนับซึ่ง $x + y = 5\}$

4. $D = \{x : x$ เป็นจำนวนนับที่หารด้วย 2 ลงตัว $\}$

5. $E = \{$ จังหวัด : จังหวัดในประเทศไทยที่มีพยางค์เดียว $\}$

ตัวอย่าง 2.1.5 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบมีเงื่อนไข

1. $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

2. $B = \{10, 20, 30, 40\}$

3. $C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49\}$

4. $D = \{$ทิศเหนือ, ทิศใต้, ทิศตะวันออก, ทิศตะวันตก$\}$

ตัวอย่าง 2.1.6 จงเขียนเซตต่อไปนี้แบบมีเงื่อนไข

1. $A = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, ...\right\}$

2. $B = \{1, 11, 111, 1111, ...\}$

แบบฝึกหัด 2.1

1. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปสัญลักษณ์

    1.1 เซตของจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่า 10

    1.2 เซตของจำนวนจริงที่อยู่ระหว่าง 0 ถึง 1

    1.3 เซตของจำนวนตรรกยะที่มากกว่า 5

    1.4 เซตของจำนวนคู่ที่หารด้วย 3 ลงตัว

    1.5 เซตของสีธงชาติไทย

    1.6 เซตของอักษรภาษาอังกฤษที่เป็นสระ

    1.7 เซตของจังหวัดในประเทศไทยที่ติดชายแดน

2. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

    2.1 $\{x : x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า $7\}$

    2.2 $\{x : x$ เป็นจำนวนคู่ที่หารด้วย 3 ลงตัว $\}$

    2.3 $\{x^2 : x$ เป็นจำนวนนับที่น้อยกว่า $3\}$

    2.4 $\{(x, y) : x, y$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $|x| + |y| = 1\}$

    2.5 $\{(x, y, z) : x, y, z$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $x + y + z < 5\}$

    2.6 $\{x + y : x, y$ เป็นจำนวนเต็มบวกซึ่ง $xy = 12\}$

    2.7 $\{(x, y) : x, y$ เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $xy = 36 + x\}$

3. จงเขียนเซตต่อไปนี้ในรูปแบบมีเงื่อนไข

    3.1 $\{1, 3, 5, 7, 9\}$

    3.2 $\{-2, 0, 2, 4, 6, 8\}$

    3.3 $\{1, 8, 27, 64\}$

    3.4 $\{14, 41, 23, 32\}$

    3.5 $\{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$

    3.6 $\{HH, HT, TH, TT\}$

    3.7 $\{ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA\}$

    3.8 $\{0.1, 0.01, 0.001, ...\}$

    3.9 $\left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16}, ...\right\}$

    3.10 $\{0.1, 0.12, 0.123, 0.1234, ...\}$

    3.11 $\{1, 2, 6, 24, 120, ...\}$

2.2 สัจพจน์การเท่ากัน

สัจพจน์ 2.2.1 The Existential Axiom
มีเซตอย่างน้อยหนึ่งเซต

สัจพจน์ 2.2.2 The Axiom of Extensionality
เซตสองเซตเท่ากันก็ต่อเมื่อเซตทั้งสองต่างมีสมาชิกเหมือนกัน หรือมีสมาชิกชุดเดียวกัน

$$\forall x\,\forall y\,[\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \in y) \to (x = y)]$$

จะกล่าวได้ว่าเซต A และ B มีสมาชิกชุดเดียวกัน หมายความว่าทุก ๆ สมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ B และในทางกลับกันทุก ๆ สมาชิกของ B เป็นสมาชิกของ A เขียนแทนด้วย $A = B$ จะได้ว่า

$$\begin{array}{lcl} A = B & \leftrightarrow & \forall x\,(x \in A \leftrightarrow x \in B) \\ A = B & \leftrightarrow & \forall x\,[(x \in A \to x \in B) \land (x \in B \to x \in A)] \\ A \neq B & \leftrightarrow & \exists x\,[(x \notin A \land x \in B) \lor (x \in A \land x \notin B)] \end{array}$$

ตัวอย่าง 2.2.3 จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1. $\{0, 1\}$ และ $\{1, 0\}$
2. $\{0, \{1\}\}$ และ $\{1, 0\}$
3. $\{0, \{1\}, \{2\}\}$ และ $\{1, \{2\}, 0\}$
4. $\{0, 1, \{0, 1\}\}$ และ $\{\{1, 0\}, 1, 0\}$

ตัวอย่าง 2.2.4 จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เท่ากันหรือไม่

1. $\{x \in \mathbb{N} : x < 3\}$ และ $\{|x| : x \in \mathbb{Z},\, x^2 + 3x + 2 = 0\}$
2. $\{x \in \mathbb{R} : |x| = x^3\}$ และ $\{x \in \mathbb{R} : x^3 = x\}$

ทฤษฎีบท 2.2.5 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A = A$ กฎสะท้อน (Reflexive law)
2. ถ้า $A = B$ แล้ว $B = A$ กฎสมมาตร (Symmetric law)
3. ถ้า $A = B$ และ $B = C$ แล้ว $A = C$ กฎการถ่ายทอด (Transitive law)

ทฤษฎีบท 2.2.6 ให้ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นเซต เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ จะได้ว่า

ถ้า $(A_1 = A_2) \wedge (A_2 = A_3) \wedge ... \wedge (A_{n-1} = A_n)$ แล้ว $A_1 = A_n$

สัจพจน์ 2.2.7 The Axiom of Specification
สำหรับแต่ละเซต A และคุณสมบัติ p จะมีเซต B ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกของเซต A ที่สอดคล้องสมบัติ p

$$\forall A \, \exists B \, [x \in B \leftrightarrow x \in A \wedge p(x)]$$

ตัวอย่าง 2.2.8 ให้ $A = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ จงสร้างเซต B โดยใช้สัจพจน์ 2.2.7 เมื่อกำหนดสมบัติดังต่อไปนี้

1. $p(x) : x$ เป็นจำนวนคู่

2. $p(x) : x$ เป็นจำนวนคี่

3. $p(x) : x^2 = x$

ทฤษฎีบท 2.2.9 ไม่มีเซต A ใด ๆ ที่สอดคล้อง

ทุก ๆ เซต x ซึ่ง $x \in A$

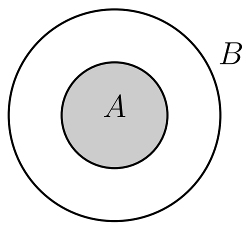
ทฤษฎีบท 2.2.10 มีเซตที่ไม่มีสมาชิกเพียงเซตเดียวเท่านั้น

บทนิยาม 2.2.11 เซตในทฤษฎีบท 2.2.10 เรียกว่า **เซตว่าง** (empty set **หรือ** null set) เขียนแทนด้วย $\varnothing$ หรือ $\{\}$

บทนิยาม 2.2.12 ให้ A และ B เป็นเซต แล้ว A เป็น **สับเซต** (subset) ของ B เขียนแทนด้วย $A \subseteq B$ หรือเรียกว่า B เป็น**ซูเปอร์เซต** (super set) ของ A เขียนแทนด้วย $B \supseteq A$ ถ้าสมาชิกทุก ๆ ตัวใน A เป็นสมาชิกใน B ถ้า $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$ ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $A \subset B$ เรียกว่า A เป็น **สับเซตแท้** (proper subset) ของ B

$$A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\,[x \in A \to x \in B]$$
$$A \nsubseteq B \leftrightarrow \exists x\,[x \in A \land x \notin B]$$
$$A \subset B \leftrightarrow A \subseteq B \land A \neq B$$

เขียน $A \subseteq B$ แทนด้วยแผนภาพดังนี้



ตัวอย่าง 2.2.13 จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เป็นสับเซตของ $A = \{0, 1, \{1\}, \{0, 1\}\}$

1. $\{0, 1\}$
2. $\{1, \{1\}\}$
3. $\{\{1\}\}$
4. $\{\{0\}\}$

ตัวอย่าง 2.2.14 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ จงหาสับเซตของ A ทั้งหมด ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

1. มีสมาชิกตัวเดียว

2. มีสมาชิก 2 ตัว

3. มีสมาชิก 2 ตัวซึ่งผลคูณน้อยกว่า 6

4. มีสมาชิก 3 ตัวซึ่งผลบวกเท่ากับ 9

ตัวอย่าง 2.2.15 จงเติมความสัมพันธ์ $\in$, $\notin$, $\subseteq$, $\nsubseteq$, $\subset$, $\not\subset$ ในช่องว่างต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

$$\begin{array}{lcl} \{1,2\} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \{1,2,3\} \\ \{\{1\}\} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \{1,2\} \\ \{1\} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \{1,\{1\},2\} \\ \{1,3\} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \{3,1\} \\ \{1,\{2\}\} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \{1,2\} \end{array}$$

ทฤษฎีบท 2.2.16 เซตว่างเป็นสับเซตของทุก ๆ เซต

ทฤษฎีบท 2.2.17 ให้ A, B และ C เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \subseteq A$ กฎการสะท้อน (Reflexive law)
2. ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว$A \subseteq C$ กฎการถ่ายทอด (Transitive law)

ทฤษฎีบท 2.2.18 ให้ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นเซต เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ จะได้ว่า

ถ้า $(A_1 \subseteq A_2) \wedge (A_2 \subseteq A_3) \wedge ... \wedge (A_{n-1} \subseteq A_n)$ แล้ว $A_1 \subseteq A_n$

ทฤษฎีบท 2.2.19 ให้ Aและ B เป็นเซต จะได้ว่า

$$A = B \text{ ก็ต่อเมื่อ } A \subseteq B \text{ และ } B \subseteq A$$

ทฤษฎีบท 2.2.20 สำหรับแต่ละเซต A ใด ๆ จะได้ว่า $A = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq \varnothing$

ตัวอย่าง 2.2.21 ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq C$ และ $C \subseteq A$ แล้ว $A = B = C$

ตัวอย่าง 2.2.22 จงยกตัวอย่างเซต A, B และ C ซึ่งสอดคล้อง $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ และ $C \subseteq B$

ตัวอย่าง 2.2.23 ให้ A เป็นเซตของจำนวนคู่ทั้งหมด และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มที่เกิดจากผลบวกของจำนวนคี่สองจำนวน จงแสดงว่า $A = B$

สัจพจน์ 2.2.24 The Axiom of Pairing for Sets
สำหรับเซต x และ y ใด ๆ จะมีเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกที่เป็น x และ y เท่านั้น

$$\forall x\,\forall y\,\exists z\,\forall w\,(w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$$

โดยสัจพน์ 2.2.7 จะเขียนเซตได้เป็น $\{x, y\}$ เนื่องจากอันดับการเขียนสมาชิกเซตไม่เกิดความแตกต่างกัน และเซตดังกล่าวมีสมาชิก 2 ตัว บางครั้งจึงเรียกว่า เซตไม่เป็นคู่อันดับ (unordered pair) หรือเซตคู่ ในกรณีที่ $x = y$ จะได้ว่าเซตนั้นมีสมาชิกเพียงตัวเดียวคือ

$$\{y\} = \{x \,:\, x = y\}$$

เรียกเซตที่มีสมาชิกเพียงตัวเดียวว่า **เซตเดี่ยว (singleton set)** หรือ **เซตหน่วย (unit set)**

ทฤษฎีบท 2.2.25 $\{x, y\}$ และ $\{x\}$ เป็นเซต

แบบฝึกหัด 2.2

1. ให้ $A = \{x \in \mathbb{Z} : 0 < |x| < 4\}$.จงหาสับเซตของ A ทั้งหมด ที่สอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

   1.1 เป็นเซตเดี่ยว

   1.2 มีสมาชิก 2 ตัว

   1.3 มีสมาชิก 3 ตัว และผลบวกเท่ากับ 0

   1.4 มีสมาชิก 2 ตัว ซึ่งผลคูณเป็นจำนวนบวก

   1.5 กำลังสองของสมาชิกมากกว่า 2

2. ให้ A และ B เป็นเซต จงแสดงว่ามีเซต P ซึ่ง $P = \{A, B\}$

3. ให้ $A = \{x : p(x)\}$ และ $B = \{x : q(x)\}$ จงแสดงว่า $A \subseteq B \leftrightarrow \forall x\,(p(x) \rightarrow q(x))$

4. ให้ $A_1, A_2, ..., A_n$ เป็นเซต เมื่อ $n \in \mathbb{N}$ และ $n \geq 2$ จงพิสูจน์ว่า

   ถ้า $(A_1 \subseteq A_2) \wedge (A_2 \subseteq A_3) \wedge ... \wedge (A_{n-1} \subseteq A_n) \wedge (A_n \subseteq A_1)$ แล้ว $A_1 = A_2 = ... = A_n$

5. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่า

   5.1 ถ้า $A = B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subseteq C$

   5.2 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B = C$ แล้ว $A \subseteq C$

   5.3 ถ้า $A \subset B$ และ $B \subseteq C$ แล้ว $A \subset C$

   5.4 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subset C$ แล้ว $A \subset C$

6. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่า ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \subseteq \varnothing$ แล้ว $A = \varnothing$

7. จงแสดงว่าเซตว่างไม่มีสับเซตแท้

8. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงตรวจสอบประพจน์ต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จพร้อมพิสูจน์

   8.1 ถ้า $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$ แล้ว $B \subseteq C$

   8.2 ถ้า $A \subseteq B$ และ $B \nsubseteq C$ แล้ว $A \nsubseteq C$

9. จงแสดงว่า ถ้า $A \in B$ แล้ว$\{A\} \subseteq B$

10. ให้ $A = \{n : n = 2k + 2, k \in \mathbb{Z}\}$ และ $B = \{m : m = 2p + 4, p \in \mathbb{Z}\}$ จงแสดงว่า $A = B$

11. ให้ $A = \{2n + 1 : n \in \mathbb{Z}\}$ และ $B = \{2n + 3 : n \in \mathbb{Z}\}$ จงแสดงว่า $A = B$

12. จงแสดงว่า $\{3n + 1 : n \in \mathbb{Z}\} = \{3n + 4 : n \in \mathbb{Z}\}$

13. ให้ A เป็นเซตของจำนวนคี่ทั้งหมด และ B เป็นเซตของจำนวนเต็มที่เกิดจากผลบวกของจำนวนคี่และจำนวนคู่ จงแสดงว่า $A = B$

2.3 สัจพจน์เกี่ยวกับการดำเนินการ

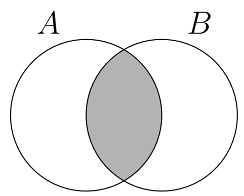
ทฤษฎีบท 2.3.1 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B)$$

บทนิยาม 2.3.2 เซต C ในทฤษฎีบท 2.3.1 เรียกว่า **อินเตอร์เซกชัน (intersection)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cap B$ นั่นคือ

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\} \quad \text{หรือ} \quad x \in A \cap B \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \in B)$$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนั้น



ตัวอย่าง 2.3.3 จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\} \cap \{1, 2\}$
2. $\{1\} \cap \{1, \{1\}\}$
3. $\{0, 1\} \cap \{0, 1, \{0, 1\}\}$

ทฤษฎีบท 2.3.4 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$
2. $A \cap A = A$ กฎนิจพล (Idempotent law)
3. $A \cap B = B \cap A$ กฎการสลับที่ (Commutative law)
4. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ กาฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)

ทฤษฎีบท 2.3.5 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cap B \subseteq A$ และ $A \cap B \subseteq B$
2. $A \cap B = A$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

ทฤษฎีบท 2.3.6 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \subseteq B \cap C$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$ และ $A \subseteq C$
2. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $(A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

ทฤษฎีบท 2.3.7 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $A \subseteq B$ และ $C \subseteq D$ แล้ว $A \cap C \subseteq B \cap D$
2. ถ้า $A = B$ และ $C = D$ แล้ว $A \cap C = B \cap D$

ตัวอย่าง 2.3.8 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 2.3.7

ทฤษฎีบท 2.3.9 ให้ $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n$ เป็นเซต สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

1. ถ้า $A_1 \subseteq B_1 \wedge A_2 \subseteq B_2 \wedge ... \wedge A_n \subseteq B_n$ แล้ว $(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) \subseteq (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)$
2. ถ้า $A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2 \wedge ... \wedge A_n = B_n$ แล้ว $(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n) = (B_1 \cap B_2 \cap ... \cap B_n)$

สัจพจน์ 2.3.10 The Axiom of Union
ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะมีเซต C ที่สอดคล้องสมบัติเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B)$$

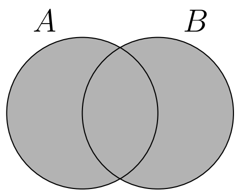
ทฤษฎีบท 2.3.11 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B)$$

บทนิยาม 2.3.12 เซต C ในทฤษฎีบท2.3.11 เรียกว่า **ยูเนียน (union)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \cup B$ นั่นคือ

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\} \quad \text{หรือ} \quad x \in A \cup B \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \vee x \in B)$$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนั้น



ตัวอย่าง 2.3.13 จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\} \cup \{1, 2\}$
2. $\{1\} \cup \{\{1\}\}$
3. $\{0, 1\} \cup \{0, \{1\}\}$

ทฤษฎีบท 2.3.14 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cup A = A$ กฎนิจพล (Idempotent law)
3. $A \cup B = B \cup A$ กฎการสลับที่ (Commutative law)
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ กฎการเปลี่ยนหมู่ (Associative law)

ทฤษฎีบท 2.3.15 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \subseteq A \cup B$ และ $B \subseteq A \cup B$
2. $A \cup B = B$ ก็ต่อเมื่อ $A \subseteq B$

ทฤษฎีบท 2.3.16 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า $A \subseteq B$ และ $C \subseteq D$ แล้ว $A \cup C \subseteq B \cup D$
2. ถ้า $A = B$ และ $C = D$ แล้ว $A \cup C = B \cup D$

ทฤษฎีบท 2.3.17 กฎการแจกแจง (Distributive law)
ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

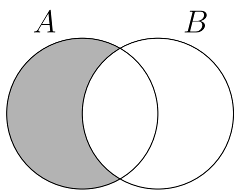
ทฤษฎีบท 2.3.18 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B)$$

บทนิยาม 2.3.19 เซต C ในทฤษฎีบท 2.3.18 เรียกว่า **ผลต่าง (different)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A - B$ นั่นคือ

$$A - B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\} \quad \text{หรือ} \quad x \in A - B \quad \leftrightarrow \quad (x \in A \wedge x \notin B)$$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนั้น



ตัวอย่าง 2.3.20 จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1\} - \{1, 2\}$
2. $\{1, \{1\}\} - \{1\}$
3. $\{1, 0\} - \{\{1\}, 0\}$

ทฤษฎีบท 2.3.21 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A - A = \varnothing$
2. $A - \varnothing = A$
3. $\varnothing - A = \varnothing$
4. $A - B \subseteq A$

ทฤษฎีบท 2.3.22 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $A - B = \varnothing$
2. ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $(A - C) \subseteq (B - C)$
3. ถ้า $A = B$ แล้ว $(A - C) = (B - C)$

ทฤษฎีบท 2.3.23 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
2. $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

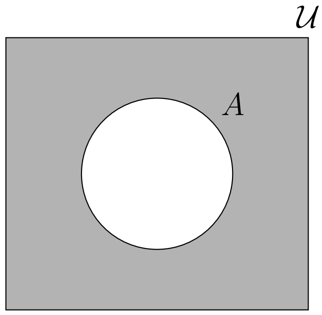
บทนิยาม 2.3.24 เอกภพสัมพัทธ์ (Universe) คือเซตที่ถูกกำหนดขึ้นโดยมีข้อตกลงว่าจะกล่าวถึงสิ่งที่เป็นสมาชิกของเซตนี้เท่านั้น และนิยมใช้ $\mathcal{U}$ แทนเอกภพสัมพัทธ์

บทนิยาม 2.3.25 ให้ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ และ A เป็นเซต แล้ว **ส่วนเติมเต็ม** (complement) ของ A เขียนแทนด้วย A^c นิยามโดย

$$A^c = \mathcal{U} - A = \{x : x \in \mathcal{U} \land x \notin A\}$$

นั่นคือ $x \in A^c \leftrightarrow (x \in \mathcal{U} \land x \notin A)$

เขียนแทนด้วยแผนภาพดังนั้น



ตัวอย่าง 2.3.26 กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$ จงหาผลลัพธ์ของเซตต่อไปนี้

1. $\{1, 2\}^c$
2. $\{1, \{1\}\}^c \cap \{2\}$
3. $\{\{1\}\}^c - \{1, \{2\}\}^c$

ทฤษฎีบท 2.3.27 ให้ A เป็นเซต และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

1. $(A^c)^c = A$
2. $\varnothing^c = \mathcal{U}$
3. $\mathcal{U}^c = \varnothing$
4. $A \cap A^c = \varnothing$
5. $A \cup A^c = \mathcal{U}$

ทฤษฎีบท 2.3.28 ให้ A และ B เป็นเซต และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

1. $A - B = A \cap B^c$
2. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $B^c \subseteq A^c$

ทฤษฎีบท 2.3.29 กฎเดอมอร์แกน (De Morgan's Law)
ให้ A และ B เป็นเซต และ $\mathcal{U}$ เป็นเอกภพสัมพัทธ์ จะได้ว่า

1. $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
2. $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

แบบฝึกหัด 2.3

1. กำหนดให้ $\mathcal{U} = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}, \{0\}, \{0, \varnothing\}\}$ จงหาผลลัพธ์ของเซต

    1.1 $\varnothing \cap \{\varnothing\}$

    1.2 $\{0\}^c \cup \{\varnothing\}^c$

    1.3 $\{\{\varnothing\}\} - \{\varnothing\}$

    1.4 $\{0, \varnothing\} \cap \{\{0, \varnothing\}\}$

    1.5 $\varnothing^c \cap \{0\}$

    1.6 $(\{0\}^c - \{\varnothing\})^c$

2. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

    2.1 $(A \cap B) \subseteq (A \cup B)$

    2.2 $A \cap (A \cup B) = A$

    2.3 $A \cup (A \cap B) = A$

    2.4 $(A - B) \cup A = A$

    2.5 $(A - B) \cup (A \cap B) = A$

    2.6 $(A - B) \cup B = A \cup B$

    2.7 $A - (A - B) = A \cap B$

    2.8 $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$

    2.9 $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

    2.10 $(A - B) \cup (C - D) = (A - D) \cap (C - B)$

    2.11 $A^c - B^c = B - A$

    2.12 $(A \cup B^c)^c = B - A$

    2.13 $A^c - (C \cup B^c) = B - (A \cup C)$

    2.14 $A \cap (B \cap C)^c = (A - B) \cup (A - C)$

3. ให้ A, B และ C เป็นเซตของจำนวนเต็มที่หารด้วย 6, 9 และ 15 ลงตัวตามลำดับ จงเขียนสมบัติของเซต

    3.1 $A \cap B \cap C$

    3.2 $A \cap (B \cup C)$

    3.3 $A \cup (B \cap C)$

4. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่ $A \subseteq A \cap B$ จงแสดงว่า

    4.1 $A \subseteq B$

    4.2 $A \cap B = A$

5. ให้ A และ B เป็นเซต โดยที่ $A \cup B \subseteq A$ จงแสดงว่า

    5.1 $B \subseteq A$

    5.2 $A \cup B = A$

6. ให้ A, B และ C เป็นเซต โดยที่ $A = B$ จงพิสูจน์ว่า

    6.1 $A \cap B = A$

    6.2 $A \cup B = A$

    6.3 $C \cap A = C \cap B$

    6.4 $C \cup A = C \cup B$

7. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า

    7.1 $A \subseteq (B \cap C) \leftrightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$

    7.2 $A \subseteq B \rightarrow (A \cap C) \subseteq (B \cap C)$

    7.3 $A = B \rightarrow A \cap C = B \cap C$

    7.4 $A \cap B = \varnothing \rightarrow A - B = A$

    7.5 $A \subseteq B \rightarrow (A - B) \cap C = \varnothing$

8. ให้ $A_1, A_2, ..., A_n, B_1, B_2, ..., B_n$ เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า สำหรับ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

   8.1 ถ้า $A_1 \subseteq B_1 \wedge A_2 \subseteq B_2 \wedge ... \wedge A_n \subseteq B_n$ แล้ว $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \subseteq (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n)$

   8.2 ถ้า $A_1 = B_1 \wedge A_2 = B_2 \wedge ... \wedge A_n = B_n$ แล้ว $(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = (B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n)$

9. ถ้าสับเซตแท้ทั้งหมดของ X คือ $\varnothing$, $\{\{1\}\}$ และ $\{2\}$ และ $Y = \{1, \{2\}\}$ จงหา $X \cap Y$

10. กำหนดให้ $A = \{a, \{a\}, \{b\}, \{b, c\}\}$ จงหาเซต

    10.1 $(A - \{b, c\}) \cup \{b\}$ 10.2 $(A - \{a, \{b\}\}) - \{a\}$

11. กำหนดให้ $A = \{x : x$ เป็นจำนวนนับที่หารด้วย 3 ลงตัว $\}$
    $B = \{x : x$ เป็นจำนวนับที่หารด้วย 4 ลงตัว $\}$
    $C = \{x : x$ เป็นจำนวนเต็ม และ $-100 \leq x \leq 100\}$
    แล้ว $A \cap B \cap C$ มีจำนวนสมาชิกเท่าใด

12. ให้ X และ Y เป็นเซตในเอกภพสัมพัทธ์ $\mathbb{Z}$ นิยาม

    $$X + Y = \{x + y : x \in X, y \in Y\} \quad \text{และ} \quad XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$$

    ถ้า $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 4\}$ จงหาเซตต่อไปนี้

    12.1 $A + B$ 12.3 $B + B$ 12.5 AB 12.7 $AB + BA$

    12.2 $A + A$ 12.4 $A + (A + B)$ 12.6 AA 12.8 $A(A + B)$

2.4 สัจพจน์ของเซตกำลัง

สัจพจน์ 2.4.1 The Axiom of Power set
ให้ A เป็นเซต แล้วจะมีเซต C ที่สอดคล้อง

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad x \subseteq A$$

ทฤษฎีบท 2.4.2 ให้ A เป็นเซต แล้วจะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad x \subseteq A$$

บทนิยาม 2.4.3 เซต C ในทฤษฎีบท 2.4.2 เรียกว่า **เซตกำลัง (power set)** ของ A เขียนแทนด้วย $\mathcal{P}(A)$ นั่นคือ

$$\mathcal{P}(A) = \{x : x \subseteq A\} \quad \text{หรือ} \quad x \in \mathcal{P}(A) \quad \leftrightarrow \quad x \subseteq A$$

ตัวอย่าง 2.4.4 จงหาเซตกำลังของ

1. $A = \{1, 2\}$
2. $B = \{\varnothing\}$
3. $C = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

ทฤษฎีบท 2.4.5 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \in \mathcal{P}(A)$
2. $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$
3. $\mathcal{P}(\varnothing) = \{\varnothing\}$

ตัวอย่าง 2.4.6 จงเขียน **แผนภาพเฮสเซ (Hasse diagram)** แสดงความสัมพันธ์ของสมาชิกในเซตกำลังของ $A = \{x, y, z\}$

ทฤษฎีบท 2.4.7 จำนวนสมาชิกของเซตกำลังของเซตที่มีสมาชิก n ตัว เท่ากับ 2^n ตัว

ตัวอย่าง 2.4.8 จงหาจำนวนสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ เมื่อกำหนดให้

1. $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 100$ และ $3 \mid x\}$

2. $A = \{x^2 : x \in \mathbb{Z}, |x| < 100$ และ $5 \mid x\}$

ทฤษฎีบท 2.4.9 ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \subseteq B$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$
2. $A = B$ ก็ต่อเมื่อ $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$
3. ถ้า $\mathcal{P}(A) \in \mathcal{P}(B)$ แล้ว $A \in B$

ตัวอย่าง 2.4.10 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 2.4.9 ข้อ 3

ทฤษฎีบท 2.4.11 ให้ A และ B เป็นเซต จะได้ว่า

1. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$
2. $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

ตัวอย่าง 2.4.12 จงยกตัวอย่างค้านบทกลับของทฤษฎีบท 2.4.11 ข้อ 2

สัจพจน์ 2.4.13 The Axiom of Regularity
ทุก ๆ เซต x ที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้วจะมีเซต y ที่เป็นสมาชิกของ x โดยที่ $x \cap y = \varnothing$ นั่นคือ

$$\forall x \left[\exists a \left(a \in x\right) \to \exists y \left(y \in x \wedge \neg \exists z \left(z \in x \wedge z \in y\right)\right)\right]$$

ทฤษฎีบท 2.4.14 สำหรับเซต A ใด ๆ จะได้ว่า $A \notin A$

ทฤษฎีบท 2.4.15 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า $A \notin B$ หรือ $B \notin A$

แบบฝึกหัด 2.3

1. ให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จงพิสูจน์ว่า

   1.1 $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A)$

   1.2 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$

   1.3 ถ้า $A \subseteq B$ แล้ว $\mathcal{P}(B^c) \subseteq \mathcal{P}(A^c)$

2. จงแจกแจงสมาชิกของ $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))$

3. จงแจกแจงสมาชิกของ $\mathcal{P}(A)$ เมื่อกำหนดให้

   3.1 $A = \{a, b\}$ 3.2 $A = \{4, 5, 6\}$ 3.3 $A = \{0, \varnothing, \{\varnothing\}\}$

4. ให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จ พร้อมทั้งพิสูจน์

   4.1 $\mathcal{P}(A^c) = \mathcal{P}(\mathcal{U}) - \mathcal{P}(A)$

   4.2 $\mathcal{P}(A - B) = \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B)$

   4.3 $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$

   4.4 $A - B = \varnothing \leftrightarrow \mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \varnothing$

   4.5 $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A - B) = \varnothing$

   4.6 $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$

   4.7 $\mathcal{P}(\{\varnothing\}) \cap \varnothing = \mathcal{P}(\varnothing)$

   4.8 $\mathcal{P}(A \cap B) - \mathcal{P}(A \cup B) = \varnothing$

   4.9 ถ้า $A - B = A$ แล้ว $\mathcal{P}(A \cap B) = \{\varnothing\}$

   4.10 ถ้า $A - B = B$ แล้ว $\mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$

   4.11 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $\mathcal{P}(A) - \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$

5. ถ้าสับเซตแท้ทั้งหมดของ A คือ $\varnothing$, $\{\{\varnothing\}\}$ และ $\{1\}$ จงหาเซตของ $\mathcal{P}(A) - A$

6. ถ้า $A = \{\varnothing, \{\varnothing\}, 0, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$ แล้วจำนวนสมาชิกของ $(\mathcal{P}(A) - A) \cup (A - \mathcal{P}(A))$ เท่ากับเท่าใด

7. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ กำหนดให้

$$X = \{\underline{xy} : \underline{xy} \text{ เป็นเลขสองหลัก } x, y \in A \text{ และ } x + y = 4\}$$

   จงหาจำนวนสับเซตทั้งหมดของ X

2.5 สัจพจน์ของเซตอนันต์

จากสัจพจน์ 2.2.2 (การเท่ากัน) สัจพจน์ 2.2.24 (เซตคู่) และสัจพจน์ 2.3.10 (ยูเนียน) ทำให้เกิดการสร้างเซตได้อย่างไม่มีที่สิ้นสุด เช่นเราทราบว่ามีเซตว่าง $\varnothing$ ดังนั้นจะเกิดเซต

$$\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\dots$$

ด้วยสัจพจน์ 2.4.1 (เซตกำลัง) เราก็อาจสร้างเซตได้ไม่มีที่สิ้นสุดเช่นกัน

$$\varnothing,\ \mathcal{P}(\varnothing),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)),\ \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing))),\dots$$

ในหัวข้อก่อนหน้านี้ยังไม่ได้กล่าวถึงการนำเซตเหล่านั้นมารวมกันยังเป็นเซตหรือไม่ ดังนั้นสำหรับหัวข้อนี้จะกล่าวถึงสัจพจน์ที่ทำให้การรวมกันของเซตเหล่านั้นยังคงเป็นเซตอยู่

บทนิยาม 2.5.1 สำหรับเซต x ใด ๆ จะเรียก $x\cup\{x\}$ ว่า **ตัวตามหลัง (successor)** ของ x เขียนแทนด้วย x^+ นั่นคือ

$$x^+ = x\cup\{x\}$$

และเรียก x ว่า **ตัวนำหน้า (presuccessor)** ของ x^+

ตัวอย่าง 2.5.2 จงหาตัวตามหลังต่อไปนี้

1. $\varnothing^+$
2. $\varnothing^{++}$
3. $\mathcal{P}(\varnothing)^+$

บทนิยาม 2.5.3 ถ้า A เป็นเซตที่สอดคล้องเงื่อนไข 2 ข้อคือ

1. $\varnothing\in A$
2. สำหรับเซต x ใด ๆ ถ้า $x\in A$ แล้ว $x^+\in A$

จะเรียก A ว่า **เซตของตัวตามหลัง (successor set)** หรือ **เซตอุปนัย (inductive set)**

หรือเขียนได้ว่า A เป็นเซตอุปนัย ก็ต่อเมื่อ $\varnothing\in A\wedge\forall x[x\in A\to x^+\in A]$

ข้อสังเกต 2.5.4 จะเห็นได้ว่าเซตอุปนัยเป็นเซตที่มีสมาชิกอยู่เป็นจำนวนนับไม่ถ้วน

สัจพจน์ 2.5.5 มีเซตอุปนัย

ทฤษฎีบท 2.5.6 มีเซตอนันต์ที่เล็กที่สุด

แบบฝึกหัด 2.5

1. จงหาเซตต่อไปนี้

   1.1 $\varnothing^{+++}$

   1.2 $(\varnothing^{+} \cup \varnothing^{++})^{+}$

   1.3 $\mathcal{P}(\varnothing)^{++}$

   1.4 $(\mathcal{P}(\varnothing) \cup \mathcal{P}(\varnothing)^{+})^{+}$

2. สำหรับเซต A และ B ใด ๆ พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมพิสูจน์

   2.1 $(A \cup B)^{+} = A^{+} \cup B^{+}$

   2.2 $(A \cap B)^{+} = A^{+} \cap B^{+}$

   2.3 $(A - B)^{+} = A^{+} - B^{+}$

   2.4 $(A^{+})^{+} = A$

3. ข้อความที่กล่าวว่า " ถ้า A เป็นเซตอุปนัย แล้ว $A \cup \{A\}$ เป็นเซตอุปนัย " เป็นจริงหรือไม่ เพราะเหตุใด

4. กำหนดให้ $A = \{x \cup \{x\} \,:\, x$ เป็นเซต $\}$ แล้ว $A \cup \{\varnothing\}$ เป็นเซตอุปนัยหรือไม่ จงพิสูจน์

บทที่ 3

ความสัมพันธ์

3.1 เซตของคู่อันดับ

จากสัจพจน์ 2.2.24 (เซตคู่) คือเซตไม่มีอันดับนั่นคือ $\{x, y\}$ ไม่แตกต่างกับ $\{y, x\}$ แต่การกล่าวถึง x และ y บางครั้งอาจจะให้ความหมายที่ต่างกัน นักคณิตศาสตร์จึงพยายามให้คำจำกัดความของ "คู่อันดับ (ordered pair)" ในปี 1914 วีเนอร์ (Wiener) นักคณิตศาสตร์ชาวอเมริกันได้ให้คำจำกัดความของคู่อันดับเป็นคนแรก โดยใช้

$$(x, y) \text{ แทนคู่อันดับ หมายถึง } \{\{\{x\}, \varnothing\}, \{\{y\}\}\}$$

และต่อมาในปี 1921 กูราตอฟสกี (Kuratowski) ชาวโปแลนด์ ได้พัฒนาสัญลักษณ์ (x, y) ให้ง่ายขึ้น โดยนิยามเป็น

$$(x, y) \text{ แทนคู่อันดับ หมายถึง } \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

สัจพจน์ 3.1.1 The Axiom of Pairing for Elements
สำหรับ a และ b ใด ๆ จะมีเซตซึ่งประกอบไปด้วยสมาชิกที่เป็น x และ y เท่านั้น

$$\forall a \, \forall b \, \exists y \, \forall x \, [x \in y \leftrightarrow (x = a \vee x = b)]$$

ทฤษฎีบท 3.1.2 สำหรับ a, b, c และ d ใด ๆ จะได้ว่า

$$\{a, b\} = \{c, d\} \qquad \leftrightarrow \qquad (a = c \wedge b = d) \vee (a = d \wedge b = c)$$

บทแทรก 3.1.3 สำหรับ a ใด ๆ จะได้ว่า $\{a, a\} = \{a\}$

บทแทรก 3.1.4 สำหรับ a และ b ใด ๆ จะได้ว่า $\{a\} = \{b\} \quad \leftrightarrow \quad a = b$

บทนิยาม 3.1.5 เรียกเซต $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ ว่า **คู่อันดับ (ordered pair)** ของ a และ b เขียนแทนด้วย (a, b) นั่นคือ

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

ทฤษฎีบท 3.1.6 สำหรับ a, b, c และ d ใด ๆ จะได้ว่า

$$(a, b) = (c, d) \quad \leftrightarrow \quad a = c \wedge b = d$$

ทฤษฎีบท 3.1.7 ให้ $a \in A$ และ $b \in B$ จะได้ว่า $(a,b) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$

ทฤษฎีบท 3.1.8 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่ามีเซต C เพียงเซตเดียวที่สอดคล้องเงื่อนไข

$$x \in C \quad \leftrightarrow \quad \exists a\, \exists b\, [a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a,b)]$$

บทนิยาม 3.1.9 เซต C ในทฤษฎีบท 3.1.8 เรียกว่า **ผลคูณคาร์ทีเซียน (Cartesian product)** ของ A และ B เขียนแทนด้วย $A \times B$ นั่นคือ

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

หรือกล่าวได้ว่า

$$\begin{aligned} x \in A \times B \quad &\leftrightarrow \quad \exists a \in A \exists b \in B[x = (a,b)] \\ (a,b) \in A \times B \quad &\leftrightarrow \quad a \in A \wedge b \in B \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 3.1.10 ให้ $A = \{1,2\}$ และ $B = \{3,4\}$ จงหา

1. $A \times B$
2. $B \times A$
3. $A \times A$
4. $B \times B$

ตัวอย่าง 3.1.11 ให้ $A = \{1, 2, 3, ..., 15\}$ และ $B = \{5, 6, 7, ..., 20\}$
จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in A \times B \,:\, y = 2x + 1\}$
2. $\{(x, y) \in A \times A \,:\, y + x = 6\}$
3. $\left\{(x, y) \in B \times A \,:\, y = \dfrac{x}{2} - 1\right\}$
4. $\{(x, y) \in B \times B \,:\, yx = x + 15\}$

ตัวอย่าง 3.1.12 จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

1. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x + y = xy\}$
2. $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, xy = x + 6\}$
3. $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, yx + y = x + 11\}$
4. $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, y^2 + x^2 + 2 = 2x - 2y\}$

ทฤษฎีบท 3.1.13 สำหรับเซต A และ B ใดๆ จะได้ว่า

$$A \times B = \varnothing \quad \leftrightarrow \quad A = \varnothing \vee B = \varnothing$$

ทฤษฎีบท 3.1.14 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ สมมติว่า $A \subseteq B$ แล้ว

1. $(A \times C) \subseteq (B \times C)$
2. $(C \times A) \subseteq (C \times B)$
3. $(A \times A) \subseteq (B \times B)$

ทฤษฎีบท 3.1.15 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ สมมติว่า $A \subseteq B$ แล้ว

1. $(A \times C) = (B \times C)$
2. $(C \times A) = (C \times B)$
3. $(A \times A) = (B \times B)$

ทฤษฎีบท 3.1.16 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ เมื่อ $C \neq \varnothing$ จะได้ว่า

1. $(A \times C) \subseteq (B \times C) \quad \rightarrow \quad A \subseteq B$
2. $(C \times A) \subseteq (C \times B) \quad \rightarrow \quad A \subseteq B$
3. $(A \times C) = (B \times C) \quad \rightarrow \quad A = B$
4. $(C \times A) = (C \times B) \quad \rightarrow \quad A = B$

ทฤษฎีบท 3.1.17 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A = B \quad \rightarrow \quad A \times B = B \times A$
2. $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \quad \rightarrow \quad (A \times C) \subseteq (B \times D)$
3. $A = B \wedge C = D \quad \rightarrow \quad (A \times C) = (B \times D)$

ทฤษฎีบท 3.1.18 ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ ที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

1. $A \times B = B \times A \quad \rightarrow \quad A = B$
2. $(A \times C) \subseteq (B \times D) \quad \rightarrow \quad A \subseteq B \wedge C \subseteq D$
3. $(A \times C) = (B \times D) \quad \rightarrow \quad A = B \wedge C = D$

ทฤษฎีบท 3.1.19 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
2. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

บทแทรก 3.1.20 ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $B \cap C = \varnothing$ แล้ว $(A \times B) \cap (A \times C) = \varnothing$

แบบฝึกหัด 3.1

1. ให้ $A = \{1, 2, 3, ..., 20\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8, ..., 40\}$ จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   1.1 $\{(x, y) \in A \times B \,:\, y = 2x + 1\}$

   1.2 $\{(x, y) \in A \times A \,:\, y + x = 7\}$

   1.3 $\left\{(x, y) \in B \times A \,:\, y = \dfrac{x}{2} + 1\right\}$

   1.4 $\{(x, y) \in B \times B \,:\, yx = x + 36\}$

2. จงแจกแจงสมาชิกของเซตต่อไปนี้

   2.1 $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x + y < 5\}$

   2.2 $\{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, xy = 3x + 12\}$

   2.3 $\{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, yx + y = x + 13\}$

   2.4 $\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, y^2 + x^2 - 2x + 4y + 5 = 0\}$

3. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

   3.1 $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$

   3.2 $(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$

   3.3 $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$

   3.4 $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

4. สมมติว่า $a = b$ จงพิสูจน์ว่า $(a, b) = \{\{a\}\}$

5. จงพิสูจน์ว่า $\{a\} \times \{a\} = \{\{\{a\}\}\}$

6. จงพิสูจน์ว่า ถ้า $a \notin A$ แล้ว $(a, b) \notin A \times B$

7. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ ซึ่ง $A \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า

   7.1 $A \times B \subseteq B \times B$

   7.2 $B \times A \subseteq B \times B$

   7.3 $A \times A \subseteq B \times A$

   7.4 $A \times A \subseteq B \times B$

8. ให้ A และ B เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จงแสดงว่า

$$(A \times B)^c = (A^c \times B^c) \cup (A^c \times B) \cup (A \times B^c)$$

9. ให้ A, B, C และ D เป็นเซตใด ๆ จงพิสูจน์ว่า

   9.1 $A \subseteq B \wedge C \subseteq D \quad \rightarrow \quad C \times A \subseteq D \times B$

   9.2 $A = B \wedge C = D \quad \rightarrow \quad C \times A = D \times B$

10. ให้ A, B และ C เป็นสับเซตของเอกภพสัมพัทธ์ $\mathcal{U}$ จงตรวจสอบว่าข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเป็นเท็จพร้อมพิสูจน์

    10.1 $(A^c \times B^c)^c = (A \times B)$

    10.2 $A \times B = B \times A \quad \rightarrow \quad A = B$

    10.3 $A \times C = B \times C \quad \rightarrow \quad A = B$

    10.4 $A \times C = B \times C \quad \rightarrow \quad A = B$

3.2 ความสัมพันธ์

บทนิยาม 3.2.1 เรียกเซต r ว่า **ความสัมพันธ์ (relation)** ก็ต่อเมื่อ

$$\forall z[z \in r \to \exists x \exists y[z = (x, y)]]$$

ทฤษฎีบท 3.2.2 เซตว่างเป็นความสัมพันธ์

ข้อสังเกต 3.2.3 ในกรณีที่ $r \neq \varnothing$ เรากล่าวได้ว่า

r ว่าความสัมพันธ์ ก็ต่อเมื่อ r เป็นเซตของคู่อันดับ

ทฤษฎีบท 3.2.4 ผลคูณคาร์ทีเซียน $A \times B$ เป็นความสัมพันธ์

ทฤษฎีบท 3.2.5 สับเซตของความสัมพันธ์เป็นความสัมพันธ์

ทฤษฎีบท 3.2.6 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $r \cap s$ เป็นความสัมพันธ์
2. $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์
3. $r - s$ เป็นความสัมพันธ์

บทนิยาม 3.2.7 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ แล้ว **โดเมน (domain)** ของ r เขียนแทนด้วย Dom(r) นิยามโดย

$$\text{Dom}(r) = \{x : (x, y) \in r\}$$

และ **เรจน์ (range)** ของ r เขียนแทนด้วย $Ran(r)$ นิยามโดย

$$\text{Ran}(r) = \{y : (x, y) \in r\}$$

ข้อสังเกต 3.2.8 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

1. Dom$(\varnothing) = \varnothing$ และ Ran$(\varnothing) = \varnothing$
2. Dom$(A \times B) = A$ และ Ran$(A \times B) = B$

ตัวอย่าง 3.2.9 จงหาโดเมนและเรจน์ ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

1. $r = \{(1, 2), (3, 4), (2, 3)\}$
2. $s = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \, : \, x + y = 5\}$

ทฤษฎีบท 3.2.10 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. Dom$(r \cap s) \subseteq$ Dom(r) และ Ran$(r \cap s) \subseteq$ Ran(r)
2. Dom$(r) \subseteq$ Dom$(r \cup s)$ และ Ran$(r) \subseteq$ Ran$(r \cup s)$
3. Dom$(r - s) \subseteq$ Dom(r) และ Ran$(r - s) \subseteq$ Ran(r)

ทฤษฎีบท 3.2.11 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(r \cap s) \subseteq \text{Dom}(r) \cap \text{Dom}(s)$ และ $\text{Ran}(r \cap s) \subseteq \text{Ran}(r) \cap \text{Ran}(s)$
2. $\text{Dom}(r) - \text{Dom}(s) \subseteq \text{Dom}(r - s)$ และ $\text{Ran}(r) - \text{Ran}(s) \subseteq \text{Ran}(r - s)$

ทฤษฎีบท 3.2.12 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(r \cup s) = \text{Dom}(r) \cup \text{Dom}(s)$
2. $\text{Ran}(r \cup s) = \text{Ran}(r) \cup \text{Ran}(s)$

บทนิยาม 3.2.13 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ แล้ว **ความสัมพันธ์ผกผัน** (inverse relation) ของ r เขียนแทนด้วย r^{-1} นิยามโดย

$$r^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in r\}$$

ข้อสังเกต 3.2.14 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

1. $\varnothing^{-1} = \varnothing$
2. $(A \times B)^{-1} = B \times A$
3. $(A \times A)^{-1} = A \times A$

ตัวอย่าง 3.2.15 จงหาความสัมพันธ์ผกผันของ

1. $r = \{(1, 0), (0, 1), (1, 3)\}$
2. $s = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$

ทฤษฎีบท 3.2.16 สำหรับความสัมพันธ์ r ใด ๆ จะได้ว่า $(r^{-1})^{-1} = r$

ทฤษฎีบท 3.2.17 ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

1. $(r \cup s)^{-1} = r^{-1} \cup s^{-1}$
2. $(r \cap s)^{-1} = r^{-1} \cap s^{-1}$
3. $(r - s)^{-1} = r^{-1} - s^{-1}$

ทฤษฎีบท 3.2.18 สำหรับความสัมพันธ์ r ใด ๆ จะได้ว่า

1. $\text{Dom}(r^{-1}) = \text{Ran}(r)$
2. $\text{Ran}(r^{-1}) = \text{Dom}(r)$

บทนิยาม 3.2.19 ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ เรียก r ว่าความสัมพันธ์จาก A ไป B ถ้า

$$r \subseteq A \times B$$

ในกรณีที่ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป A จะเรียกว่าความสัมพันธ์บน A

บทนิยาม 3.2.20 ให้ r เป็นความสัมพันธ์ ถ้า $(x, y) \in r$ เขียนแทนได้ด้วย $x\ r\ y$

บทนิยาม 3.2.21 ให้ i_A เป็นความสัมพันธ์บนเซต A และนิยามโดย

$$i_A = \{(a, a)\ :\ a \in A\}$$

เรียก i_A ว่า **ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ (identity relation)**

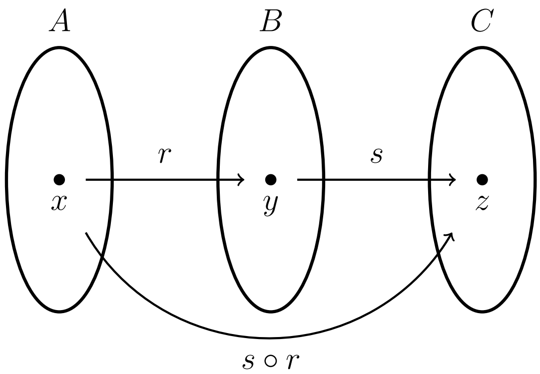
ตัวอย่าง 3.2.22 จงหาความสัมพันธ์จาก A ไป B ทั้งหมด
เมื่อกำหนดให้ $A = \{1, 2\}$ และ $B = \{3, 4\}$

ตัวอย่าง 3.2.23 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงแจกแจงสมาชิกของความสัมพันธ์บน A

1. ความสัมพันธ์ "เท่ากับ"
2. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"
3. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"

บทนิยาม 3.2.24 ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C **ความสัมพันธ์ r ประกอบกับ s** (r composed with s) จะเขียนแทนด้วย $s \circ r$ คือความสัมพันธ์จาก A ไป C กำหนดโดย

$$s \circ r = \{(x, z) \in A \times C \,:\, \exists y \in B,\, (x, y) \in r \wedge (y, z) \in s\}$$



ตัวอย่าง 3.2.25 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{3, 5, 6, 7\}$ และ $C = \{2, 4, 6, 8, 9\}$ ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B และ s เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป C ดังนี้

$$r = \{(1, 3), (3, 3), (3, 5), (4, 7)\} \text{ และ } s = \{(3, 2), (5, 4), (6, 6), (7, 9)\}$$

จงหา $s \circ r$

ตัวอย่าง 3.2.26 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ โดย r และ s เป็นความสัมพันธ์บนเซต A ดังนี้

$$r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\} \text{ และ } s = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 1), (5, 3)\}$$

จงหาความสัมพันธ์ต่อไปนี้

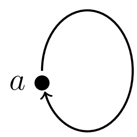
1. $r \circ s$
2. $s \circ r$
3. $r \circ r$
4. $(s \circ r)^{-1}$
5. $s^{-1} \circ r^{-1}$
6. $r^{-1} \circ s^{-1}$

ทฤษฎีบท 3.2.27 ให้ r, s และ t เป็นความสัมพันธ์ จะได้ว่า

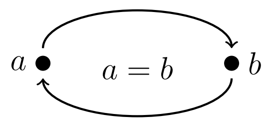
1. $(r \circ s)^{-1} = s^{-1} \circ r^{-1}$
2. $(r \circ s) \circ t = r \circ (s \circ t)$

บทนิยาม 3.2.28 ให้ A เป็นเซตใดๆ และ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะกล่าวว่า r มีสมบัติ

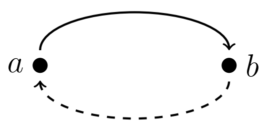
1. **สะท้อน** (reflexive) ก็ต่อเมื่อ $\forall a \in A, \quad a\,r\,a$
2. **สมมาตร** (symmetric) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b \in A, \quad a\,r\,b \to b\,r\,a$
3. **ปฏิสมมาตร** (antisymmetric) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b \in A, \quad (a\,r\,b \wedge b\,r\,a) \to a = b$
4. **ถ่ายทอด** (transitive) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b, c \in A, \quad (a\,r\,b \wedge b\,r\,c) \to a\,r\,c$
5. **เปรียบเทียบได้** (comparable) ก็ต่อเมื่อ $\forall a, b \in A, \quad a\,r\,b \vee b\,r\,a$



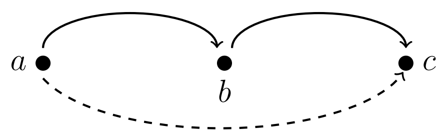
สมบัติสะท้อน



สมบัติปฏิสมมาตร



สมบัติสมมาตร



สมบัติถ่ายทอด

ตัวอย่าง 3.2.29 ให้ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้มีสมบัติใดบ้าง

1. ความสัมพันธ์ "เท่ากับ"
2. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"
3. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"
4. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"

ทฤษฎีบท 3.2.30 ความสัมพันธ์เอกลักษณ์ i_A มีสมบัติสะท้อน

ทฤษฎีบท 3.2.31 ทุก ๆ x และ y จะได้ว่า $(x, y) \in i_A$ ก็ต่อเมื่อ $x = y$

ทฤษฎีบท 3.2.32 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

$$r \text{ มีสมบัติสะท้อน} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad i_A \subseteq r$$

ทฤษฎีบท 3.2.33 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

$$r^{-1} \text{ มีสมบัติสมมาตร} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad r^{-1} = r$$

ทฤษฎีบท 3.2.34 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

r มีสมบัติปฏิสมมาตร ก็ต่อเมื่อ $r \cap r^{-1} \subseteq i_A$

ทฤษฎีบท 3.2.35 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

r มีสมบัติเปรียบเทียบได้ ก็ต่อเมื่อ $r \cup r^{-1} \subseteq A \times A$

ทฤษฎีบท 3.2.36 ให้ r เป็นความสัมพันธ์บน A จะได้ว่า

ถ้า r มีสมบัติเปรียบเทียบได้ แล้ว r มีสมบัติสะท้อน

แบบฝึกหัด 3.2

1. จงหาโดเมนและเรจน์ของความสัมพันธ์ต่อไปนี้

   1.1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = 5 - |x|\}$
   1.2 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} : xy + 3x = 12\}$
   1.3 $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y = xy + 1\}$
   1.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R} : y = \text{sin}\pi x\}$
   1.5 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{1 - \text{sin}x}\}$
   1.6 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \sqrt{1 - x^2}\}$
   1.7 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \text{sin}x + \text{cos}x\}$
   1.8 $r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 1 + \dfrac{x}{1 - x^2}\right\}$
   1.9 $r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \dfrac{x - 3}{x + 3}\right\}$
   1.10 $r = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \dfrac{\ell\text{n}(3 - x)}{\sqrt{x^2 - 4}}\right\}$

2. ให้ r, s และ t เป็นความสัมพันธ์ จงพิสูจน์ว่า $r \cap (s \cup t)$ เป็นความสัมพันธ์

3. จงพิสูจน์ว่า $\text{Dom}((A \times A)^{-1}) = A$ ทุก ๆ เซต A

4. ให้ A ไม่ใช่เซตว่าง และ B เป็นเซต จงแสดงว่า $\text{Dom}((A \times B)^{-1}) = A$

5. ให้ r, s, t และ u เป็นความสัมพันธ์ จงพิสูจน์ว่า

   5.1 $(r \subseteq s \wedge t \subseteq u) \rightarrow t \circ r \subseteq u \circ s$
   5.2 $(r \cup s) \circ t = (r \cup t) \circ (s \cup t)$
   5.3 $(r \cap s) \circ t \subseteq (r \cap t) \circ (s \cap t)$

6. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่า

   6.1 ถ้า $A \cap B \neq \varnothing$ แล้ว $(A \times B) \circ (A \times B) = A \times B$
   6.2 ถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว $(A \times B) \circ (A \times B) = \varnothing$
   6.3 ถ้า $B \neq \varnothing$ แล้ว $(B \times C) \circ (A \times B) = A \times C$

7. ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงพิสูจน์ว่า

   7.1 $r \cap s$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
   7.2 $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B
   7.3 $r - s$ เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B

8. ให้ r เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B จงพิสูจน์ว่า r^{-1} เป็นความสัมพันธ์จาก B ไป A

9. จงแจงกแจงความสัมพันธ์บน $A = \{0, \pm 1, \pm 2\}$ ที่กำหนดให้ต่อไปนี้ พร้อมทั้งตรวจสอบสมบัติทั้ง 5 ชนิด

9.1 $r = \{(x, y) : y = x^2\}$

9.2 $s = \{(x, y) : y \leq x\}$

9.3 $t = \{(x, y) : y = \sqrt{|x|}\}$

9.4 $u = \{(x, y) : x < 1$ และ $x^2 > 1\}$

10. ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน A และ $r \subseteq s$ จงพิสูจน์ว่า ถ้า r มีสมบัติสะท้อน แล้ว s จะมีสมบัติสะท้อนด้วย

11. จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์บน $\mathbb{N}$ ต่อไปนี้มีสมบัติใดบ้างใน 5 ชนิด

11.1 $r = \{(x, y) \,:\, 2 \mid (x + y)\}$

11.2 $r = \{(x, y) \,:\, 2 \mid (x - y)\}$

11.3 $r = \{(x, y) \,:\, 2 \mid (x^2 - y^2)\}$

11.4 $r = \{(x, y) \,:\, 2 \mid (x^2 + y^2)\}$

3.3 ความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 3.3.1 ความสัมพันธ์ r บนเซต A จะเรียกว่า **ความสัมพันธ์สมมูล (equivalent relation)** ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน สมมาตร และถ่ายทอด

ตัวอย่าง 3.3.2 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ ข้อใดต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A

1. $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$
2. $r = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$
3. $r = \{(1, 1)\}$
4. $r = A \times A$
5. $r = \varnothing$

ตัวอย่าง 3.3.3 ความสัมพันธ์ r ที่นิยามโดย

$$x\,r\,y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad 3 \mid (y - x) \qquad \text{สำหรับ } x, y \in \mathbb{Z}$$

จงแสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 3.3.4 ให้ $n \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $n > 1$ และความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ นิยามโดย

$$x\,r\,y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad n \mid (y - x)$$

จงแสดงว่า r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน $\mathbb{Z}$

บทนิยาม 3.3.5 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $A \neq \varnothing$ และ $a \in A$ **ชั้นสมมูล (equivalence class)** ของ a มอดุโล r เขียนแทนด้วย $[a]_r$ หรือ $[a]$ หรือ $\bar{a}$ หมายถึงเซตของสมาชิกใน A ที่สัมพันธ์กับ a นั่นคือ

$$[a]_r = \{x \in A \,:\, x\,r\,a\}$$

และเซตของชั้นสมมูลเรียกว่า **เซต A มอดุโล r** (A mudulo r) เขียนแทนด้วย A/r ดังนั้น

$$A/r = \{[a]_r \,:\, a \in A\}$$

ตัวอย่าง 3.3.6 จงหาเซต $\mathbb{Z}/r$ ของความสัมพันธ์ r บน $\mathbb{Z}$ นิยามโดย $x\,r\,y$ ก็ต่อเมื่อ $3|(x-y)$

ข้อสังเกต 3.3.7 สังเกตได้ว่าเซต $\mathbb{Z}$ ถูกแบ่งออกเป็นเซตย่อยได้ 3 เซตเท่านั้นคือ $[0], [1]$ และ $[2]$ จะเห็นว่าแต่ละเซตย่อยไม่มีสมาชิกซ้ำกัน และเมื่อรวมสมาชิกทั้งหมดของเซตย่อยเหล่านั้นย่อมเท่ากับ $\mathbb{Z}$ ในทำนองเดียวกันจากตัวอย่าง 3.3.4 เมื่อ

$$[k] = \{nq + k \,:\, q \in \mathbb{Z}\} \quad \text{ทุก } k \in \{0, 1, 2, ..., n-1\}$$

จะได้ว่า

$$\mathbb{Z}/r = \{[0], [1], [3], ..., [n-1]\}$$

เรียกเซตนี้ว่า **เซตของจำนวนเต็มมอดุโล *n*** เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}_n$

ทฤษฎีบท 3.3.8 ให้ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบนเซต $A \neq \varnothing$ แล้ว

1. $\forall a \in A,\ [a]_r \neq \varnothing$
2. $\forall a, b \in A,\ [a]_r \cap [b]_r \neq \varnothing \ \leftrightarrow\ a\, r\, b$
3. $\forall a, b \in A,\ [a]_r = [b]_r \ \leftrightarrow\ a\, r\, b$
4. $\forall a, b \in A,\ [a]_r \neq [b]_r \ \leftrightarrow\ [a]_r \cap [b]_r = \varnothing$

บทนิยาม 3.3.9 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ Λ เป็นเซตดรรชนี จะกล่าวว่า

$$\Pi = \{A_\alpha : \varnothing \neq A_\alpha \subseteq A \text{ และ } \alpha \in \Lambda\}$$

เป็น **ผลแบ่งกัน (partition)** ของ A ถ้า

(1) $\displaystyle\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha = A$

(2) $\forall \alpha, \beta \in \Lambda,\ A_\alpha = A_\beta$ **หรือ** $A_\alpha \cap A_\beta = \varnothing$

ตัวอย่าง 3.3.10 กำหนดให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ จงยกตัวอย่างผลแบ่งกั้นของ A มาอย่างน้อย 2 เซต

ทฤษฎีบท 3.3.11 ให้ A เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง และ r เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน A แล้ว A/r เป็นผลแบ่งกั้นหนึ่งของ A

บทนิยาม 3.3.12 ให้ Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซต A นิยามความสัมพันธ์ A/Π บน A เรียกว่า A มอดูโล Π โดย

$$(x, y) \in A/\Pi \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \text{มี } B \in \Pi \text{ ซึ่ง } \{x, y\} \subseteq B$$

ตัวอย่าง 3.3.13 ให้ $A = \{a, b, c, d\}$ และ $\Pi = \{\{a, b\}, \{c\}, \{c, d\}\}$ จงหา A/Π

ตัวอย่าง 3.3.14 กำหนดให้ $A = \mathbb{N}$ และ $\Pi = \{\{1, 3, 5, 7, ...\}, \{2, 4, 6, 8, ...\}\}$ จงหา A/Π

ทฤษฎีบท 3.3.15 ถ้า Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซต $A \neq \varnothing$ แล้ว

$$A/\Pi \text{ เป็นความสัมพันธ์สมมูลบน } A$$

แบบฝึกหัด 3.3

1. ให้ $A \neq \varnothing$ และ r เป็นความสัมพันธ์บนเซต A จงแสดงว่า

$$r \text{ เป็นความสัมพันธ์สมมูล ก็ต่อเมื่อ } r^{-1} \text{ เป็นความสัมพันธ์สมมูล}$$

2. ให้ $A \neq \varnothing$ เป็นเซตใด ๆ ให้ r และ s เป็นความสัมพันธ์บน A จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ ถ้าเป็นจริงจงพิสูจน์ ถ้าไม่จริงจงยกตัวอย่างค้าน

   2.1 ถ้า $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล แล้ว $s \circ r = r \circ s$

   2.2 ถ้า $r \cup s = r \circ s$ แล้ว $r \cup s$ เป็นความสัมพันธ์สมมูล

3. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นความสัมพันธ์สมมูล

   3.1 $r = \{(a, b), (b, a)\}$

   3.2 $r = \{(c, d), (c, c)\}$

   3.3 $r = \{(a, a), (b, b)\}$

   3.4 $r = \{(d, c)\}$

4. จงพิจารณาความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นความสัมพันธ์สมมูล

   4.1 $r = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \,:\, y > x\}$

   4.2 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,:\, x + y = 2\}$

   4.3 $r = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, 4|(x - y)\}$

   4.4 $r = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \,|\, 5 : (2x - 2y)\}$

   4.5 ให้ S เป็นเซต และ $A, B \in \mathcal{P}(S)$ กำหนดให้ $A \, r \, B$ มีความหมายว่า $A \subseteq B$

5. ให้ $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\Pi = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 5, 6\}, \{7, 8\}\}$
   และ $r = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8), (1, 2), (2, 1)\}$
   จงหาสมาชิกของ

   5.1 A/r

   5.2 $[3]_r$

   5.3 A/Π

   5.4 $[3]_{A/\Pi}$

   5.5 $A/(A/r)$

   5.6 $A/(A/\Pi)$

6. ให้ $n \in \mathbb{N}$ และ $r_n = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,:\, n \mid (y - x)\}$ นิยาม $[x]_n = [x]_{r_n}$ และ $\mathbb{Z}_n = \mathbb{N}/r_n$ จงหา

   6.1 $[2]_3$

   6.2 $[3]_4$

   6.3 $[5]_4$

   6.4 $\mathbb{Z}_3$

   6.5 $\mathbb{Z}_4$

   6.6 $\mathbb{Z}_7$

   6.7 $[2]_{\mathbb{N}/\mathbb{Z}_3}$

   6.8 $[3]_{\mathbb{N}/\mathbb{Z}_5}$

7. ให้ Π เป็นผลแบ่งกั้นของเซตหนึ่ง ให้ A, B และ C เป็นสมาชิกใน Π
   จงแสดงว่า ถ้า $B \cap C \neq \varnothing$ แล้ว $B = C$

บทที่ 4

ฟังก์ชัน

4.1 ฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.1.1 ความสัมพันธ์ f จะเรียกว่า **ฟังก์ชัน** (function) ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x \forall y \forall z \, [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z]$$

ข้อสังเกต 4.1.2

$$\begin{aligned} f \text{ เป็นฟังก์ชัน} \quad &\leftrightarrow \quad \forall x \forall y \forall z \, [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \rightarrow y = z] \\ f \text{ ไม่เป็นฟังก์ชัน} \quad &\leftrightarrow \quad \exists x \exists y \exists z \, [(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \wedge y \neq z] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.3 จงตรวจสอบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ เพราะเหตุใด

1. $r_1 = \{(1, 2), (2, 1), (3, 5)\}$
2. $r_2 = \{(1, 2), (1, 1)\}$
3. $r_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x < y\}$
4. $r_4 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : xy = x + y\}$
5. $r_5 = \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : y = |y| + |x|\}$
6. $r_6 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 2x + y^2 = x^2 + 2y\}$

ตัวอย่าง 4.1.4 จงตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมพิสูจน์

1. $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : 3x + 2y = 6\}$

2. $g = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2 + 1\}$

3. $h = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : xy^2 = x + 1\}$

ทฤษฎีบท 4.1.5 เซตว่างเป็นฟังก์ชัน

บทนิยาม 4.1.6 ให้ f เป็นฟังก์ชัน ถ้า $(x,y)\in f$ เขียนแทนด้วย $y=f(x)$ นั่นคือ

$$(x,y)\in f \qquad \leftrightarrow \qquad y=f(x)$$

ตัวอย่าง 4.1.7 ให้ $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,1)\}$ และ $g=\{(1,1),(2,1),(3,3),(4,2)\}$ จงหา

1. $f(1)+f(2)$
2. $g(3)-g(4)$
3. $f(4)\cdot g(2)$
4. $f(g(3))-g(f(3))$

บทนิยาม 4.1.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

1. **ผลบวก (sum)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f+g$ นิยามโดย

$$f+g=\{(x,y): y=f(x)+g(x) \text{ และ } x\in \mathsf{Dom}(f)\cap\mathsf{Dom}(g)\}$$

2. **ผลคูณ (difference)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $f-g$ นิยามโดย

$$f-g=\{(x,y): y=f(x)-g(x) \text{ และ } x\in \mathsf{Dom}(f)\cap\mathsf{Dom}(g)\}$$

3. **ผลคูณ (product)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย fg นิยามโดย

$$fg=\{(x,y): y=f(x)g(x) \text{ และ } x\in \mathsf{Dom}(f)\cap\mathsf{Dom}(g)\}$$

4. **ผลหาร (quotient)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $\dfrac{f}{g}$ นิยามโดย

$$\frac{f}{g}=\left\{(x,y): y=\frac{f(x)}{g(x)},\ x\in \mathsf{Dom}(f)\cap\mathsf{Dom}(g) \text{ และ } g(x)\neq 0\right\}$$

ตัวอย่าง 4.1.9 ให้ $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$ และ $g=\{(1,3),(3,5),(4,1),(6,0)\}$ จงหา

1. $f+g$
2. $f-g$
3. $g-f$
4. fg
5. $\dfrac{f}{g}$
6. $\dfrac{g}{f}$

ทฤษฎีบท 4.1.10 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า $f+g$, $f-g$, fg และ $\dfrac{f}{g}$ เป็นฟังก์ชัน

จากบทนิยาม 4.1.8 จะได้ว่า

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) \qquad (f-g)(x) = f(x)-g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)g(x) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{เมื่อ } g(x) \neq 0$$

ตัวอย่าง 4.1.11 กำหนดให้

$$f(x) = \frac{x}{1-x^2} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \frac{1-x}{2x^2}$$

จงหา

1. $(f+g)(x)$
2. $(f-g)(x)$
3. $(fg)(x)$
4. $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

ตัวอย่าง 4.1.12 ให้

$$f(x) = x + 1 \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \qquad \text{และ} \qquad h(x) = \frac{x}{x+1}$$

จงหา

1. $(fg)(x)$
2. $(fh)(x)$
3. $\left(\frac{g}{h}\right)(x)$
4. $\left(\frac{h}{g}\right)(x)$

จากบทนิยาม 4.1.8 จะได้ว่า

$$\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$
$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x : g(x) = 0\}$$

ตัวอย่าง 4.1.13 ให้

$$f(x) = \sqrt{9 - x^2} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

จงหา

1. $\text{Dom}(f+g)$
2. $\text{Dom}(f-g)$
3. $\text{Dom}(fg)$
4. $\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right)$

เนื่องจาก f และ g เป็นเซตจะได้ว่า $f = g$ ก็ต่อเมื่อ $\forall x \, \forall y \, [(x, y) \in f \leftrightarrow (x, y) \in g]$

ทฤษฎีบท 4.1.14 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

$$f = g \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) \text{ และ } f(x) = g(x) \text{ ทุก ๆ } x \in \mathrm{Dom}(f)$$

ตัวอย่าง 4.1.15 ให้ $f(x) = x$ และ $g(x) = \dfrac{x^2}{x}$ จงแสดงว่า $f \neq g$

ตัวอย่าง 4.1.16 ให้ $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ และ $g(x) = \dfrac{|x|}{x}$ แล้ว $f = g$ หรือไม่เพราะเหตุใด

บทนิยาม 4.1.17 ฟังก์ชัน f จะเรียกว่า **ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง** (injective **หรือ** one-to-one) ก็ต่อเมื่อ

$$\forall x_1 \forall x_2 [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2]$$

ข้อสังเกต 4.1.18

$$\begin{aligned} f \text{ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง} \quad &\leftrightarrow \quad \forall x_1 \forall x_2 [f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2] \\ &\leftrightarrow \quad \forall x_1 \forall x_2 [x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)] \\ f \text{ ไม่เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง} \quad &\leftrightarrow \quad \exists x_1 \exists x_2 [f(x_1) = f(x_2) \wedge x_1 \neq x_2] \end{aligned}$$

ตัวอย่าง 4.1.19 จงตรวจสอบว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่พร้อมพิสูจน์ เมื่อ $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ กำหนดโดย

1. $f(x) = 2x + 1$

2. $f(x) = x^2$

3. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x$

4. $f(x) = x|x|$

บทนิยาม 4.1.20 ให้ f เป็นความสัมพันธ์จาก A ไป B เรียก f ว่าฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้า

1. f เป็นฟังก์ชัน
2. $\mathrm{Dom}(f) = A$
3. $\mathrm{Ran}(f) \subseteq B$

ตัวอย่าง 4.1.21 ให้ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{4, 5, 6\}$ ฟังก์ชันในข้อใดเป็นฟังก์ชันจาก A ไป B

1. $f_1 = \{(1, 4), (2, 5), (3, 6)\}$
2. $f_2 = \{(1, 2), (2, 5), (3, 6)\}$
3. $f_3 = \{(1, 4), (1, 5), (3, 6)\}$
4. $f_4 = \{(1, 4), (2, 5)\}$

ตัวอย่าง 4.1.22 จงเขียนฟังก์ชันจาก A ไป B ทั้งหมด เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

ตัวอย่าง 4.1.23 ให้ $f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \dfrac{1}{x^2 + 1}\right\}$ จงแสดงว่า f ฟังก์ชันจาก $\mathbb{R}$ ไป $\mathbb{R}$

บทนิยาม 4.1.24 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้า $\text{Ran}(f) = B$ จะเรียก f ว่า **ฟังก์ชันทั่วถึง (surjective)** หรือ ฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B

บทนิยาม 4.1.25 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ถ้า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งและฟังก์ชันทั่วถึง จะเรียกว่า f เป็น**ฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง (bijective)** หรือเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B

ตัวอย่าง 4.1.26 จงเขียนฟังก์ชันจาก A ไปทั่วถึง B ทั้งหมด เมื่อ $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{1, 2\}$

ตัวอย่าง 4.1.27 กำหนดให้

$$f = \{(x, y) : x + \sqrt{x} = y + \sqrt{y}\}$$

จงแสดงว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}^+$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}^+$

ทฤษฎีบท 4.1.28 เซตว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\varnothing$ ไปทั่วถึง $\varnothing$

ทฤษฎีบท 4.1.29 ให้ A เป็นเซตใด ๆ แล้วความสัมพันธ์เอกลักษณ์ i_A เป็นฟังก์ชันจาก A ไป A

บทนิยาม 4.1.30 สำหรับเซต A ใด ๆ เรียก

$$i_A = \{(x,x) \,:\, x \in A\}$$

ว่า **ฟังก์ชันเอกลักษณ์ (identity function)**

ทฤษฎีบท 4.1.31 ให้ A เป็นเซต แล้วฟังก์ชันเอกลักษณ์ i_A เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง

แบบฝึกหัด 4.1

1. จงตรวจสอบความสัมพันธ์ต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันหรือไม่ พร้อมพิสูจน์

   1.1 $f_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = 3x-1\}$

   1.2 $f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = 2x^2-3\}$

   1.3 $f_3 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : xy = y^2\}$

   1.4 $f_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : y|x| = x|y|\}$

   1.5 $f_5 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N} : yx - y = 35 + x\}$

   1.6 $f_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : x^2 + y^2 + 2 = 2x + 2y\}$

2. จงตรวจสอบฟังก์ชันต่อไปนี้ว่าเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่ พร้อมพิสูจน์

   2.1 $f_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : yx + y = x - 1\}$

   2.2 $f_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : 3x = xy - 2y\}$

   2.3 $f_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : y = x^3 - 3x^2 + 3x + 1\}$

   2.4 $f_4 = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : x^2y + y = 1\}$

3. กำหนดให้
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x \geq 0 \\ -x^2 & \text{เมื่อ } x < 0 \end{cases}$$
   จงพิสูจน์ว่า f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก $\mathbb{R}$ ไปทั่วถึง $\mathbb{R}$

4. จงแสดงว่า $\varnothing$ เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B ก็ต่อเมื่อ $A = \varnothing$

5. จงเขียนฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งจาก A ไปทั่วถึง B ทั้งหมด เมื่อ $A = \{4,5,6\}$ และ $B = \{1,2,3,4\}$

6. จงแสดงว่าสับเซตของฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งเป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

7. ให้ $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$ และ $g(x) = \dfrac{x}{1+x}$ แล้ว $f = g$ หรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

8. ให้ $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ กำหนดโดย $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1 & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคู่} \\ \frac{x+1}{2} & \text{เมื่อ } x \text{ เป็นจำนวนคี่} \end{cases}$

   จงพิจารณาว่า f พร้อมทั้งให้เหตุผล

   8.1 f เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งหรือไม่

   8.2 f เป็นฟังก์ชันทั่วถึงหรือไม่

9. ให้ $f, g : A \to B$ จงพิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือไม่ พร้อมทั้งพิสูจน์

   9.1 $f \cup g : A \to B$

9.2 $f \cap g : A \to B$

9.3 ถ้า $f \cup g : A \to B$ แล้ว $f = g$

9.4 ถ้า $f \cap g : A \to B$ แล้ว $f = g$

9.5 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cup g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

9.6 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง แล้ว $f \cap g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง

9.7 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f \cup g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

9.8 ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $f \cap g : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง

10. ให้ $f = \{(1,0),(2,2),(3,5),(4,6)\}$ และ $g = \{(1,1),(2,1),(4,3),(5,0)\}$ จงหา

10.1 $f+g$ 10.3 $f+f$ 10.5 fg 10.7 $\dfrac{f}{g}$

10.2 $f-g$ 10.4 $g-f$ 10.6 gg 10.8 $\dfrac{g}{f}$

11. จงหา Dom$(f+g)$, Dom$(f-g)$, Dom(fg) และ Dom$(\frac{f}{g})$ เมื่อกำหนดให้

11.1 $f(x) = \sqrt{x}$ และ $g(x) = x+1$

11.2 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ และ $g(x) = \dfrac{x}{x+2}$

11.3 $f(x) = \sqrt{x^3+1}$ และ $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

12. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงแสดงว่า $f+g = g+f$ และ $fg = gf$

13. ให้

$$f(x) = x, \qquad g(x) = e^{\ln x}, \qquad h(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad \text{และ} \qquad k(x) = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$$

จงหา

13.1 $(f+g)(x)$ 13.3 $(h-k)(x)$ 13.5 $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$

13.2 $(fg)(x)$ 13.4 $(hk)(x)$ 13.6 $\left(\frac{h}{k}\right)(x)$

14. ให้

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ -x & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases} \qquad \text{และ} \qquad g(x) = \begin{cases} x-1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ 1-x & \text{เมื่อ } x \le 1 \end{cases}$$

จงหา

14.1 $(f+g)(x)$ 14.2 $(f-g)(x)$ 14.3 $(fg)(x)$ 14.4 $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

4.2 ฟังก์ชันผกผันและฟังก์ชันประกอบ

บทนิยาม 4.2.1 ให้ $f : A \to B$ จะกล่าวว่า f เป็น**ฟังก์ชันผกผันได้** **(invertible)** ก็ต่อเมื่อ

$$f^{-1} = \{(y, x) \,:\, (x, y) \in f\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

และเรียก f^{-1} ว่า**ฟังก์ชันผกผัน** **(inverse function)** ของ f

ตัวอย่าง 4.2.2 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$ และ $g = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2)\}$ จงตรวจสอบว่า f และ g เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่

ทฤษฎีบท 4.2.3 ให้ $f : A \to B$ แล้วจะได้ว่า

$$f \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ \quad ก็ต่อเมื่อ \quad} f \text{ เป็นฟังก์ชัน 1–1}$$

ทฤษฎีบท 4.2.4 $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $f^{-1} : B \to A$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง

ตัวอย่าง 4.2.5 จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่ พร้อมให้เหตุผล

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = x^2$

2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x + 1$

ตัวอย่าง 4.2.6 จงหา $f^{-1}(x)$ เมื่อกำหนดให้

1. $f(x) = 3x - 2$

2. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 2$

3. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$

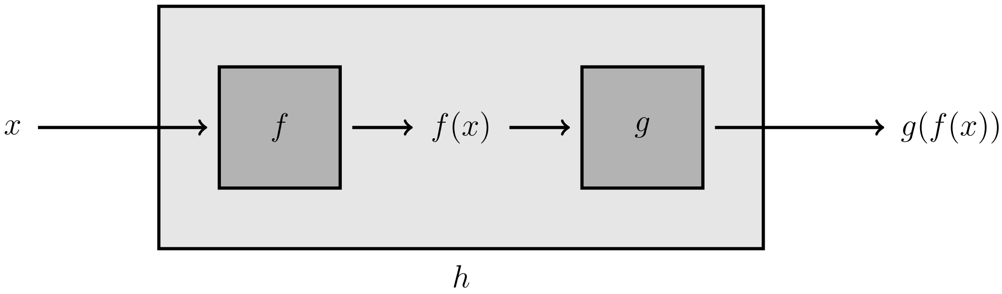
4. $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$

ตัวอย่าง 4.2.7 ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ กำหนดโดย

$$f(x) = x|x|$$

จงแสดงว่า f^{-1} เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง และหา $f^{-1}(x)$

ถ้าเปรียบเทียบฟังก์ชันคือเครื่องจักรชิ้นหนึ่งเรียกว่า f เมื่อใส่ x หรือ input เข้าไปในเครื่อง จะได้ $f(x)$ ออกมาตามหน้าที่ของเครื่องจักรชนิดนั้น จากแนวคิดนี้เมื่อประกอบเครื่องจักรอีกเครื่องที่เรียกว่า g อีกชิ้น โดยนำ $f(x)$ หรือ output จากเครื่องจักร f ใส่เข้าไปในเครื่องจักร g แล้วได้ผลเป็น $g(f(x))$ เรียกเครื่องจักรประกอบจากสองชิ้นนี้ว่า h ดังภาพ



จะเรียกฟังก์ชัน h ที่ได้จากแนวคิดนี้ว่า **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ซึ่งมีนิยามดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 4.2.8 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน

$$h = \{(x, z) : (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g\} \text{ เป็นฟังก์ชัน}$$

บทนิยาม 4.2.9 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน ฟังก์ชัน h ในทฤษฎีบท 4.2.8 เรียกว่า **ฟังก์ชันประกอบ (composite function)** ของ f และ g เขียนแทนด้วย $g \circ f$ นั่นคือ

$$(x, z) \in g \circ f \quad \leftrightarrow \quad (x, y) \in f \wedge (y, z) \in g$$

ตัวอย่าง 4.2.10 ให้ $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1), (5, 4)\}$ และ $g = \{(1, 1), (2, 3), (3, 3), (4, 1)\}$ จงหา

1. $f \circ g$
2. $g \circ f$
3. $f \circ f$
4. $(f \circ g) + f$

ตัวอย่าง 4.2.11 ให้

$$\begin{aligned} f &= \{(1,2),(2,3),(3,1),(4,4)\} \\ g &= \{(1,4),(2,2),(3,1),(4,3)\} \\ h &= \{(1,3),(2,1),(3,4),(4,2)\} \end{aligned}$$

จงหา $(f \circ g) \circ h$ และ $f \circ (g \circ h)$

โดยบทนิยาม 4.2.9

$$\begin{aligned} (x,z) \in g \circ f \quad &\leftrightarrow \quad (x,y) \in f \wedge (y,z) \in g \\ z = (g \circ f)(x) \quad &\leftrightarrow \quad f(x) = y \wedge g(y) = z \\ &\leftrightarrow \quad g(f(x)) = z \end{aligned}$$

ดังนั้น

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

ตัวอย่าง 4.2.12 ให้ $f(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$ และ $g(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$ จงหา $(f \circ g)(x)$ และ $(g \circ f)(x)$

ทฤษฎีบท 4.2.13 ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน แล้ว

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ทฤษฎีบท 4.2.14 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1–1 แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1
2. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง แล้ว $g \circ f$ เป็นฟังก์ 1–1 แบบทั่วถึง

ทฤษฎีบท 4.2.15 ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จะได้ว่า

1. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แล้ว f เป็นฟังก์ชัน 1–1
2. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง แล้ว g เป็นฟังก์ชันทั่วถึง
3. ถ้า $g \circ f$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง แล้ว f เป็นฟังก์ 1–1 และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

ทฤษฎีบท 4.2.16 ให้ $f : A \to B$ แล้ว

1. $f \circ i_A = f$
2. $i_B \circ f = f$

ทฤษฎีบท 4.2.17 ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง จะได้ว่า

1. $f \circ f^{-1} = i_B$
2. $f^{-1} \circ f = i_A$

ทฤษฎีบท 4.2.18 ให้ f, g และ h เป็นฟังก์ชัน

1. ถ้า $f = g$ แล้ว $h \circ f = h \circ g$
2. ถ้า $f = g$ แล้ว $f \circ h = g \circ h$

ทฤษฎีบท 4.2.19 ให้ f เป็นฟังก์ชัน 1–1 และ $Dom(f) = A$ และ $Ran(f) = B$

1. $g \circ f = f$ ก็ต่อเมื่อ $g = i_B$
2. $f \circ g = f$ ก็ต่อเมื่อ $g = i_A$

ตัวอย่าง 4.2.20 กำหนดให้ $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$ และ $A = \mathrm{Dom}(f)$ จงแสดงว่า $f = f^{-1}$ และ $f \circ f = i_A$

ทฤษฎีบท 4.2.21 ให้ f เป็นฟังก์ชันผกผันได้ แล้ว

$$f^{-1} \text{ เป็นฟังก์ชันผกผันได้ และ } (f^{-1})^{-1} = f$$

ทฤษฎีบท 4.2.22 กำหนดให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน 1–1 จะได้ว่า

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

แบบฝึกหัด 4.2

1. จงตรวจสอบว่าฟังก์ชันต่อไปนี้เป็นฟังก์ชันผกผันได้หรือไม่ เมื่อโดเมนเป็นสับเซตของจำนวนจริง

   1.1 $f(x) = 5 + 7x$
   1.2 $f(x) = \sqrt{x+1}$
   1.3 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 3$
   1.4 $f(x) = x^3|x|$
   1.5 $f(x) = |x| + |x+1|$
   1.6 $f(x) = \tan x$
   1.7 $f(x) = \dfrac{1+2x}{2+x}$
   1.8 $f(x) = \dfrac{1}{1+2^x}$
   1.9 $f(x) = \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}$
   1.10 $f(x) = x\sin x$

2. จงหาฟังก์ชันผกผัน $f^{-1}(x)$ ของฟังก์ชันต่อไปนี้

   2.1 $f(x) = 11x + 22$
   2.2 $f(x) = \sqrt{x}$
   2.3 $f(x) = x^3 + 12x^2 + 6x$
   2.4 $f(x) = \tan x$
   2.5 $f(x) = e^x$
   2.6 $f(x) = \dfrac{3+x}{2-x}$

3. ให้ $f = \{(0,0),(1,1),(2,1),(3,2)\}$ และ $g = \{(0,1),(1,0),(2,3),(3,1)\}$ จงหา

   3.1 $f \circ g$
   3.2 $g \circ f$
   3.3 $(f+g) \circ (f-g)$

4. ให้ $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{เมื่อ } x > 0 \\ 2x & \text{เมื่อ } x \le 0 \end{cases}$ และ $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{เมื่อ } x > 1 \\ 1 - x^2 & \text{เมื่อ } x \le 1 \end{cases}$ จงหา

   4.1 $(f \circ g)(x)$
   4.2 $(g \circ f)(x)$
   4.3 $(f \circ g) \circ f(1)$
   4.4 $(f - g) \circ g(1)$

5. ให้ $f(2x+1) = 4x^2 + 4x + 5$ และ $g\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) = x$ จงหา $f(x)$, $g(x)$ และ $(f \circ g)(x)$

6. จงยกตัวอย่างฟังก์ชัน 1–1 f ที่สอดคล้อง $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ทุก ๆ x และ y

7. ให้ f และ g เป็นฟังก์ชัน จงพิสูจน์ว่า

   7.1 $\mathrm{Dom}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Dom}(f)$
   7.2 $\mathrm{Ran}(g \circ f) \subseteq \mathrm{Ran}(g)$

8. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ จงพิสูจน์ว่า $g \circ f : A \to C$

9. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง จงพิสูจน์ว่า $g \circ f : A \to C$ เป็นฟังก์ชันแบบทั่วถึง

10. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ถ้า f และ g เป็นฟังก์ชัน 1–1 จงพิสูจน์ว่า $g \circ f : A \to C$ เป็นฟังก์ชัน 1–1

11. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1–1 และ g เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง จงพิสูจน์ว่า $(g \circ f)^{-1}$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 C ไปทั่วถึง A

4.3 ภาพและภาพผกผัน

ทฤษฎีบท 4.3.1 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $S \subseteq A$ ถ้า

$$g(x) = f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S$$

แล้ว g เป็นฟังก์ชันจาก S ไป B

บทนิยาม 4.3.2 ฟังก์ชัน g จากทฤษฎีบท 4.3.1 เรียกว่า **ฟังก์ชันกำกัด (restriction function)** ของ f บน S เขียนแทนด้วย $f|_S$ และ f เรียกว่า **ฟังก์ชันภาคขยาย (extension function)** ของ $f|_S$ นั่นคือ

$$f|_S = \{(x, y) : (x, y) \in f \text{ และ } x \in S\}$$

$$f|_S \text{ เป็นฟังก์ชันกำกัดของ } f \text{ บน } S \quad \leftrightarrow \quad f|_S(x) = f(x) \qquad \text{ทุก ๆ } x \in S$$

ตัวอย่าง 4.3.3 ให้ f เป็นฟังก์ชันบนจำนวนจริง จงหา $f|_S$

1. $f(x) = 2x + 1$ และ $S = \{-1, 0, 1\}$
2. $f(x) = x^2$ และ $S = \mathbb{N}$
3. $f(x) = \sqrt{x^2}$ และ $S = \mathbb{R}^+$
4. $f(x) = \cos x$ และ $S = [0, \pi]$

ทฤษฎีบท 4.3.4 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $S \subseteq A$ แล้ว

$$f|_S \cup f|_{A-S} = f$$

ทฤษฎีบท 4.3.5 ให้ f เป็นฟังก์ชันจาก A ไป B และ $S \subseteq A$

ถ้า f เป็นฟังก์ชัน 1–1 แล้ว $f|_S$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 จาก S ไป B

บทนิยาม 4.3.6 ให้ $f : A \to B$ และ $U \subseteq A$ นิยาม **ภาพ (image)** ของ U ภายใต้ f เขียนแทนด้วย $f(U)$ กำหนดโดย

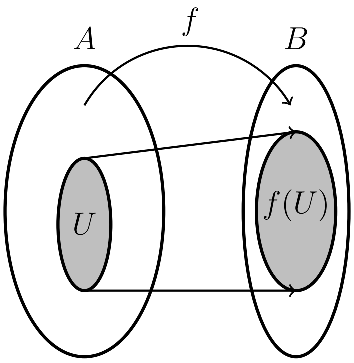
$$f(U) = \{y \in B : \exists x \in A \text{ และ } f(x) = y\}$$

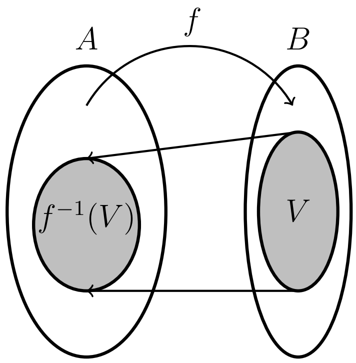
และ $V \subseteq B$ นิยาม **ภาพผกผัน (inverse image)** ของ V ภายใต้ f เขียนแทนด้วย $f^{-1}(V)$ กำหนดโดย

$$f^{-1}(V) = \{x \in A : f(x) \in V\}$$

จะได้ว่า

$y \in f[U]$ ก็ต่อเมื่อ $\exists x \in U, y = f(x)$ $\qquad$ $x \in f^{-1}[V]$ ก็ต่อเมื่อ $f(x) \in V$





ตัวอย่าง 4.3.7 ให้ f เป็นฟังก์ชันบน $\mathbb{R}$ นิยามโดย $f(x) = 2x + 1$ จงหา $f(U)$ และ $f^{-1}(V)$

1. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
2. $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. $U = [-3, 7]$
4. $V = (-6, \infty)$
5. $U = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 1\}$
6. $V = \{x \in \mathbb{R} : 1 < |x| < 3\}$

ทฤษฎีบท 4.3.8 ให้ $f : A \to B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ แล้ว

1. $f(\varnothing) = \varnothing$ และ $f^{-1}[\varnothing] = \varnothing$
2. $f(U) \subseteq \text{Ran}(f)$ และ $f(A) = \text{Ran}(f)$
3. $f(U) \subseteq f(A) \subseteq B$
4. $f^{-1}(V) \subseteq \text{Dom}(f)$ และ $f^{-1}(B) = \text{Dom}(f)$

ทฤษฎีบท 4.3.9 ให้ $f : A \to B$ และ $X, Y \subseteq A$ และ $U, V \subseteq B$ แล้ว

1. ถ้า $X \subseteq Y$ แล้ว $f(X) \subseteq f(Y)$
2. ถ้า $X = Y$ แล้ว $f(X) = f(Y)$
3. ถ้า $U \subseteq V$ แล้ว $f^{-1}(U) \subseteq f^{-1}(V)$
4. ถ้า $U = V$ แล้ว $f^{-1}(U) = f^{-1}(V)$

ทฤษฎีบท 4.3.10 ให้ $f : A \to B$ และ $X, Y \subseteq A$ และ $U, V \subseteq B$ แล้ว

1. $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$
2. $f(X \cap Y) \subseteq f(X) \cap f(Y)$
3. $f^{-1}(U \cup V) = f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$
4. $f^{-1}(U \cap V) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(V)$

ทฤษฎีบท 4.3.11 ให้ $f : A \to B$

f เป็นฟังก์ชัน 1–1 ก็ต่อเมื่อ $f(U \cap W) = f(U) \cap f(W)$ ทุก ๆ $U, W \subseteq A$

ทฤษฎีบท 4.3.12 ให้ $f : A \to B$ และ $V \subseteq B$ แล้ว $f^{-1}(B - V) = f^{-1}(B) - f^{-1}(V)$

ทฤษฎีบท 4.3.13 ให้ $f : A \to B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ แล้ว

1. $U \subseteq f^{-1}(f(U))$
2. $f(f^{-1}(V)) \subseteq V$

ทฤษฎีบท 4.3.14 ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 และ $U \subseteq A$ แล้ว

$$f^{-1}(f(U)) = U$$

ทฤษฎีบท 4.3.15 ให้ $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชันทั่วถึง และ $V \subseteq B$ แล้ว

$$f(f^{-1}(V)) = V$$

แบบฝึกหัด 4.3

1. ให้ $f(x) = x^2 + 1$ จงหา

    1.1 $f(\{1, 2, 3\})$
    1.2 $f([-3, 3])$
    1.3 $f^{-1}(\{-1, 0, 1, 2\})$
    1.4 $f^{-1}((-1, 5])$

2. ให้ $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{เมื่อ } x > 1 \\ x+1 & \text{เมื่อ } x \leq 1 \end{cases}$ จงหา $f|_S$

    2.1 $S = \{0, 1, 2\}$
    2.2 $S = [-2, 5]$
    2.3 $S = (7, \infty)$
    2.4 $S = (-\infty, 2)$

3. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = |x|$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

    3.1 $f([0, 1])$
    3.2 $f((-1, 1))$
    3.3 $f^{-1}((-1, 1))$
    3.4 $f^{-1}([1, 3))$

4. ให้ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ โดย $f(x) = 1 - x^2$ จงหาภาพและภาพผกผันต่อไปนี้ พร้อมทั้งพิสูจน์

    4.1 $f([0, 2])$
    4.2 $f([-2, 1))$
    4.3 $f^{-1}((-1, 2])$
    4.4 $f^{-1}((-2, 2))$

5. ให้ $f : A \to B$ และ $g : B \to C$ และ $D \subseteq C$ จงแสดงว่า $(g \circ f)^{-1}(D) = f^{-1}(g^{-1}(D))$

6. ให้ $f : A \to B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า

$$f(U) \subseteq V \quad \leftrightarrow \quad U \subseteq f^{-1}(V)$$

7. ให้ $f : A \to B$ และ $U \subseteq A$ และ $V \subseteq B$ จงพิสูจน์ว่า

$$(f|_U)^{-1}(V) = A \cap f^{-1}(V)$$

8. ให้ $f : A \to B$ และ $U, W \subseteq A$ จงพิสูจน์ว่า

    8.1 f เป็นฟังก์ชัน 1–1 ก็ต่อเมื่อ $f(A - U) \subseteq B - f(U)$
    8.2 f เป็นฟังก์ชันทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $B - f(U) \subseteq f(A - U)$
    8.3 f เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง ก็ต่อเมื่อ $B - f(U) = f(A - U)$

4.4 เซตดรรชนี

พิจารณาตัวอย่าง $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ เมื่อ

$A_1 = [0, 1]$

$A_2 = \{0.5, 1, 2\}$

$A_3 = \{x \in \mathbb{Z} : x > 1\}$

$A_4 = \{x \in \mathbb{Q} : 0 < x < 4\}$

เรียก $\{1, 2, 3, 4\}$ ว่า **เซตดรรชนี (index set)** หรือเขียนได้ว่า A_α เมื่อ $\alpha \in \{1, 2, 3, 4\}$ ของ

$$\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$$

ในกรณีที่ $\Lambda = \mathbb{N}$ เรียก $\{A_\alpha : \alpha \in \mathbb{N}\}$ ว่า**อันดับของเซต**

ตัวอย่าง 4.4.1 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ

$$A_\alpha = \{1, 2, 3, ..., \alpha\}$$

สำหรับแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ จงหา A_α ทั้งหมด เมื่อ

1. $\Lambda = \{1, 3, 5\}$
2. $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$

ตัวอย่าง 4.4.2 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนจริง ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ

$$A_x = (x - 1, x + 1)$$

สำหรับแต่ละ $x \in \Lambda$ จงหา A_α ทั้งหมด เมื่อ

1. $\Lambda = \{1, 2, 3, 4\}$
2. $\Lambda = \{-1, 0, 1\}$
3. $\Lambda = \{0.5, 1.2, 4\}$
4. $\Lambda = (1, 5)$

บทนิยาม 4.4.3 ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี นิยามยูเนียนและอินเตอร์เซกชันใด ๆ ดังนี้

1. $\displaystyle\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x : \exists\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\}$
2. $\displaystyle\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \{x : \forall\alpha\in\Lambda,\ x\in A_\alpha\}$

กรณี $\Lambda = \{1,2,3,...,n\}$ เขียนเป็น $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ และ $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i$
และกรณี $\Lambda = \mathbb{N}$ เขียนเป็น $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ และ $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

ตัวอย่างเช่น $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{3} A_i = A_1\cup A_2\cup A_3$ และ $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{4} A_i = A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$

ตัวอย่าง 4.4.4 ให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นเซตของจำนวนนับ ให้ $A_i = \{1,2,3,...,i\}$ จงหา

1. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{10} A_i$ และ $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{10} A_i$

2. $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ และ $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$

ตัวอย่าง 4.4.5 จงหาเซตต่อไปนี้

1. $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ และ $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ เมื่อ $A_n = (n-1, n+1)$

2. $\bigcup\limits_{x\in(0,1)} A_x$ และ $\bigcap\limits_{x\in(0,1)} A_x$ เมื่อ $A_x = [1-x, 1+x]$

ตัวอย่าง 4.4.6 กำหนดให้ $A_n = (1-n, 1+n)$ จงหาเซตต่อไปนี้

1. $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

2. $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

ตัวอย่าง 4.4.7 จงหา

1. $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$

2. $\displaystyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left(1-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n}\right)$

ทฤษฎีบท 4.4.8 ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha\in\Lambda$ แล้ว

1. $\displaystyle\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c$

2. $\displaystyle\left(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\right)^c=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha)^c$

ทฤษฎีบท 4.4.9 ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ และ B เป็นเซตใด ๆ

1. $B \cap \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(B \cap A_\alpha)$
2. $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cap B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha \cap B)$
3. $B \cup \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(B \cup A_\alpha)$
4. $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right) \cup B = \bigcap_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha \cup B)$

ทฤษฎีบท 4.4.10 ให้ Λ เป็นเซตดรรชนี และ A_α เป็นเซตซึ่ง $\alpha \in \Lambda$ และ B เป็นเซตใด ๆ

1. $B \cup \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cup A_\alpha)$
2. $\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cup B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cup B)$
3. $B \cap \left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (B \cap A_\alpha)$
4. $\left(\bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha \right) \cap B = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} (A_\alpha \cap B)$

ทฤษฎีบท 4.4.11 ให้ I และ J เป็นเซตดรรชนี และ A_i เป็นเซตซึ่ง $i \in I$ และ B_j เป็นเซตซึ่ง $j \in J$ เป็นเซตใด ๆ

1. $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{j \in J} B_j\right) = \bigcup_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$
2. $\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{j \in J} B_j\right) = \bigcap_{(i,j) \in I \times J} (A_i \times B_j)$

พิจารณาเซต $\bar{A}$ ของฟังก์ชันทั้งหลายที่มีโดเมนคือเซตดรรชนี Λ และแต่ละ $\alpha \in \Lambda$ จะได้ $f(\alpha) \in A_\alpha$ หรือนั่นคือ

$$\bar{A} = \{f : f : \Lambda \to A_\alpha\}$$

หรือกล่าวได้ว่าจำนวนสมาชิกทั้งหลายใน $\bar{A}$ เป็นฟังก์ชันจาก Λ ไปยัง $\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ ดังนั้น

$$\bar{A} = \left\{f : \Lambda \to \bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha : \forall\alpha \in \Lambda, f(\alpha) \in A_\alpha\right\}$$

ตัวอย่าง 4.4.12 พิจารณา $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ ให้ $A_\alpha = \{1, 2, ..., \alpha\}$ และ $\alpha \in \Lambda$ จงหา $\bar{A}$ เมื่อ

1. $\Lambda = \{1\}$

2. $\Lambda = \{1, 2\}$

3. $\Lambda = \{1, 2, 3\}$

ทฤษฎีบท 4.4.13 ให้ $\Lambda = \{1, 2\}$ ฟังก์ชัน

$$g : \bar{A} \to A_1 \times A_2 \quad \text{นิยามโดย} \quad g(f) = (f(1), f(2))$$

เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง

แบบฝึกหัด 4.4

1. กำหนดให้เอกภพสัมพัทธ์เป็นจำนวนจริง จงหาเซตต่อไปนี้

1.1 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$

1.2 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$

1.3 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n},2+\frac{1}{n}]$

1.4 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[-1,\frac{1}{n})$

1.5 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n},1)$

1.6 $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+}(-x,x)$

1.7 $\bigcup_{x\in\mathbb{R}^+}(1-x,1+x)$

1.8 $\bigcup_{y\in\mathbb{R}^+}(-\frac{y}{2},\frac{y}{2})$

1.9 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[-\frac{1}{n},\frac{1}{n}]$

1.10 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(-\frac{1}{n},1+\frac{1}{n})$

1.11 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}(1-\frac{1}{n},1)$

1.12 $\bigcap_{x\in\mathbb{R}^+}(-x,x)$

2. กำหนดให้ $\{A_i : i\in I\}$ และ $\{B_i : i\in I\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปดรรชนีและมีสมบัติ $A_i\subseteq B_i$ ทุก ๆ $i\in I$ จงพิสูจน์ว่า

2.1 $\bigcup_{i\in I}A_i\subseteq\bigcup_{i\in I}B_i$

2.2 $\bigcap_{i\in I}A_i\subseteq\bigcap_{i\in I}B_i$

3. กำหนดให้ $\{A_i : i\in I\}$ และ $\{B_j : j\in J\}$ เป็นการรวมกันอยู่ของเซตในรูปดรรชนี จงพิสูจน์ว่า

3.1 $\bigcup_{i\in I}A_i-\bigcup_{j\in J}B_j=\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J}(A_i-B_j)\right)$

3.2 $\bigcap_{i\in I}A_i-\bigcup_{j\in J}B_j=\bigcap_{i\in I}\left(\bigcup_{j\in J}(A_i-B_j)\right)$

3.3 ถ้าแต่ละ $i\in I$ มี $j\in J$ ซึ่ง $B_j\subseteq A_i$ แล้ว $\bigcap_{j\in J}B_j\subseteq\bigcap_{i\in I}A_i$

บทที่ 5

การเรียงอันดับบางส่วน

5.1 เซตซึ่งเรียงอันดับบางส่วนได้

บทนิยาม 5.1.1 เรียกความสัมพันธ์ r บนเซต P ว่า **การเรียงอันดับบางส่วน** (partial ordering) ก็ต่อเมื่อ r มีสมบัติสะท้อน ปฏิสมมาตร และถ่ายทอด โดยทั่วไปนิยามเขียน $\precsim$ แทนอันดับที่ละส่วน และเรียกคู่อันดับ $(P, \precsim)$ ว่า**เซตซึ่งเรียงอันดับบางส่วนได้** (partially ordered set) หรือ **โพเซต** (poset)

สำหรับโพเซต $(P, \precsim)$ นิยามความสัมพันธ์ $\prec$ บน P โดยสำหรับ $a, b \in P$

$$a \prec b \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a \precsim b \ \text{ และ } \ a \neq b$$

ตัวอย่าง 5.1.2 กำหนดให้ $P = \{1, 2, 3\}$ จงพิจารณาว่าข้อใดเป็นการเรียงอันดับบางส่วนบน P

1. ความสัมพันธ์เอกลักษณ์
2. ความสัมพันธ์เซตว่าง
3. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่า"
4. ความสัมพันธ์ "น้อยกว่าหรือเท่ากับ"
5. ความสัมพันธ์ "หารลงตัว"

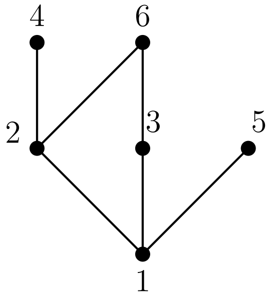
ตัวอย่างโพเซตอื่นๆ เช่น $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{N}, |)$ และ $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง

ในกรณีที่เซต P เป็นเซตจำกัดที่ไม่เซตว่าง นิยมแทน $(P, \precsim)$ ด้วย**แผนภาพเฮสเซ (Hasse diagram)** ซึ่งประกอบไปด้วยจุดหรือวงกลมเล็กๆแทนสมาชิกใน P และส่วนของเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด a และจุด b เมื่อ $a \prec b$ และไม่มี $c \in P$ ซึ่ง $a \prec c \prec b$ โดยจุด b จะถูกเขียนไว้เหนือจุด a ดังตัวอย่างต่อไปนี้

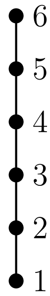
1. $(\mathbb{N}, \leq)$ 2. $(\mathbb{Z}, \leq)$ 3. $(\mathbb{R}, \leq)$

ตัวอย่าง 5.1.3 ให้ $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ จงเขียนแผนภาพเฮสเซของโพเซตต่อไปนี้

1. $(P, |)$



2. $(P, \leq)$



ตัวอย่าง 5.1.4 จงเขียนแผนภาพเฮสเซของโพเซต $(P, |)$ เมื่อกำหนดให้

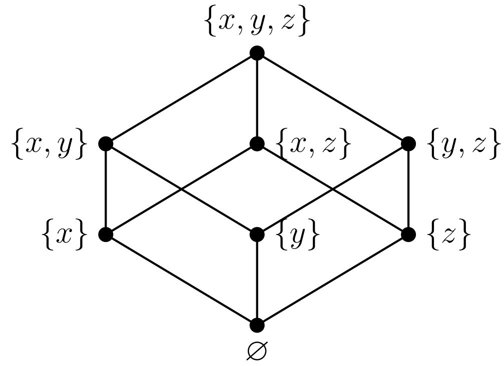
1. $P = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

2. $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

3. $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16\}$

4. $P = \{1, 2, 3, ..., 20\}$

ตัวอย่าง 5.1.5 จงเขียนแผนภาพเฮสเซของโพเซต $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{x, y, z\}$



ตัวอย่าง 5.1.6 จงเขียนแผนภาพเฮสเซของโพเซต $(P, \subseteq)$ เมื่อกำหนดให้

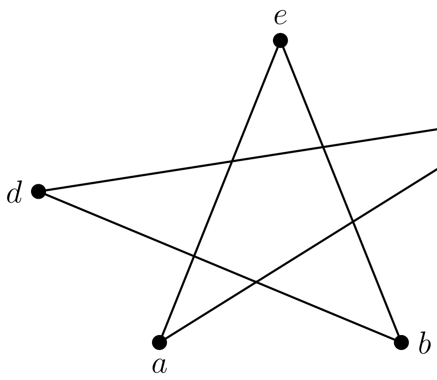
1. $P = \mathcal{P}(\{1, 2\})$

2. $P = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

3. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

4. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\}$

ตัวอย่าง 5.1.7 จากแผนภาพเฮสเซของโพเซต จงหาโพเซตและอันดับบางส่วน



บทนิยาม 5.1.8 ให้ $(P, \precsim)$ เป็นโพเซต m และ n เป็นสมาชิกใน P จะกล่าวว่า

1. m เป็น**สมาชิกตัวใหญ่เฉพาะกลุ่ม (maximal element)** ของ P
ก็ต่อเมื่อ ไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $m \prec x$ นั่นคือ $\forall x \in P, m \precsim x \to m = x$
M เป็น**สมาชิกตัวใหญ่สุด (the greatest element)** ก็ต่อเมื่อ $x \precsim M$ ทุก ๆ $x \in P$

2. n เป็น**สมาชิกตัวเล็กเฉพาะกลุ่ม (minimal element)** ของ P
ก็ต่อเมื่อ ไม่มี $x \in P$ ซึ่ง $x \prec n$ นั่นคือ $\forall x \in P, x \precsim n \to n = x$
N เป็น**สมาชิกตัวเล็กสุด (the least element)** ก็ต่อเมื่อ $N \precsim x$ ทุก ๆ $x \in P$

ตัวอย่าง 5.1.9 จงหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซต $(P, |)$ เมื่อ

1. $P = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

3. $P = \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$

2. $P = \{2, 4, 6, 8, 9, 10\}$

4. $P = \{2, 3, ..., 20\}$

ตัวอย่าง 5.1.10 จงหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซต $(P, \subseteq)$ เมื่อ

1. $P = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}, \{2\}\}$

2. $P = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$

3. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$

4. $P = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}\}$

ตัวอย่าง 5.1.11 จงหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซตต่อไปนี้

1. $(\mathbb{N}, \leq)$
2. $(\mathbb{Z}, \leq)$
3. $(\mathbb{R}, \leq)$
4. $(\mathbb{N}, |)$

ทฤษฎีบท 5.1.12 ถ้าโพเซตมีสมาชิกตัวใหญ่สุดจะได้มีได้เพียงตัวเดียว และถ้าโพเซตมีสมาชิกตัวเล็กสุดจะได้มีได้เพียงตัวเดียว

ทฤษฎีบท 5.1.13 กำหนดให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต จะได้ว่า

1. ถ้า $(P, \preceq)$ มีสมาชิกตัวใหญ่สุดเป็น M แล้ว M จะเป็นสมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม
2. ถ้า $(P, \preceq)$ มีสมาชิกตัวเล็กสุดเป็น N แล้ว N จะเป็นสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม

บทนิยาม 5.1.14 ให้ $(P, \precsim)$ เป็นโพเซต และ $B \subseteq P$

1. เรียกสมาชิก $a \in P$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\quad a \precsim x \quad$ ทุก ๆ $x \in B$
   ว่า **ขอบเขตล่าง (lower bound)** ของ B
   และให้ $L(B)$ แทนเซตของขอบเขตล่างทั้งหมดของ B นั่นคือ

$$L(B) = \{a \in P : a \precsim x \text{ ทุก ๆ } x \in B\}$$

2. เรียกสมาชิก $b \in P$ ที่สอดคล้องเงื่อนไข $\quad x \precsim b \quad$ ทุก ๆ $x \in B$
   ว่า **ขอบเขตบน (upper bound)** ของ B
   และให้ $U(B)$ แทนเซตของขอบเขตบนทั้งหมดของ B นั่นคือ

$$B(U) = \{b \in P : x \precsim b \text{ ทุก ๆ } x \in B\}$$

ตัวอย่าง 5.1.15 พิจารณา $(\mathbb{N}, |)$ จงหา $L(B)$ และ $U(B)$ เมื่อกำหนดให้

1. $B = \{1, 2\}$
2. $B = \{2, 3, 6, 12\}$
3. $B = \{3, 5, 9, 15\}$
4. $B = \{3, 9, 12, 18\}$
5. $B = \{30, 45, 75\}$
6. $B = \{50, 125, 325\}$

ตัวอย่าง 5.1.16 พิจารณา $(\mathbb{R}, \leq)$ จงหา $L(B)$ และ $U(B)$ เมื่อกำหนดให้

1. $B = (0, 1)$
2. $B = [0, 1]$
3. $B = [-2, 5] \cup (6, 9)$
4. $B = \{1, 2, 3\}$

ตัวอย่าง 5.1.17 พิจารณา $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ โดยที่ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $L(B)$ และ $U(B)$ เมื่อ

1. $B = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$
2. $B = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}\}$
3. $B = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$
4. $B = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$

ทฤษฎีบท 5.1.18 ให้ $(P, \precsim)$ เป็นโพเซต และ $\varnothing \neq B \subseteq P$ ถ้า $\precsim_B$ เป็นความสัมพันธ์บน B ซึ่งสอดคล้อง

$$\forall x, y \in B\,, x \precsim_B y \;\leftrightarrow\; x \precsim y$$

แล้ว $(B, \precsim_B)$ เป็นโพเซต เรียกว่า**สับโพเซต (subposet)** ของ $(P, \precsim)$ เขียนแทนด้วย $(B, \precsim)$

บทนิยาม 5.1.19 ให้ $(P, \precsim)$ เป็นโพเซต และ $\varnothing \neq B \subseteq P$ ถ้า $L(B)$ และ $U(B)$ ไม่ใช่เซตว่าง

1. ถ้า a เป็นสมาชิกตัวใหญ่สุดของ $(L(B), \precsim)$ เรียก a ว่า**ขอบเขตล่างมากสุด (greatest lower bound หรือ infimum)** ของ B เขียนแทนด้วย inf$B$

2. ถ้า b เป็นสมาชิกตัวเล็กสุดของ $(U(B), \precsim)$ เรียก b ว่า**ขอบเขตบนน้อยสุด (least upper bound หรือ supremum)** ของ B เขียนแทนด้วย sup$B$

ตัวอย่าง 5.1.20 จงหา inf$B$ และ sup$B$ ของตัวอย่าง 5.1.15–5.1.17

ทฤษฎีบท 5.1.21 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $B \subseteq P$ ถ้า B มีขอบเขตล่างมากสุด แล้วมีขอบเขตล่างมากสุดเพียงตัวเดียว และถ้า B มีขอบเขตบนน้อยสุด แล้วมีขอบเขตบนน้อยสุดเพียงตัวเดียว

บทนิยาม 5.1.22 ให้ $(P, \preceq)$ เป็นโพเซต และ $\varnothing \neq B \subseteq P$ ถ้า $\preceq$ มีสมบัติเปรียบเทียบได้ (comparable) บน B จะเรียก $(B, \preceq)$ เป็น **เซตอันดับแบบเชิงเส้น (linearly ordered set)** หรือ **เซตที่เป็นอันดับโดยสิ้นเชิง (totally ordered set)** หรือ **โซ่ (chain)** หรือ **สับเซตเชิงเส้น (linear subset)**

ตัวอย่าง 5.1.23 จงตรวจสอบว่าโพเซตใดต่อไปนี้เป็นโซ่

1. $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{1, 2\}$
2. $(C, \subseteq)$ เมื่อ $C = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$
3. $(A, |)$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 6\}$
4. $(A, |)$ เมื่อ $A = \{1, 2, 4, 8\}$
5. $(\mathbb{N}, |)$
6. $(\mathbb{N}, \leq)$ และ $(\mathbb{R}, \leq)$

บทนิยาม 5.1.24 จะกล่าวว่าความสัมพันธ์ r บนเซต A สอดคล้อง **กฎไตรวิภาค** (trichotomy law) ถ้าทุก ๆ $x, y \in A$ เป็นจริงเพียงอย่างเดียวใน 3 ข้อต่อไปนี้

1. $x \, r \, y$
2. $x = y$
3. $y \, r \, x$

ทฤษฎีบท 5.1.25 ให้ $(P, \precsim)$ เป็นโพเซต จะได้ว่า

$$(P, \precsim) \text{ เป็นโซ่ ก็ต่อเมื่อ } \precsim \text{ สอดคล้องไตรวิภาค}$$

แบบฝึกหัด 5.1

1. กำหนดให้ $A = \{a, b, c, d\}$ จงพิจารณาว่าความสัมพันธ์บน A ต่อไปนี้มีข้อใดเป็นโพเซต

   1.1 $r = \{(a, b), (b, a)\}$

   1.2 $r = \{(c, d), (c, c)\}$

   1.3 $r = \{(a, a), (b, b)\}$

   1.4 $r = \{(d, c)\}$

2. จงเขียนแผนภาพเฮสเซของโพเซต $(P, |)$ พร้อมทั้งหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซตเหล่านั้น

   2.1 $P = \{1, 2, 4, 8\}$

   2.2 $P = \{2, 8, 12, 15\}$

   2.3 $P = \{3, 6, 9, 12, 15\}$

   2.4 $P = \{2, 4, 8, 24, 60\}$

   2.5 $P = \{3, 5, 6, 15, 18, 48\}$

   2.6 $P = \{2, 3, 4, .., 30\}$

3. จงเขียนแผนภาพเฮสเซของโพเซต $(P, \subseteq)$ พร้อมทั้งหา สมาชิกตัวใหญ่สุด สมาชิกใหญ่เฉพาะกลุ่ม สมาชิกตัวเล็กสุด และสมาชิกเล็กเฉพาะกลุ่ม ของโพเซตเหล่านั้น

   3.1 $P = \{\varnothing, \{2\}, \{2, 3\}$

   3.2 $P = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{2\}\}$

   3.3 $P = \{\{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

   3.4 $P = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}\}$

4. พิจารณา $(\mathbb{N}, |)$ จงหา $L(B)$, $U(B)$, inf$B$ และ sup$B$ (ถ้ามี)

   4.1 $B = \{4, 5, 10\}$

   4.2 $B = \{6, 8, 12, 18\}$

   4.3 $B = \{5, 10, 25, 45, 50\}$

   4.4 $B = \{100, 150, 450\}$

5. พิจารณา $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{1, 2, 3, 4\}$ จงหา $L(B)$, $U(B)$, inf$B$ และ sup$B$ (ถ้ามี)

   5.1 $B = \{\varnothing\}$

   5.2 $B = \{\{1\}, \{3\}\}$

   5.3 $B = \{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{2, 3\}\}$

   5.4 $B = \{\{1, 2, 3, 4\}\}$

6. พิจารณา $(\mathbb{R}, \leq)$ จงหา $L(B)$, $U(B)$, inf$B$ และ sup$B$ (ถ้ามี)

   6.1 $B = (-1, 3)$

   6.2 $B = (-3, 0]$

   6.3 $B = (1, 2) \cup (3, 4)$

   6.4 $B = (1, 3) \cup \{5\}$

   6.5 $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

   6.6 $B = \{3n : n \in \mathbb{Z}\}$

7. จงตรวจสอบว่าโพเซตใดต่อไปนี้เป็นโซ่

   7.1 $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ เมื่อ $A = \{\varnothing\}$

   7.2 $(C, \subseteq)$ เมื่อ $C = \{\{1\}, \{2\}, \{1, 3\}\}$

   7.3 $(E, |)$ เมื่อ $E =$ เซตของจำนวนคู่บวก

   7.4 $(A, |)$ เมื่อ $A = \{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

8. ให้ A และ B เป็นสับเซตโพเซตของ $(\mathbb{R}, \leq)$ ซึ่งมีขอบเขตบนน้อยสุดและขอบเขตล่างมากสุด ถ้า $A \subseteq B$ จงพิสูจน์ $\quad$ inf$(B) \leq$ inf$(A) \leq$ sup$(A) \leq$ sup(B)

9. ใน $(\mathbb{R}, \leq)$ กำหนดให้ $A_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : x < \alpha\}$ เมื่อ $\alpha \in \mathbb{R}$ จงแสดงว่า sup$(A_\alpha) = \alpha$

5.2 เซตที่เป็นอันดับดีแล้ว

บทนิยาม 5.2.1 เรียกโพเซต $(P, \preceq)$ ว่า **เซตที่เป็นอันดับดีแล้ว (well–ordering set)** ก็ต่อเมื่อทุกสับโพเซตที่ไม่ใช่เซตว่างมีสมาชิกตัวเล็กสุด

ตัวอย่าง 5.2.2 จงตรวจสอบโพเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

1. $(\{1, 2, 3\}, \leq)$
2. $(\{-3, -1, 1, 5, 9\}, \leq)$
3. $(\mathbb{N}, \leq)$
4. $(\mathbb{R}, \leq)$

ตัวอย่าง 5.2.3 จงตรวจสอบโพเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

1. $(\{1, 2, 3\}, |)$
2. $(\{1, 2, 4, 8\}, |)$
3. $(\{3, 9, 27\}, |)$
4. $(\mathbb{N}, |)$

ตัวอย่าง 5.2.4 จงตรวจสอบโพเซต $(P, \subseteq)$ ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

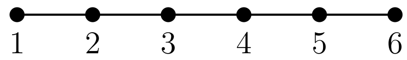
1. $P = \{\varnothing\}$
2. $P = \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}\}$
3. $P = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$
4. $P = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}\}$

บทนิยาม 5.2.5 ให้ $(P, \precsim)$ เป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว และ $a, b \in P$ ถ้า

$$a \precsim b \quad \text{และ} \quad a \neq b$$

เรียก b ว่า**ตัวตามหลัง (successor)** ของ a หรือเรียก a ว่า**ตัวนำหน้า (predecessor)** ของ b

ตัวอย่างเช่น $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq)$ แสดงดังแผนภาพ



สรุปได้ดังตาราง

สมาชิก	ตัวนำหน้า	ตัวตามหลัง	ตัวนำหน้าตัวสุดท้าย	ตัวตามหลังตัวแรก
1	ไม่มี	2, 3, 4, 5, 6	ไม่มี	2
2	1	3, 4, 5, 6	1	3
3	1, 2	4, 5	2	4
4	1, 2, 3	5, 6	3	5
5	1, 2, 3, 4	6	4	6
6	1, 2, 3, 4, 5	ไม่มี	5	ไม่มี

ตัวอย่าง 5.2.6 พิจารณาเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว $(\{1, 2, 4, 8, 16\}, |)$ จงเติมตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

สมาชิก	ตัวนำหน้า	ตัวตามหลัง	ตัวนำหน้าตัวสุดท้าย	ตัวตามหลังตัวแรก
1				
2				
4				
8				
16				

ตัวอย่าง 5.2.7 พิจารณาเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว $(\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}, \subseteq)$ จงเติมตารางต่อไปนี้ให้สมบูรณ์

สมาชิก	ตัวนำหน้า	ตัวตามหลัง	ตัวนำหน้าตัวสุดท้าย	ตัวตามหลังตัวแรก
$\varnothing$				
$\{1\}$				
$\{2\}$				
$\{1, 2\}$				

กำหนดให้ ω แทนเซตของจำนวนธรรมชาติ หมายถึง

$$\omega = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

ให้ $(P, \precsim)$ เป็นโพเซต จงตอบคำถามต่อไปนี้

1. ให้ $P = \omega$ และนิยาม

$$\begin{aligned} x \precsim y \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad & (\ x \text{ เป็นจำนวนคู่} \ \wedge \ y \text{ เป็นจำนวนคี่}\ ) \\ \vee \ & (\ x \text{ เป็นจำนวนคู่} \ \wedge \ y \text{ เป็นจำนวนคู่} \ \wedge \ x < y\ ) \\ \vee \ & (\ x \text{ เป็นจำนวนคี่} \ \wedge \ y \text{ เป็นจำนวนคี่} \ \wedge \ x < y\ ) \end{aligned}$$

   จงวาดแผนภาพเฮสเซของ $(P, \precsim)$ และพิจารณาตัวนำหน้าตัวสุดท้าย และตัวตามหลังตัวแรก ของ 0 และ 1

2. ให้ $P = \omega \cup \{\omega\}$ และนิยาม

$$x \precsim y \text{ ก็ต่อเมื่อ } (x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x < y) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega)$$

   จงวาดแผนภาพเฮสเซของ $(P, \precsim)$ และพิจารณาตัวนำหน้าตัวสุดท้าย และตัวตามหลังตัวแรก ของ 0 และ ω

ทฤษฎีบท 5.2.8 หลักการอุปนัยเชิงอนันต์ (Principle of Transfinite induction)
กำหนดให้ $(W, \preceq)$ เป็นเซตที่อันดับดีแล้ว และ $P(x)$ แทนข้อความซึ่งมีค่าความจริงเป็นจริงหรือเท็จสำหรับแต่ละสมาชิก $x \in W$ ถ้าข้อความ

ถ้า $P(y)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ ตัวนำหน้า y ของ x แล้ว $P(x)$ เป็นจริง

เป็นจริง แล้ว $P(x)$ เป็นจริงสำหรับทุก ๆ $x \in W$

ประยุกต์หลักการอุปนัยเชิงอนันต์กับเซตที่เป็นอันดับดีแล้วของจำนวนธรรมชาติ $(\omega, \leq)$ จะได้ข้อความต่อไปนี้

$[\forall n \in \omega, [\forall y \in \omega,\ y < n \to P(y)$ เป็นจริง$] \to P(n)$ เป็นจริง$] \to \forall n \in \omega, P(n)$ เป็นจริง... (ก)

ทฤษฎีบท 5.2.9 ข้อความ (ก) สมมูลกับข้อความต่อไปนี้

$[(P(0)$ เป็นจริง $) \wedge \forall n \in \omega, [P(n)$ เป็นจริง $\to P(n+1)$ เป็นจริง$] \to \forall n \in \omega, P(n)$ เป็นจริง

แบบฝึกหัด 5.2

1. จงตรวจสอบโพเซตต่อไปนี้ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

   1.1 $(\{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}, \leq)$

   1.2 $(\{..., -5, -4, -3, -1, 0\}, \leq)$

   1.3 $(\{-x : x \in \mathbb{N}\}, \leq)$

   1.4 $(\mathbb{Q}, \leq)$

   1.5 $(\{1, 3, 6, 12, 24\}, |)$

   1.6 $(\{-1, 2, 4, 6, 12\}, |)$

   1.7 $(\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{1\}\}, \subseteq)$

   1.8 $(\{\varnothing, \{1, \varnothing\}, \{1\}\}, \subseteq)$

2. โพเซต $(P, |)$ เป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

   2.1 $P = \{2^{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$

   2.2 $P = \{2^n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$

   2.3 $P = \{3^n : n \in \mathbb{N}\}$

   2.4 $P = \{n^3 : n \in \mathbb{N}\}$

3. พิจารณาโพเซต $(\omega, \precsim)$ เมื่อนิยาม

$$m \precsim n \text{ ก็ต่อเมื่อ } \exists c \in \omega,\, n = cm$$

   ว่าเป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้วหรือไม่

4. ให้ $P = \omega^+ \cup \{\omega^+\}$ เมื่อ $\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$ และนิยาม $x \precsim y$ ก็ต่อเมื่อ

$$(x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x < y) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega^+) \vee (x = \omega \wedge y = \omega^+)$$

   จงวาดแผนภาพเฮสเซของ $(P, \precsim)$ และพิจารณาตัวนำหน้าตัวสุดท้าย และตัวตามหลังตัวแรก ของ 0, ω และ ω^+

5. ให้ (A, r) และ (B, s) เป็นโพเซต ถ้า $(A \times B, t)$ สอดคล้องเงื่อนไข

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \in t \quad \leftrightarrow \quad [(x_1, y_1) \in s \vee (y_1 = y_2 \wedge (x_1, x_2) \in r)]$$

   จงแสดงว่า $(A \times B, t)$ เป็นเซตที่เป็นอันดับดีแล้ว

6. ให้ $(Y, \precsim_Y)$ เป็นโพเซต และกำหนดให้ $f : X \to Y$ เป็นฟังก์ชันแบบหนึ่งต่อหนึ่ง ถ้านิยาม

$$x \precsim_X y \text{ ก็ต่อเมื่อ } f(x) \precsim_Y f(y)$$

   จงแสดงว่าถ้า $\precsim_Y$ เป็นอันดับดีแล้วบน Y แล้ว $\precsim_X$ จะเป็นอันดับดีแล้วบน X

5.3 สัจพจน์ของการเลือก

ในกรณีที่ $A \neq \varnothing$ เราสามารถเลือกสามาชิกตัวหนึ่งจากเซต A ได้เสมอ แต่เมื่อเราหยิบสมาชิกจาก A มากกว่าหนึ่งครั้งโดยเฉพาะกรณีหยิบเป็นจำนวนอนันต์ครั้ง เมื่อ A เป็นเซตอนันต์ในประสบการณ์ของมนุษย์ยังไม่อาจยอมรับว่าทำได้หรือไม่ แม้ว่าเราจะหยิบได้ครั้งแล้วครั้งเล่าอย่างไม่รู้จบก็ตาม

ในกรณีที่ A เป็นเซตอนันต์ที่เป็นอันดับดีแล้ว ทุกสับเซตที่ไม่ใช้เซตว่าง เราเลือกสมาชิกตัวเล็กสุดได้เสมอ และสับเซตมีได้เป็นจำนวนอนันต์เซตในกรณีนี้ทำให้เชื่อมั่นได้ว่าสามารถทำได้

กำหนดให้ $A \neq \varnothing$ เป็นโพเซต ถ้า A ไม่มีสมาชิกตัวใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มแล้วจะได้ว่ามีอันดับแบบอนันต์ที่เพิ่มขึ้น

$$x_1 < x_2 < x_3 < ...$$

ของสมาชิกใน A พิสูจน์ได้คือ เนื่องจาก A ไม่ใช่เซตว่างจึงสามารถเลือกสมาชิกมาหนึ่งตัว เรียกว่า x_1 ต่อไปสมมติโดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์จะได้ว่ามีอันดับสมาชิกใน A ดังนี้

$$x_1 < x_2 < ... < x_n$$

และนิยามเซต

$$A_n = \{x \in A : x > x_n\}$$

เห็นได้ชัดว่า $A_n \neq \varnothing$ และไม่มีสมาชิกตัวใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม เราจึงเลือกหยิบสมาชิกใน A_n มาได้อย่างน้อยหนึ่งตัว เรียกว่า x_{n+1} ซึ่ง

$$x_1 < x_2 < ... < x_n < x_{n+1}$$

โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์สามารถนิยามเซตได้ดังนี้

$$S_n = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n\}$$

ทำให้ได้ว่า

$$S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n$$

แล้ว S เป็นเซตของสมาชิกที่เป็นอันดับอนันต์แบบเพิ่มขึ้นตามต้องการ

วิธีการเลือกที่ผ่านมาถือได้รับการยอมรับ แต่เป็นการเลือกที่ไม่แจ่มชัด ในปี 1904 แซร์มิโลได้ให้ความสำคัญกับการเลือกดังกล่าวจึงได้กำหนดเป็นหนึ่งสัจพจน์ในทฤษฎีเซต ซึ่งเรียกว่า **สัจพจน์ของการเลือก** (Axiom of choice)

บทนิยาม 5.3.1 กำหนดให้ A เป็นเซต เรียกฟังก์ชัน

$$F : \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\} \to A$$

ว่า **ฟังก์ชันเลือก (Choice function)** ถ้าสำหรับแต่ละ $B \in \mathcal{P}(A) - \{\varnothing\}$ จะได้ว่า $F(B) \in B$ และเรียก $F(B)$ ว่า **ตัวแทน (representative)** ของ B

ตัวอย่าง 5.3.2 จงหาฟังก์ชันการเลือกทั้งหมดของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{1\}$

2. $A = \{1, 2\}$

3. $A = \{1, 2, 3\}$

สัจพจน์ 5.3.3 สัจพจน์ของการเลือก (Axiom of Choice)
มีฟังก์ชันเลือกสำหรับทุกเซต

ทฤษฎีบท 5.3.4 สัจพจน์ของการเลือกสมมูลกับข้อความต่อไปนี้

ถ้า $\mathbb{A}$ เป็นเซตที่ประกอบด้วยสมาชิกที่ต่างกันที่ไม่ใช่เซตว่าง และเป็นเซตต่างสมาชิกกัน แล้วจะได้ว่ามีเซต C ซึ่งประกอบด้วยสมาชิกตัวหนึ่งและตัวเดียวเท่านั้นจากแต่ละเซตใน $\mathbb{A}$ โดยเรียกเซต C นี้ว่า **เซตของการเลือก** (choice set)

ทฤษฎีบทที่มีชื่อเสียงเกี่ยวกับการเลือกคือ

1. **ทฤษฎีบทการเรียงเป็นอันดับอย่างดี** (Well Ordering Theorem) ที่กล่าวไว้ว่า มีความสัมพันธ์การเป็นอันดับดีแล้วสำหรับเซตทุกเซต

2. **บทตั้งของซอร์น** (Zorn's Lemma) ที่กล่าวไว้ว่า ถ้าแต่ละสับเซตเชิงเส้นของเซตของโพเซต P มีขอบเขตบนใน P แล้ว P จะมีสมาชิกตัวใหญ่สุดเฉพาะกลุ่ม

สุดท้ายเราพิสูจน์ได้ว่า ทฤษฎีบททั้ง 2 สมมูลกับสัจพจน์ของการเลือก หรือกล่าวได้อีกนัยได้ว่า ทั้ง 3 สิ่งที่ได้มีความเดียวกันในทางทฤษฎีเซต

แบบฝึกหัด 5.3

1. จงหาฟังก์ชันการเลือกทั้งหมดของเซตต่อไปนี้

   1.1 $A = \{a, b, c\}$ 1.2 $A = \{1, 2, 3, 4\}$

2. เซตว่างมีฟังก์ชันเลือกหรือไม่ ถ้ามีคือฟังก์ชันใด

3. ให้ A มีสมาชิกมากกว่าหนึ่งตัว จงแสดงว่ามีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่งแบบทั่วถึง $f : A \to A$ ซึ่ง $f(x) \neq x$ สำหรับแต่ละ $x \in A$

4. กำหนดให้ $\mathbb{A}$ เป็นเซตที่ไม่ว่าง แต่ละคู่สมาชิกของ $\mathbb{A}$ เป็นเซตต่างสมาชิก จงแสดงว่ามีฟังก์ชัน f ซึ่ง Dom$(f) = \mathbb{A}$และแต่ละ $A \in \mathbb{A}$ จะได้ว่า $f(A) \in A$

5. จงแสดงว่าบทตั้งของซอร์นสมมูลกับข้อความ

   ถ้า A เป็นเซตอุปนัย และ $a \in A$ แล้ว A จะประกอบไปด้วยสมาชิกใหญ่สุดเฉพาะกลุ่มที่มากกว่าหรือเท่ากับ a

บทที่ 6

จำนวนธรรมชาติ

จำนวนคืออะไร ไม่เคยมีใครเห็นจำนวนมาก่อนสิ่งที่รู้จักเช่น 2 และ 3 เป็นสัญลักษณ์ที่มนุษย์กำหนดขึ้นเพื่อใช้แทนจำนวนเท่านั้น เป็นเพียงสิ่งที่เราจินตนาการขึ้นมา เพื่อให้เราเข้าใจตรงกันเมื่อนึกถึงสิ่งเหล่านั้น

มนุษย์รู้จักการนับหรือใช้ระบบจำนวนมานานแล้ว และวิชาการต่าง ๆ ก็ถูกพัฒนาในทุกวันบนรากฐานของจำนวนทั้งสิ้น (ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ : 2536)

6.1 สัจพจน์เปอาโน

เราเริ่มต้นมองหาเซตที่เหมาะสมเพื่อนิยาม **จำนวนธรรมชาติ** คำว่า **เซตที่เหมาะสม** หมายถึงเซตที่สามารถเป็น **จำนวน** ได้อย่างสมบูรณ์ ในปี 1908 แซร์มิโล ได้เสนอเซต

$$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, ...$$

แทนจำนวนธรรมชาติ $0, 1, 2, 3, ...$ ตามลำดับ แต่นอยมันน์ได้เสนอกลุ่มเซตอีกลักษณะหนึ่ง ที่มีสมบัติพิเศษสามารถประยุกต์ในการพัฒนาระบบจำนวนได้ทุกรูปแบบ จนกลายเป็นมาตรฐานของการแสดงสัญลักษณ์ของจำนวนธรรมชาติ โดยเริ่มต้นจากเซตที่ไม่มีอะไรเลยคือ $\varnothing$ เป็นที่ยอมรับกันว่าสัญลักษณ์ 0 และเซต $\{\varnothing\}$ แทนนามธรรมของการมีอยู่หนึ่ง ด้วยแนวคิดในทำนองเดียวกันจึงนิยามเซตแทนจำนวนธรรมชาติสี่จำนวนแรกได้ดังนี้

$$\begin{aligned}
&0 := \varnothing \\
&1 := \{\varnothing\} \\
&2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \\
&3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}
\end{aligned}$$

จากการนิยามจะได้สมบัติดังนี้

$$0 \in 1 \in 2 \in 3 \in ...$$

และ

$$0 \subseteq 1 \subseteq 2 \subseteq 3 \subseteq ...$$

เมื่อพิจารณานิยามของจำนวนธรรมชาติ

$$
\begin{aligned}
&0 := \varnothing \\
&1 := \{\varnothing\} = \varnothing^{+} = 0^{+} \\
&2 := \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \varnothing^{++} = 1^{+} \\
&3 := \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \varnothing^{+++} = 2^{+}
\end{aligned}
$$

ซึ่งสอดคล้องกับความหมายเชิงนามธรรมของจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวน

$$0, 1, 2, 3, ...$$

เป็นตัวตามหลังของกันและกันสืบเนื่องกันไปโดยมีต้นกำเนิดจาก 0 เมื่อพิจารณาบทนิยามของตัวตามหลัง และสัจพจน์ของเซตอุปนัย จะเห็นได้ว่าจำนวนธรรมชาติแต่ละจำนวนเป็นสมาชิกของเซตอุปนัยทุก ๆ เซต

บทนิยาม 6.1.1 เรียกเซตอนันต์ที่เล็กที่สุดในทฤษฎีบท 2.5.6 ว่า **เซตของจำนวนธรรมชาติ (The set of natural numbers)** เขียนแทนด้วย ω

จากบทนิยามจะได้ว่า

$$
\begin{aligned}
x \in \omega \quad &\leftrightarrow \quad x \text{ เป็นจำนวนธรรมชาติ} \\
&\leftrightarrow \quad x \text{ เป็นสมาชิกของเซตอุปนัยทุก ๆ เซต}
\end{aligned}
$$

และทำให้สรุปได้ว่า ω เป็นเซตอุปนัยที่เล็กที่สุด (เห็นได้ชัดจากพิสูจน์ในทฤษฎีบท 2.5.6) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งเรียกว่า **หลักอุปนัย** ของ ω กล่าวคือ

เซตอุปนัยที่เป็นสับเซตของ ω จะมีเพียง ω เท่านั้น

โดยการนำไปใช้พิสูจน์โดยการเขียนเซต

$$S = \{n \in \omega : P(n)\}$$

ถ้าพิสูจน์ได้ว่า T เป็นเซตอุปนัยแล้วเราจะสรุปจากหลักอุปนัยของ ω ได้ว่า S คือ ω หลักการนี้เรียกว่า **การพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)**

มีนักคณิตศาสตร์หลายท่านพยายามสร้างระบบสัจพจน์ของระบบจำนวนขึ้น โดยกำหนดสัจพจน์ด้วยสมบัติเบื้องต้นของจำนวนธรรมชาติ ระบบสัจพจน์ที่มีชื่อเสียงและเป็นที่ยอมรับคือ **สัจพจน์เปอาโน (Peano's postulates)** ซึ่งกำหนดโดยนักคณิตศาสตร์ชาวอิตาลีที่ชื่อว่า จูเซปเป เปอาโน (Giuseppe Peano: 1858–1932) กล่าวถึงสิ่งที่กำหนดการมีจริงของจำนวนธรรมชาติ (natural number) ไว้ 5 ข้อดังนี้

(P1) มีจำนวนธรรมชาติที่เรียกว่า **ศูนย์ (zero)** เพียงจำนวนเดียวเท่านั้น
$0 \in \omega$

(P2) จำนวนธรรมชาติทุกจำนวนต้องมี **ตัวตามหลัง (successor)** ที่เป็นจำนวนธรรมชาติเพียงตัวเดียวเท่านั้น
$\forall n \in \omega,\, n^+ \in \omega$

(P3) ศูนย์ไม่เป็นตัวตามหลังของจำนวนธรรมชาติใด
$\forall n \in \omega,\, n^+ \neq 0$

(P4) ถ้าจำนวนธรรมชาติสองจำนวนมีตัวตามหลังตัวเดียวกัน แล้วจำนวนธรรมชาติทั้งสองย่อมเป็นจำนวนเดียวกัน
$\forall n, m \in \omega,\, n^+ = m^+ \to n = m$

(P5) ถ้าเซต S เป็นสับเซตของจำนวนธรรมชาติที่สอดคล้อง 2 เงื่อนไขต่อไปนี้
(1) 0 เป็นสมาชิกของ S
(2) ถ้า n เป็นสมาชิกของ S แล้วตัวตามหลังของ n เป็นสมาชิกของ S
เราจะได้ว่าเซต S เป็นเซตของจำนวนธรรมชาติทั้งหมด
$\forall S \subseteq \omega, [(0 \in S) \land (\forall n \in S,\, n \in S \to n^+ \in S)] \to (S = \omega)$

ในที่นี้ **ศูนย์** เป็นจำนวนเริ่มต้นของจำนวนธรรมชาติ และ **ตัวตามหลัง** คือจำนวนที่ถัดจากตัวที่สนใจ เช่น 1 เป็นตัวตามหลังของ 0 ซึ่งเราจะเขียนเป็นแผนภาพได้ดังนี้

$$0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots$$

ตัวอย่าง 6.1.2 ให้ $S = \{a, b, c, d\}$ จงตรวจสอบว่าแผนภาพต่อไปนี้สอดคล้องสัจพจน์เปอาโนหรือไม่เพราะเหตุใด

1. $$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

2. $$\begin{tikzcd} a \arrow[r] & b \arrow[r] & c \arrow[r] & d \arrow[loop right] \end{tikzcd}$$

3. $$\begin{tikzcd} & & & d \arrow[dl] \\ a \arrow[rr] & & b \arrow[rr] & & c \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

4. $$\begin{tikzcd} d \arrow[d] & c \arrow[l] \\ a \arrow[r] & b \arrow[u] \end{tikzcd}$$

ตัวอย่าง 6.1.3 ให้ $S = \{a, a', a'', a''', ...\}$ จงตรวจสอบว่าแผนภาพต่อไปนี้สอดคล้องสัจพจน์เปอาโน หรือไม่เพราะเหตุใด

1. $$a \longrightarrow a' \longrightarrow a'' \longrightarrow a''' \longrightarrow \cdots$$

2. $$\begin{tikzcd} & & a''' \arrow[dl] & & \\ a \arrow[r] & a' \arrow[r] & a'' \arrow[u] \arrow[r] & a'''' \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

ตัวอย่าง 6.1.4 ให้ $S = \{a, a', a'', a''', ...\} \cup \{b, b', b'', b''', ...\}$ จงตรวจสอบว่าแผนภาพต่อไปนี้สอดคล้องสัจพจน์เปอาโน หรือไม่เพราะเหตุใด

$$a \longrightarrow a' \longrightarrow a'' \longrightarrow a''' \longrightarrow \cdots$$
$$b \longrightarrow b' \longrightarrow b'' \longrightarrow b''' \longrightarrow \cdots$$

เราพิสูจน์ว่าสมบัติเบื้องต้นของจำนวนธรรมชาติ ที่กล่าวไว้ในสัจพจน์เปอาโน สามารถพิสูจน์ได้ในระบบทฤษฎีเซต นั่นคือ ω ในสัจพจน์เปอาโนเป็นเซตอุปนัยที่เล็กที่สุด

ในสัจพจน์เปอาโน (P5) จะถูกนำไปใช้พิสูจน์ข้อความต่าง ๆ เกี่ยวกับประพจน์ของจำนวนธรรมชาติซึ่งเรียกว่า **อุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ (Mathematical induction)** กล่าวคือ
ให้ $S \subseteq \omega$ ซึ่งสอดคล้องสมบัติต่อไปนี้

1. $0 \in S$ และ
2. ถ้า $n \in S$ แล้ว $n^+ \in S$

แล้ว $S = \omega$

ทฤษฎีบท 6.1.5 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n \notin n$

ทฤษฎีบท 6.1.6 ถ้า m เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้ว $m = 0$ หรือมีจำนวนธรรมชาติ p เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $m = p^+$

แบบฝึกหัด 6.1

1. จงพิสูจน์ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน
   (ก) $\forall x, x \in a \in A \to x \in A$
   (ข) $a \in A \to a \subseteq A$
2. จงพิสูจน์ว่า $\forall x, x \in a \in \omega \to x \in \omega$
3. ให้ A และ B เป็นเซตใด ๆ จงแสดงว่าถ้า $A = B$ แล้ว $A^+ = B^+$
4. จงแสดงว่า $A \in \omega$ แล้ว $A^+ \in \omega$
5. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติใดที่เป็นเซตของตัวตามหลัง

6.2 การดำเนินการบนจำนวนธรรมชาติ

บทนิยาม 6.2.1 ให้ m และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้วนิยาม $m+k$ คือ **ผลบวก (Sum)** ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(A1) $m+0=m$ และ

(A2) $m+k^{+}=(m+k)^{+}$

ตัวดำเนินการ $+$ เรียกว่า **การบวก (Addition)** บน ω

ทฤษฎีบท 6.2.2 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n^{+}=1+n$ โดยที่ $0^{+}=1$

ตัวอย่าง 6.2.3 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $2+2$
2. $2+3$
3. $4+3$
4. $5+4$

ทฤษฎีบท 6.2.4 สมบัติการสลับที่
กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m+n=n+m$

ทฤษฎีบท 6.2.5 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
กำหนดให้ m,n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m+(n+k)=(m+n)+k$

ทฤษฎีบท 6.2.6 การมีเอกลักษณ์การบวก
สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n+0=n=0+n$

ทฤษฎีบท 6.2.7 สมบัติการตัดออกสำหรับการบวก
กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$m = n \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad m + k = n + k$$

ตัวอย่าง 6.2.8 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad m + n = m \quad \text{แล้ว} \quad n = 0$$

ทฤษฎีบท 6.2.9 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $m \leq n$ แล้วจะได้ว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติ k เพียงตัวเดียวเท่านั้นซึ่ง $n = m + k$

บทนิยาม 6.2.10 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง $m \leq n$
เรียก k ในทฤษฎีบท 6.2.9 ว่า **ผลต่าง (difference**) ของ m และ n เขียนแทนด้วย $n - m$ ดังนั้น

$$k = n - m \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad n = m + k$$

ทฤษฎีบท 6.2.11 กำหนดให้ m, n, r และ s เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $m \leq n$ และ $r \leq s$ แล้ว

$$n - m = r - s \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad m + s = n + r$$

บทนิยาม 6.2.12 ให้ m และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้วนิยาม $m \cdot k$ คือ **ผลคูณ (Product)** ซึ่งสอดคล้องเงื่อนไขต่อไปนี้

(M1) $m \cdot 0 = 0$ และ

(M2) $m \cdot k^+ = (m \cdot k) + m$

ตัวดำเนินการ $\cdot$ เรียกว่า **การคูณ (Multiplication)** บน ω

ทฤษฎีบท 6.2.13 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n \cdot 0 = 0 = n \cdot 0$

ตัวอย่าง 6.2.14 จงหาค่าต่อไปนี้

1. $1 \cdot 2$
2. $2 \cdot 3$
3. $3 \cdot 5$
4. $8 \cdot 6$

ทฤษฎีบท 6.2.15 สมบัติการสลับที่
กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m \cdot n = n \cdot m$

ทฤษฎีบท 6.2.16 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม
กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m \cdot (n \cdot k) = (m \cdot n) \cdot k$

ทฤษฎีบท 6.2.17 การมีเอกลักษณ์การบวก
สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะได้ว่า $n \cdot 1 = n = 1 \cdot n$

ทฤษฎีบท 6.2.18 สมบัติการแจกแจง
กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า $m \cdot (n + k) = (m \cdot n) + (m \cdot k)$

ทฤษฎีบท 6.2.19 สมบัติการตัดออกสำหรับการคูณ
กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

1. ถ้า $m = n$ แล้ว $m \cdot k = n \cdot k$
2. ถ้า $m \cdot k = n \cdot k$ และ $k \neq 0$ แล้ว $m = n$

ทฤษฎีบท 6.2.20 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$\text{ถ้า} \quad m \cdot n = 0 \quad \text{แล้ว} \quad m = 0 \quad \text{หรือ} \quad n = 0$$

ตัวอย่าง 6.2.21 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า

$$\text{ถ้า} \quad m \cdot n = n \quad \text{และ} \quad m \neq 0 \quad \text{แล้ว} \quad n = 1$$

แบบฝึกหัด 6.2

1. ให้ m และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จงพิสูจน์ว่า

   1.1 $0 + m = m$ 1.2 $k^+ + m = (k + m)^+$

2. ให้ m และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จงพิสูจน์ว่า

   2.1 $0 \cdot m = 0$ และ 2.2 $k^+ \cdot m = (k \cdot m) + m$

3. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

   3.1 $3 + 4$ 3.2 $5 + 7$ 3.3 $10 + 15$ 3.4 $11 + 13$

4. จงหาค่าต่อไปนี้โดยใช้นิยาม

   4.1 $2 \cdot 6$ 4.2 $3 \cdot 7$ 4.3 $5 \cdot 9$ 4.4 $10 \cdot 3$

5. ให้ $\otimes$ เป็นตัวดำเนินการบน ω นิยามโดย

   (ก) $m \otimes 0 = m^{++}$ และ (ข) $m \otimes k^+ = m + (m \otimes k)$

   จงหาค่าต่อไปนี้

   5.1 $1 \otimes 3$ 5.2 $3 \otimes 5$ 5.3 $4 \otimes 7$ 5.4 $7 \otimes 9$

6. ให้ $\otimes$ เป็นตัวดำเนินการบน ω นิยามโดย

   $$2^0 = 1 \quad \text{และ} \quad 2^{k^+} = 2^k \cdot 2$$

   จงแสดงว่า $2^{m+n} = 2^m \cdot 2^n$

7. กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่าถ้า $m = n$ แล้วจะได้ว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่ง $m = n + k$

8. กำหนดให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่าถ้า $m = n + k$ แล้วจะได้ว่าไม่มีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่ง $n = m + k$

9. กำหนดให้ m, n, p, q และ r เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง $m = p + q$ และ $p = n + r$ จงแสดงว่ามีจำนวนธรรมชาติ t ที่ทำให้ $m = n + t$

10. กำหนดให้ m, p, y, q และ z เป็นจำนวนธรรมชาติซึ่ง $x = py$ และ $y = qz$ จงแสดงว่ามีจำนวนธรรมชาติ r ที่ทำให้ $x = rq$

6.3 การเป็นอันดับของจำนวนธรรมชาติ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงความสัมพันธ์ **น้อยกว่าหรือเท่ากับ** $\leq$ บนจำนวนธรรมชาติ ω ซึ่งเป็นเรียงอันดับบางส่วน (โพเซต) และศึกษาสมบัติที่เกิดขึ้นของความสัมพันธ์นี้

บทนิยาม 6.3.1 ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ เรียก m ว่า **น้อยกว่า** (less than) n เขียนแทนด้วย $m < n$ หรือ $n > m$ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนธรรมชาติ k ที่ไม่ใช่ศูนย์ ที่ทำให้ $n = m + k$ สัญลักษณ์ $m \leq n$ เรียกว่า**น้อยกว่าหรือเท่ากับ** หมายถึง $m < n$ หรือ $m = n$

ตัวอย่าง 6.3.2 จงแสดงว่า

1. $3 < 5$
2. $10 > 8$

ทฤษฎีบท 6.3.3 ถ้า n เป็นจำนวนธรรมชาติ แล้ว $0 \leq n$

ทฤษฎีบท 6.3.4 กำหนดให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

1. ถ้า $m < n$ แล้ว $m^+ \leq n$
2. $m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m^+ < n^+$

ทฤษฎีบท 6.3.5 กฎไตรวิภาค (Trichonomy Law)
ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

$$m < n \qquad \text{หรือ} \qquad m > n \qquad \text{หรือ} \qquad m = n$$

ทฤษฎีบท 6.3.6 ความสัมพันธ์ $\leq$ เป็นอันดับดีแล้วบน ω

ทฤษฎีบท 6.3.7 สำหรับแต่ละจำนวนธรรมชาติ n จะไม่มีจำนวนธรรมชาติ m ซึ่ง $n < m < n^+$

ทฤษฎีบท 6.3.8 ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ

ถ้า $m < n$ แล้วจะมีจำนวนธรรมชาติ p ซึ่ง $n = m + p^+$

ทฤษฎีบท 6.3.9 ให้ m, n, p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ

ถ้า $m < n$ และ $q < p$ แล้ว $mq + np < mp + nq$

ทฤษฎีบท 6.3.10 ให้ m, n และ k เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

1. $m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m + k < n + k$
2. $m < n$ ก็ต่อเมื่อ $m \cdot k < n \cdot k$ เมื่อ $k \neq 0$
3. $m = n$ ก็ต่อเมื่อ $m \cdot k = n \cdot k$ เมื่อ $k \neq 0$

ทฤษฎีบท 6.3.11 หลักอาร์คีมีดีส (Archimedean Principle)
ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $n \neq 0$ แล้วจะมีจำนวนธรรมชาติ k ซึ่ง $m < k \cdot n$

แบบฝึกหัด 6.3

1. ให้ m เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า ถ้า $m < 1$ แล้ว $m = 0$
2. จงแสดงว่า ถ้า m เป็นจำนวนธรรมชาติ และ n เป็นจำนวนธรรมชาติที่ไม่ใช่ศูนย์ แล้วจะได้ว่ามีจำนวนธรรมชาติ q, r ที่ทำให้ $m = nq + r$ โดยที่ $r < n$
3. ให้ m และ n เป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า

   3.1 ถ้า $m < n + 1$ แล้ว $m \leq n$

   3.2 ถ้า $m < 1$ แล้ว $m = 0$

   3.3 ถ้า $m + n = 1$ แล้ว $m = 1$ หรือ $n = 1$

   3.4 ถ้า $m \cdot n = 1$ แล้ว $m = 1$ และ $n = 1$
4. ให้ m, n, p และ q เป็นจำนวนธรรมชาติ ถ้า $m < p$ และ $n < q$ จงพิสูจน์ว่า

   4.1 $m + n < p + q$

   4.2 $m \cdot n < p \cdot q$

   4.3 $mp + nq < mn + pq$
5. ให้ m และ nเป็นจำนวนธรรมชาติ จงแสดงว่า ถ้า $m > 1$ และ $n > 1$ แล้ว $m + n \leq mn$

บทที่ 7

ระบบจำนวน

7.1 จำนวนเต็ม

เมื่อนำจำนวนธรรมชาติสองจำนวนอาจเป็นจำนวนลบเช่น $1-2$ จึงกล่าวได้ว่าจำนวนเต็มเกิดจากผลลบของสองจำนวนธรรมชาติ และเขียนแทนด้วยคู่อันดับ $(1,2)$ แต่จะเห็นได้ว่าผลลบอาจเกิดจากหลาย ๆ เช่น $(3,4)$ และ $(7,8)$ เป็นต้น ดังนั้นค่าของ $1-2=-1$ อาจรวมอยู่ในเซต

$$\{(a,b) \in \omega \times \omega : a-b=-1\}$$

เขียนแทนด้วย $-1_{\mathbb{Z}}$ ซึ่งเป็นชั้นสมมูลของความสัมพันธ์ $\sim$ ใน $\omega \times \omega$ ซึ่งนิยามดังนี้

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a-b=c-d$$

หรือ

$$(a,b) \sim (c,d) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a+d=b+c$$

ทฤษฎีบท 7.1.1 ความสัมพันธ์ $\sim$ ใน $\omega \times \omega$ ที่นิยามข้างต้น เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 7.1.2 เรียกแต่ละชั้นสมมูลของความสัมพันธ์ $\sim$ ว่า **จำนวนเต็ม (integer)** และเรียกเซตของชั้นสมมูล $\omega \times \omega / \sim$ ว่า **เซตของจำนวนเต็ม (the set of integers)** เขียนแทนด้วย $\mathbb{Z}$ ดังนั้น

$$\mathbb{Z} := \omega \times \omega / \sim$$

ตัวอย่างเช่น จำนวนเต็ม $-1_{\mathbb{Z}}$ คือชั้นสมมูล

$$-1_{\mathbb{Z}} = [(1,2)] = \{(1,2),(2,3),(3,4),...\}$$

และ จำนวนเต็ม $3_{\mathbb{Z}}$ คือชั้นสมมูล

$$3_{\mathbb{Z}} = [(3,0)] = \{(3,0),(4,1),(5,2),...\}$$

เป็นต้น ทำให้ได้ว่าเซตของจำนวนเต็มคือ

$$\mathbb{Z} = \{..., -2_{\mathbb{Z}}, -1_{\mathbb{Z}}, 0_{\mathbb{Z}}, 1_{\mathbb{Z}}, 2_{\mathbb{Z}}, ...\}$$

ทฤษฎีบท 7.1.3 ให้ m, n, p, q และ m', n', p', q' เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

ถ้า $(m,n) \sim (m',n')$ และ $(p,q) \sim (p',q')$ แล้ว $(m+p, n+q) \sim (m'+p', n'+q')$

บทนิยาม 7.1.4 จะเรียกฟังก์ชัน $+_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนเต็ม $a, b \in \mathbb{Z}$ ด้วยเซต

$$a \ +_{\mathbb{Z}} \ b := \{(x,y) : \exists (m,n) \in a \ \exists (p,q) \in b, (x,y) \sim (m+p, n+q)\}$$

ว่า **การบวก (addition)** บน $\mathbb{Z}$ และเรียก $a \ +_{\mathbb{Z}} \ b$ ว่า **ผลบวก (sum)** ของ a และ b

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned} 1_{\mathbb{Z}} \ +_{\mathbb{Z}} \ 2_{\mathbb{Z}} &= [(2,1)] \ +_{\mathbb{Z}} \ [(2,0)] \\ &= [(2+2, 1+0)] \\ &= [(4,1)] \\ &= 3_{\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.1.5 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Z}} b = b +_{\mathbb{Z}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a +_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a +_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.1.6 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ $0_{\mathbb{Z}} = [(0,0)]$ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = a = 0_{\mathbb{Z}} +_{\mathbb{Z}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก (identity)
2. มี $b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a +_{\mathbb{Z}} b = 0_{\mathbb{Z}} = b +_{\mathbb{Z}} a$ การมีตัวผกผันสำหรับการบวก (additive inverse)

ตัวอย่าง 7.1.7 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละจำนวนเต็มใด ๆ ตัวผกผันสำหรับการบวกของจำนวนเต็มตัวนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น (ต่อไปจะเขียนตัวผกผันการบวกของ a ด้วย $-a$)

ทำให้นิยาม **การลบ (substraction)** บนจำนวนเต็มได้ดังนี้

$$a - b := a \ +_{\mathbb{Z}} \ (-b)$$

ทฤษฎีบท 7.1.8 ให้ m, n, p, q และ m', n', p', q' เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

ถ้า $(m, n) \sim (m', n')$ และ $(p, q) \sim (p', q')$ แล้ว $(mp + nq, mq + np) \sim (m'p' + n'q', m'q' + n'p')$

บทนิยาม 7.1.9 จะเรียกฟังก์ชัน $\cdot_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนเต็ม $a, b \in \mathbb{Z}$ ด้วยเซต

$$a \ \cdot_{\mathbb{Z}} \ b := \{(x, y) : \exists (m, n) \in a \ \exists (p, q) \in b, (x, y) \sim (mp + nq, mq + np)\}$$

ว่า **การคูณ (multiplication)** บน $\mathbb{Z}$ และเรียก $a \ \cdot_{\mathbb{Z}} \ b$ ว่า **ผลคูณ (product)** ของ a และ b

ตัวอย่างเช่น

$$\begin{aligned}
2_{\mathbb{Z}} \ \cdot_{\mathbb{Z}} \ -3_{\mathbb{Z}} &= [(2, 0)] \ \cdot_{\mathbb{Z}} \ [(1, 4)] \\
&= [(2 \cdot 1 + 0 \cdot 4, 0 \cdot 1 + 2 \cdot 4)] \\
&= [(2 + 0, 0 + 8)] \\
&= [(2, 8)] \\
&= -6_{\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.1.10 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = b \cdot_{\mathbb{Z}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) \cdot_{\mathbb{Z}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.1.11 ให้ a เป็นจำนวนเต็ม และ $1_{\mathbb{Z}} = [(1, 0)]$ จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Z}} 1_{\mathbb{Z}} = a = 1_{\mathbb{Z}} \cdot_{\mathbb{Z}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ (identity)
2. $a \cdot_{\mathbb{Z}} 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$
3. $-a = (-1_{\mathbb{Z}}) \cdot_{\mathbb{Z}} a$

ทฤษฎีบท 7.1.12 ให้ m, n, p, q และ m', n', p', q' เป็นจำนวนธรรมชาติ จะได้ว่า

ถ้า $(m,n) \sim (m',n')$ และ $(p,q) \sim (p',q')$ แล้ว $m+q < p+n$ และ $m'+q' < p'+n'$

ทฤษฎีบท 7.1.13 ความสัมพันธ์

$$\leq_{\mathbb{Z}} := \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (m,n) \in a \wedge (p,q) \in b \to m+q \leq p+n\}$$

เป็นอันดับเชิงเส้นบน $\mathbb{Z}$

บทนิยาม 7.1.14 เรียกอันดับ $<_{\mathbb{Z}}$ ว่า **น้อยกว่า (less than)** บน $\mathbb{Z}$ และกล่าวได้ว่าเป็นจำนวนเต็ม b เป็น **จำนวนเต็มบวก (positive integer)** ถ้า $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$

ข้อสังเกต $\quad b <_{\mathbb{Z}} 0_Z \quad$ ก็ต่อเมื่อ $\quad 0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} -b$

ทำให้ได้**กฎไตรวิภาค**สำหรับจำนวนเต็ม กล่าวคือ สำหรับจำนวนเต็ม a ใด ๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. a เป็นจำนวนเต็มบวก
2. $a = 0_{\mathbb{Z}}$
3. $-a$ เป็นจำนวนเต็มบวก

ทฤษฎีบท 7.1.15 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a \leq_{\mathbb{Z}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a +_{\mathbb{Z}} c \leq_{\mathbb{Z}} b +_{\mathbb{Z}} c$
2. สำหรับ $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Z}} b$ จะได้ว่า $a \leq_{\mathbb{Z}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a \cdot_{\mathbb{Z}} c \leq_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c$

ทฤษฎีบท 7.1.16 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Z}} c = b +_{\mathbb{Z}} c$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
2. $a \cdot_{\mathbb{Z}} c = b \cdot_{\mathbb{Z}} c$ และ $c \neq 0_{\mathbb{Z}}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

แบบฝึกหัด 7.1

1. จงพิสูจน์ว่า $0_{\mathbb{Z}} \neq 1_{\mathbb{Z}}$
2. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า
   2.1 $-(-a) = a$
   2.2 $-(a \cdot_{\mathbb{Z}} b) = (-a) \cdot_{\mathbb{Z}} b = a \cdot_{\mathbb{Z}} (-b)$
   2.3 $-(a +_{\mathbb{Z}} b) = (-a) +_{\mathbb{Z}} (-b)$
   2.4 $(a - b) +_{\mathbb{Z}} (b - c)) = a - c$
   2.5 $(-a) \cdot_{\mathbb{Z}} (-b) = a \cdot_{\mathbb{Z}} b$
3. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเต็ม จงแสดงว่า $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b +_{\mathbb{Z}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Z}} b) +_{\mathbb{Z}} (a \cdot_{\mathbb{Z}} c)$
4. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

   $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 1$ ก็ต่อเมื่อ ($a = 1$ และ $b = 1$) หรือ ($a = -1$ และ $b = -1$)
5. ให้ a และ b เป็นจำนวนเต็ม จงพิสูจน์ว่า

   $a \cdot_{\mathbb{Z}} b = 0$ ก็ต่อเมื่อ $a = 0$ หรือ $b = 0$

7.2 จำนวนตรรกยะ

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงการขยายจำนวนเต็มโดยสร้างเซตที่มีตัวผกผันสำหรับการคูณของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งหมด สำหรับการบวก $+_{\mathbb{Z}}$ และการคูณ $\cdot_{\mathbb{Z}}$ บนจำนวนเต็ม จะเขียนโดยย่อคือ $+$ และ $\cdot$ ตามลำดับ ในกรณี $a \cdot b$ เขียนแทนด้วย ab เมื่อพิจารณา

$$ax = 1 \qquad \text{เมื่อ} \qquad a \neq 0$$

จำนวน x ที่ได้จะอยู่ในรูปเศษส่วนเช่น

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{4}{1}, \frac{6}{2}, \ldots$$

เป็นต้น เราพบว่าเศษส่วนของจำนวนเต็มที่แตกต่างกันอาจจะเขียนแทนจำนวนเดียวกันได้เช่น

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \ldots$$

เมื่อพิจารณากรณีทั่วไป จะได้ว่า

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad ad = bc$$

เมื่อ $b \neq 0$ และ $d \neq 0$ ทำให้เรานิยามความสัมพันธ์บน $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ เมื่อ $\mathbb{Z}^*$ เป็นเซตของจำนวนเต็มที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งหมด หรือ $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$

ทฤษฎีบท 7.2.1 ความสัมพันธ์ $\sim$ ใน $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ นิยามโดย

$$(a, b) \sim (c, d) \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad ad = bc$$

เป็นความสัมพันธ์สมมูล

บทนิยาม 7.2.2 เรียกแต่ละชั้นสมมูลของความสัมพันธ์ $\sim$ ว่า **จำนวนตรรกยะ (rational number)** และเรียกเซตของชั้นสมมูล $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$ ว่า **เซตของจำนวนตรรกยะ (the set of rational numbers)** เขียนแทนด้วย $\mathbb{Q}$ ดังนั้น

$$\mathbb{Q} := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*/\sim$$

ตัวอย่างเช่น จำนวนตรรกยะ $1_\mathbb{Q} = [(1,1)]$, $-\frac{1}{2}_\mathbb{Q} = [(-1,2)]$ และ $0_\mathbb{Q} = [(0,1)]$ เป็นต้น

ทฤษฎีบท 7.2.3 ให้ $m, m', p, p' \in \mathbb{Z}$ และ $n, n', q, q' \in \mathbb{Z}^*$ จะได้ว่า

ถ้า $(m,n) \sim (m',n')$ และ $(p,q) \sim (p',q')$ แล้ว $(mq+np, nq) \sim (m'q'+n'p', n'q')$

บทนิยาม 7.2.4 จะเรียกฟังก์ชัน $+_\mathbb{Q} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนตรรกยะ $a, b \in \mathbb{Q}$ ด้วยเซต

$$a +_\mathbb{Q} b := \{(x,y) : \exists (m,n) \in a\ \exists (p,q) \in b, (x,y) \sim (mq+np, nq)\}$$

ว่า **การบวก (addition)** บน $\mathbb{Q}$ และเรียก $a +_\mathbb{Q} b$ ว่า **ผลบวก (sum)** ของ a และ b

ตัวอย่าง 7.2.5 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $1_\mathbb{Q} +_\mathbb{Q} 2_\mathbb{Q}$
2. $-1_\mathbb{Q} +_\mathbb{Q} \frac{1}{2}_\mathbb{Q}$

ทฤษฎีบท 7.2.6 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Q}} b = b +_{\mathbb{Q}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a +_{\mathbb{Q}} (b +_{\mathbb{Q}} c) = (a +_{\mathbb{Q}} b) +_{\mathbb{Q}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.2.7 ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ และ $0_{\mathbb{Q}} = [(0, 1)]$ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Q}} = a = 0_{\mathbb{Q}} +_{\mathbb{Q}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการบวก (identity)
2. มี $b \in \mathbb{Z}$ ซึ่ง $a +_{\mathbb{Q}} b = 0_{\mathbb{Q}} = b +_{\mathbb{Q}} a$ การมีตัวผกผันสำหรับการบวก (additive inverse)

ตัวอย่าง 7.2.8 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะใด ๆ ตัวผกผันสำหรับการบวกของจำนวนตรรกยะตัวนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น (ต่อไปจะเขียนตัวผกผันการบวกของ a ด้วย $-a$)

ทำให้นิยาม **การลบ (substraction)** บนจำนวนตรรกยะได้ดังนี้

$$a - b := a +_{\mathbb{Q}} (-b)$$

ทฤษฎีบท 7.2.9 ให้ $m, m', p, p' \in \mathbb{Z}$ และ $n, n', q, q' \in \mathbb{Z}^*$ จะได้ว่า

ถ้า $(m,n) \sim (m',n')$ และ $(p,q) \sim (p',q')$ แล้ว $(mp,nq) \sim (m'p',n'q')$

บทนิยาม 7.2.10 จะเรียกฟังก์ชัน $\cdot_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนตรรกยะ $a, b \in \mathbb{Q}$ ด้วยเซต

$$a \cdot_{\mathbb{Q}} b := \{(x,y) : \exists (m,n) \in a \ \exists (p,q) \in b, (x,y) \sim (mp,nq)\}$$

ว่า **การคูณ (multiplication)** บน $\mathbb{Q}$ และเรียก $a \cdot_{\mathbb{Z}} b$ ว่า **ผลคูณ (product)** ของ a และ b

ตัวอย่าง 7.2.11 จงหาผลบวกต่อไปนี้

1. $1_{\mathbb{Q}} \cdot_{\mathbb{Q}} -2_{\mathbb{Q}}$
2. $\frac{1}{3}_{\mathbb{Q}} \cdot_{\mathbb{Q}} \frac{3}{5}_{\mathbb{Q}}$

ทฤษฎีบท 7.2.12 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Q}} b = b \cdot_{\mathbb{Q}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a \cdot_{\mathbb{Q}} (b \cdot_{\mathbb{Q}} c) = (a \cdot_{\mathbb{Q}} b) \cdot_{\mathbb{Q}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.2.13 ให้ a เป็นจำนวนตรรกยะ และ $1_{\mathbb{Q}} = [(1,1)]$ จะได้ว่า

1. $a \cdot_{\mathbb{Q}} 1_{\mathbb{Z}} = a = 1_{\mathbb{Q}} \cdot_{\mathbb{Q}} a$ การมีเอกลักษณ์สำหรับการคูณ (identity)
2. ถ้า $a \neq 0$ จะมี $b \in \mathbb{Q}$ ซึ่ง $a \cdot_{\mathbb{Q}} b = 1_{\mathbb{Z}} = b \cdot_{\mathbb{Q}} a$
3. $a \cdot_{\mathbb{Q}} 0_{\mathbb{Z}} = 0_{\mathbb{Z}}$
4. $-a = (-1_{\mathbb{Q}}) \cdot_{\mathbb{Q}} a$

ตัวอย่าง 7.2.14 จงแสดงว่าสำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ ตัวผกผันสำหรับการคูณของจำนวนตรรกยะตัวนั้นจะมีเพียงตัวเดียวเท่านั้น

ต่อไปจะเขียนตัวผกผันการคูณของ r ด้วย r^{-1} ดังนั้น

$$r^{-1} = [(a,b)]^{-1} = [(b,a)]$$

สามารถนิยามการหารบน $\mathbb{Q}^*$ ได้ดังนี้

$$s \div r := s \cdot_{\mathbb{Q}} r^{-1}$$

หรือ

$$\begin{aligned} [(a,b)] \div [(c,d)] &= [(a,b)] \cdot_{\mathbb{Q}} [(c,d)]^{-1} \\ &= [(a,b)] \cdot_{\mathbb{Q}} [(d,c)] \\ &= [(ad,bc)] \end{aligned}$$

ทฤษฎีบท 7.2.15 ถ้า $(a,b) \sim (a',b')$ และ $(c,d) \sim (c',d')$
โดยที่ b, b', d และ d' เป็นจำนวนเต็มบวก แล้ว

$$ad < cb \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a'd' < c'b'$$

ทฤษฎีบท 7.2.16 ความสัมพันธ์

$$\leq_{\mathbb{Q}} := \{(r,s) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} : (a,b) \in r \wedge (c,d) \in s \to ad \leq cb\}$$

เป็นอันดับเชิงเส้นบน $\mathbb{Q}$

บทนิยาม 7.2.17 เรียกอันดับ $<_{\mathbb{Q}}$ ว่า **น้อยกว่า (less than)** บน $\mathbb{Q}$ และกล่าวได้ว่าเป็นจำนวนตรรกยะ b เป็น **จำนวนบวก (positive)** ถ้า $0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} b$

ข้อสังเกต $b <_{\mathbb{Q}} 0_Q$ ก็ต่อเมื่อ $0_{\mathbb{Q}} <_{\mathbb{Q}} -b$

ทำให้ได้**กฎไตรวิภาค**สำหรับจำนวนตรรกยะ กล่าวคือ สำหรับจำนวนตรรกยะ r ใด ๆ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้เป็นจริงเพียงข้อเดียวเท่านั้น

1. r เป็นจำนวนบวก
2. $r = 0_{\mathbb{Q}}$
3. $-r$ เป็นจำนวนบวก

ทฤษฎีบท 7.2.18 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a \leq_{\mathbb{Q}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a +_{\mathbb{Q}} c \leq_{\mathbb{Q}} b +_{\mathbb{Q}} c$
2. สำหรับ $0_{\mathbb{Z}} <_{\mathbb{Q}} b$ จะได้ว่า $a \leq_{\mathbb{Q}} b$ ก็ต่อเมื่อ $a \cdot_{\mathbb{Q}} c \leq_{\mathbb{Q}} b \cdot_{\mathbb{Q}} c$

ทฤษฎีบท 7.2.19 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนตรรกยะ จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{Q}} c = b +_{\mathbb{Q}} c$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$
2. $a \cdot_{\mathbb{Q}} c = b \cdot_{\mathbb{Q}} c$ และ $c \neq 0_{\mathbb{Q}}$ ก็ต่อเมื่อ $a = b$

แบบฝึกหัด 7.2

1. จงพิสูจน์ว่า $0_{\mathbb{Q}} \neq 1_{\mathbb{Q}}$
2. จงแสดงว่าผลคูณของจำนวนตรรกยะที่ไม่ใช่ศูนย์ทั้งคู่ย่อมไม่ใช่ศูนย์
3. ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า

    3.1 ถ้า $rs > 0$ และ $r > 0$ แล้ว $s > 0$

    3.2 ถ้า $rs > 0$ และ $r < 0$ แล้ว $s < 0$

    3.3 ถ้า $r > 0$ แล้ว $r^{-1} > 0$

    3.4 ถ้า $r < 0$ แล้ว $r^{-1} < 0$

    3.5 ถ้า $0 < r < s$ แล้ว $0 < s^{-1} < r^{-1}$

4. ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า ถ้า $rs = r$ และ $r \neq 0$ แล้ว $s = 1$
5. ให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ จงพิสูจน์ว่า

$$r \cdot_{\mathbb{Q}} s = 0 \text{ ก็ต่อเมื่อ } r = 0 \text{ หรือ } s = 0$$

6. จงแสดงว่าไม่มีจำนวนตรรกยะ r ซึ่ง $r^2 = 2$ เมื่อ $r^2 = r \cdot_{\mathbb{Q}} r$

7.3 จำนวนจริง

ในสูตรของปีทาโกรัส $a^2 + b^2 = c^2$ เราได้พบว่าความยาวด้านมุมฉากไม่สามารถแทนด้วยจำนวนตรรกยะได้ เช่นเมื่อด้านประกอบมีความยาวด้านละ 1 หน่วย นั่นคือ

$$c^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

เราได้พิสูจน์ไว้ในแบบฝึกหัด 7.2 ข้อ 6 ว่าไม่มีจำนวนตรรกยะใดที่มีสมบัติเช่นนี้ ทำให้เราจำเป็นต้องมีระบบจำนวนที่ครอบคลุมถึงกรณีนี้ด้วย นั่นคือรวมจำนวนอตรรกยะเข้าไปด้วยนั่นเองจะเรียกว่าจำนวนจริง

วิธีการสร้างจำนวนจริงมีหลายรูปแบบ เช่น

1. การแทนจำนวนจริงแต่ละจำนวนในรูปทศนิยม นั่นคือให้แต่ละจำนวนจริงเป็นลำดับ หรือฟังก์ชันจาก ω ไปยัง $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

2. ให้เซตจำนวนจริงคือเซตปันส่วน $C/\sim$ โดย C เป็นเซตของลำดับโคชี (Cauchy sequence) ของจำนวนตรรกยะที่มีค่าลิมิต นั่นคือ

$$\{x_n\} \in C \;\leftrightarrow\; \forall 0 < \varepsilon \in \mathbb{Q}\, \exists k \in \omega\, \forall m > k \forall n > k, \;, |x_m - x_n| < \varepsilon$$

และ $\sim$ เป็นความสัมพันธ์สมมูลใน C ซึ่งกำหนดโดย

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \{x_n\} \text{ และ } \{y_n\} \text{ มีค่าลิมิตเดียวกัน}$$

3. ในแต่ละจำนวนจริงเป็น**ส่วนตัดเดเดคินด์ (Dedekind cut)** เราจะกล่าวถึงการสร้างในหัวข้อนี้

บทนิยาม 7.3.1 ให้ x เป็นสับเซตของ $\mathbb{Q}$ ซึ่งมีสมบัติต่อไปนี้

1. x ไม่เป็นเซตว่าง และ x ไม่ใช่ $\mathbb{Q}$ นั่นคือ
   $\varnothing \neq x \neq \mathbb{Q}$

2. x มี **สมบัติปิดสมาชิกข้างน้อย (closed downward)** นั่นคือ
   $\forall q, r \in \mathbb{Q},\, q \in x \wedge r < q \rightarrow r \in x$

3. x ไม่มีสมาชิกตัวมากสุด นั่นคือ
   $\forall r \in x\, \exists q \in x,\, r < q$

แล้วจะเรียก x ว่า **ส่วนตัดเดเดคินด์ (Dedekind cut)** หรือเรียกสั้น ๆ ว่า **ส่วนตัด (cut)**

บทนิยาม 7.3.2 เรียกแต่ละส่วนตัดว่า **จำนวนจริง (real number)** และ $\mathbb{R}$ แทน **เซตของจำนวนจริง (the set of real numbers)**

ทฤษฎีบท 7.3.3 ความสัมพันธ์

$$\leq_{\mathbb{R}} := \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \subset y \text{ หรือ } x = y\}$$

เป็นอันดับเชิงเส้นบน $\mathbb{R}$

บทแทรก 7.3.4 กฎไตรวิภาคเป็นจริงบน $\mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 7.3.5 สำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะ r จะได้ว่า $\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 7.3.6 สำหรับแต่ละจำนวนตรรกยะ r จะเรียกจำนวนจริง $\{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$ ว่า จำนวนจริงตรรกยะ เขียนแทนด้วย $r_{\mathbb{R}}$ ดังนั้น

$$r_{\mathbb{R}} := \{q \in \mathbb{Q} : q < r\}$$

สำหรับจำนวนจริงที่ไม่ใช่จำนวนตรรกยะเรียกว่า **จำนวนอตรรกยะ** (irrational number)

ทฤษฎีบท 7.3.7 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$\{q+r : q \in x \text{ และ } r \in y\} \qquad \text{เป็นจำนวนจริง}$$

บทนิยาม 7.3.8 จะเรียกฟังก์ชัน $+_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ สำหรับแต่ละคู่จำนวนจริง $a, b \in \mathbb{R}$ ด้วยเซต

$$x +_{\mathbb{R}} y := \{q+r : q \in x \text{ และ } r \in y\}$$

ว่า **การบวก (addition)** บน $\mathbb{R}$ และเรียก $a +_{\mathbb{R}} b$ ว่า **ผลบวก (sum)** ของ x และ y

ทฤษฎีบท 7.3.9 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $a +_{\mathbb{R}} b = b +_{\mathbb{R}} a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a +_{\mathbb{R}} (b +_{\mathbb{R}} c) = (a +_{\mathbb{R}} b) +_{\mathbb{R}} c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

ทฤษฎีบท 7.3.10 จำนวนจริงศูนย์ $0_{\mathbb{Q}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 0\}$ เรียกสั้น ๆ ว่า **ศูนย์ (zero)** เป็นเอกลักษณ์สำหรับการบวก $+_{\mathbb{R}}$

$$\forall x \in \mathbb{R}, x +_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = x = 0_{\mathbb{R}} +_{\mathbb{R}} x$$

บทนิยาม 7.3.11 เรียกจำนวนจริง x ว่า**จำนวนบวก (positive)** ถ้า $0_{\mathbb{R}} <_{\mathbb{R}} x$ แต่ถ้า $x <_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}}$ เรียก x ว่า**จำนวนลบ (negative)**

ทฤษฎีบท 7.3.12 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ p เป็นจำนวนตรรกยะที่เป็นจำนวนบวก แล้วจะมี $q \in x$ ซึ่ง $p + q \notin x$

ทฤษฎีบท 7.3.13 ให้ x เป็นจำนวนจริง แล้ว

$$\{r \in \mathbb{Q} : \exists s > r, -s \notin x\}$$

เป็นจำนวนจริงที่เป็นตัวผกผันสำหรับการบวกของ x และจะเขียนแทนด้วย $-x$ นั่นคือ

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists - x \in \mathbb{R},\ x +_{\mathbb{R}} -x = 0_{\mathbb{R}} = -x +_{\mathbb{R}} x$$

บทแทรก 7.3.14 ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

$$x +_{\mathbb{R}} z = y +_{\mathbb{R}} z \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ} \qquad x = z$$

บทนิยาม 7.3.15 ให้ x เป็นจำนวนจริง นิยาม

$$|x| := x \cup -x$$

และเรียกว่า **ค่าสัมบูรณ์ (absolute value)** ของ x

ทฤษฎีบท 7.3.16 ให้ x เป็นจำนวนจริง และ y เป็นจำนวนจริงที่ไม่เป็นจำนวนลบ แล้วเซต

$$0_{\mathbb{R}} \cup \{rs : 0 \leq r \in x \text{ และ } 0 \leq s \in y\}$$

เป็นจำนวนจริง

บทนิยาม 7.3.17 สำหรับแต่ละคู่จำนวนจริง x และ y จะนิยาม **ผลคูณ** (product) $x \cdot_{\mathbb{R}} y$ ดังต่อไปนี้

1. ถ้า x และ y ต่างไม่เป็นจำนวนลบ จะนิยาม

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y := 0_{\mathbb{R}} \cup \{rs : 0 \leq r \in x \text{ และ } 0 \leq s \in y\}$$

2. ถ้า x และ y ต่างเป็นจำนวนลบ จะนิยาม

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y := |x| \cdot_{\mathbb{R}} |y|$$

3. ในกรณีที่เหลือ จะนิยาม

$$x \cdot_{\mathbb{R}} y := -(|x| \cdot_{\mathbb{R}} |y|)$$

เรียกการดำเนินการ $\cdot_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ว่า **การคูณ**(multiplication) บน $\mathbb{R}$

จะได้ว่าการคูณ $\cdot_{\mathbb{R}}$ สอดคล้องสมบัติการสลับที่ เปลี่ยนกลุ่ม และการแจกแจงเหนือ $+_{\mathbb{R}}$

ทฤษฎีบท 7.3.18 ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จะได้ว่า

1. $x \cdot_{\mathbb{R}} 0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{R}}$
2. ถ้า $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} x$ และ $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} y$ แล้ว $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} x \cdot_{\mathbb{R}} y$

ทฤษฎีบท 7.3.19 สำหรับจำนวนจริง x ใด ๆ แล้วจำนวนจริง $1_{\mathbb{R}} = \{r \in \mathbb{Q} : r < 1\}$ เป็นเอกลักษณ์สำหรับการคูณ $\cdot_{\mathbb{R}}$ นั่นคือ

$$\forall x \in \mathbb{R}, x \cdot_{\mathbb{R}} 1_R = x = 1_{\mathbb{R}} \cdot_{\mathbb{R}} x$$

ทฤษฎีบท 7.3.20 สำหรับจำนวนจริง x ที่ไม่ใช่ศูนย์ จะมีจำนวนจริง y เพียงตัวเดียวเท่านั้น ซึ่ง $x \cdot_{\mathbb{R}} y = 1_{\mathbb{R}}$ เรียก y ว่าตัวผกผันสำหรับการคูณของ x เขียนแทนด้วย x^{-1} หรือกล่าวคือ

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \, \exists x^{-1} \in \mathbb{R}, x \cdot_{\mathbb{R}} x^{-1} = 1_{\mathbb{R}} = x^{-1} \cdot_{\mathbb{R}} y$$

แบบฝึกหัด 7.3

1. กำหนดให้ r เป็นจำนวนตรรกยะ จงแสดงว่า $\{t \in \mathbb{Q} : t > r\}$ ไม่เป็นส่วนตัดเดเดคินด์
2. กำหนดให้ r และ s เป็นจำนวนตรรกยะ x เป็นจำนวนจริง จงแสดงว่า

   2.1 ถ้า $r \in x$ และ $s \notin x$ แล้ว $s > r$

   2.2 ถ้า $s \notin x$ และ $r > s$ แล้ว $r \notin x$
3. จงพิสูจน์ว่า การคูณ $\cdot_{\mathbb{R}}$ สอดคล้องสมบัติการสลับที่ เปลี่ยนกลุ่ม และการแจกแจงหนือ $+_{\mathbb{R}}$
4. จงแสดงว่า $0_{\mathbb{R}} \neq 1_{\mathbb{R}}$
5. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

   5.1 $-(-x) = x$

   5.2 $-(x \cdot_{\mathbb{R}} y) = (-x) \cdot_{\mathbb{R}} y = x \cdot_{\mathbb{R}} (-y)$

   5.3 $-(x +_{\mathbb{R}} y) = (-x) +_{\mathbb{R}} (-y)$

   5.4 ถ้า $x +_{\mathbb{R}} y = x$ แล้ว $y = 0_{\mathbb{R}}$

   5.5 $x <_{\mathbb{R}} y$ ก็ต่อเมื่อ $-y <_{\mathbb{R}} -x$

   5.6 ถ้า $x \neq 0_{\mathbb{R}}$ แล้ว $(x^{-1})^{-1} = x$

   5.7 ถ้า $x \neq 0_{\mathbb{R}}$ และ $x \neq 0_{\mathbb{R}}$ แล้ว $(x \cdot_{\mathbb{R}} y)^{-1} = y^{-1} \cdot_{\mathbb{R}} x^{-1}$
6. สำหรับแต่ละจำนวนจริง x จงแสดงว่า $|x|$ เป็นจำนวนจริง
7. สำหรับแต่ละจำนวนจริง x จงแสดงว่า $0_{\mathbb{R}} \leq_{\mathbb{R}} |x|$
8. ให้ x และ y เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

   $$x \cdot_{\mathbb{R}} y = 0_R \text{ ก็ต่อเมื่อ } x = 0_{\mathbb{R}} \text{ หรือ } y = 0_{\mathbb{R}}$$
9. ให้ x, y และ z เป็นจำนวนจริง จงพิสูจน์ว่า

   $$x \cdot_{\mathbb{R}} y = x \cdot_{\mathbb{R}} z \text{ และ } x \neq 0_{\mathbb{R}} \text{ ก็ต่อเมื่อ } y = z$$

บทที่ 8

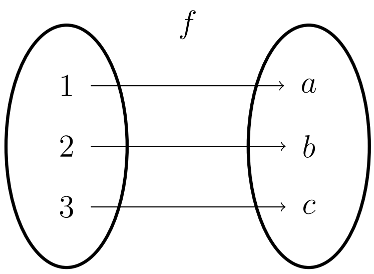
เซตจำกัดและเซตอนันต์

8.1 การเทียบเท่าของเซต

บทนิยาม 8.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะกล่าวว่า A **เทียบเท่า** (equivalent) กับ B เขียนแทนด้วย $A \sim B$ ถ้ามีฟังก์ชัน $f : A \to B$ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง หรือ

$$A \sim B \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \exists f : A \to B \ \text{ เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง}$$

ตัวอย่างเช่น $\{1, 2, 3\} \sim \{a, b, c\}$ โดยเลือกฟังก์ชัน f ดังแผนภาพ



ตัวอย่าง 8.1.2 จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

1. $A = \{1, 2, 3\}$ และ $B = \{2, 3, 5\}$

2. $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ และ $B = \{2, 4, 6, 8\}$

ตัวอย่าง 8.1.3 จงแสดงว่า $A \sim B$ ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เมื่อ $f : A \to B$

1. $A = \{1, 2, 3, ...\}$ และ $B = \{2, 4, 6, ...\}$ กำหนดให้ $f(x) = 2x$

2. $A = \{1, 2, 3, ...\}$ และ $B = \{1, 3, 5, ...\}$ กำหนดให้ $f(x) = 2x - 1$

3. $A = \{2, 4, 6, ...\}$ และ $B = \{1, 3, 5, ...\}$ กำหนดให้ $f(x) = x - 1$

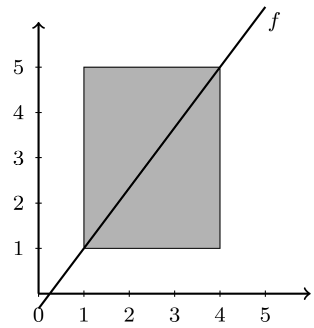
ทฤษฎีบท 8.1.4 $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$

ตัวอย่าง 8.1.5 จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

1. $\mathbb{N}$ และ $\{2n : n \in \mathbb{Z}\}$

2. $\mathbb{Z}$ และ $\{2^n : n \in \mathbb{N}\}$

ตัวอย่าง 8.1.6 จงแสดงว่า $[1,4] \sim [1,5]$



ตัวอย่าง 8.1.7 จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

1. $A = [0,1]$ และ $B = [1,2]$

2. $A = (0,1)$ และ $B = (-1,1)$

ทฤษฎีบท 8.1.8 $(0,1) \sim \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 8.1.9 ให้ A, B และ C เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง แล้ว

1. $A \sim A$
2. ถ้า $A \sim B$ แล้ว $B \sim A$
3. ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$

บทแทรก 8.1.10 สำหรับแต่ละเซต A ถ้า $A = B$ แล้ว $A \sim B$

ทฤษฎีบท 8.1.11 ให้ A, B และ C เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \sim A$ สมบัติสะท้อน (Reflexive)
2. ถ้า $A \sim B$ แล้ว $B \sim A$ สมบัติสมมาตร (Symmetric)
3. ถ้า $A \sim B$ และ $B \sim C$ แล้ว $A \sim C$ สมบัติถ่ายทอด (Transitive)

ทฤษฎีบท 8.1.12 ให้ a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < b$ จะได้ว่า

1. $(a, b) \sim (0, 1)$
2. $(a, b) \sim \mathbb{R}$

ทฤษฎีบท 8.1.13 ให้ A, B, C และ D เป็นเซต จะได้ว่า

1. $A \times B \sim B \times A$
2. ถ้า $A \times B$ แล้ว $A \times C \sim B \times C$
3. ถ้า $A \sim B$ และ $C \sim D$ แล้ว $A \times C \sim B \times D$

ตัวอย่าง 8.1.14 สำหรับเซต A ที่ไม่ใช่เซตว่าง จงแสดงว่า $A \times \{a\} \sim A$

แบบฝึกหัด 8.1

1. จงแสดงว่าเซตแต่ละคู่ต่อไปนี้เทียบเท่ากัน

    1.1 $\{1, 2, 3, ..., 100\}$ และ $\{10, 20, 30, ..., 1000\}$

    1.2 $\{1, 2, 3, ...\}$ และ $\{a_1, a_3, a_5, ...\}$

    1.3 $\{2, 4, 6, ...\}$ และ $\{2, 2^3, 2^5, ...\}$

    1.4 $\mathbb{N}$ และ $\{3n - 1 : n \in \mathbb{Z}\}$

    1.5 $\mathbb{Z}$ และ $\{n2^n : n \in \mathbb{N}\}$

2. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงแสดงว่า

    2.1 ถ้า $A \sim B$ และ $A \cap C = B \cap C = \varnothing$ แล้ว $A \cup C \sim B \cup C$

    2.2 ถ้า $A = B$ แล้ว $A \sim B$

    2.3 ถ้า $A \sim B$ และ $B = C$ แล้ว $A \sim C$

    2.4 $A = \varnothing$ ก็ต่อเมื่อ $A \sim \varnothing$

3. จงแสดงว่า

    3.1 $[0, 1] \sim [1, 3]$

    3.2 $[-1, 1] \sim [2, 3]$

    3.3 $[0, 1] \sim (0, 1)$

    3.4 $[0, 1] \sim [2, 1)$

4. ให้ A, B และ C เป็นเซต จงพิสูจน์ว่า $A \times (B \times C) \sim (A \times B) \times C$

5. ให้ A เป็นเซตใด ๆ และ $B = \{b\}$ จงพิสูจน์ว่า $B \times A \sim A$

8.2 เซตจำกัด

บทนิยาม 8.2.1 จะกล่าวว่า A เป็น**เซตจำกัด (finite set)** ก็ต่อเมื่อ

$$A \text{ เป็นเซตว่าง หรือ } A \sim \{1, 2, ..., k\} \text{ สำหรับบางจำนวนนับ } k$$

บทนิยาม 8.2.2 ให้ A เป็นเซตจำกัด และ k เป็นจำนวนนับ

$A = \varnothing$ จะกล่าวว่า A **มีสมาชิก** 0 **ตัว** เขียนแทนด้วย $n(A) = 0$

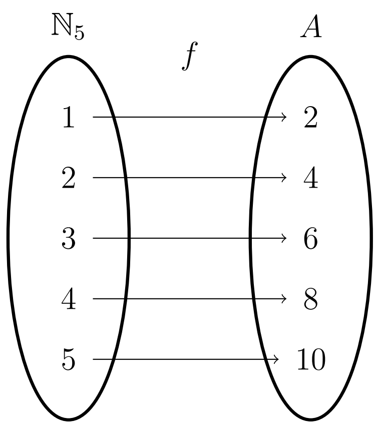
$A \sim \{1, 2, 3, ..., k\}$ จะกล่าวว่า A **มีสมาชิก** k **ตัว** เขียนแทนด้วย $n(A) = k$

สำหรับ $k \in \mathbb{N}$ ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $n(A) = k$ อาจจะเขียนแทนเซต A ด้วย $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ ในกรณีที่ $A = \{1, 2, 3, ..., k\}$ เห็นได้ชัดว่า $\{1, 2, ..., k\} \sim \{1, 2, ..., k\}$ (โดยเลือกฟังก์ชันเอกลักษณ์บน A) ดังนั้น A เป็นเซตจำกัดที่สมาชิก k ตัว จะเรียกเซตนี้ว่า **ส่วนตัด (section)** ของจำนวนนับ เขียนสัญลักษณ์แทนด้วย $\mathbb{N}_k$ หรือ

$$\mathbb{N}_k = \{1, 2, 3, ..., k\}$$

ทำให้ได้ว่า $A \sim \mathbb{N}_k$ เมื่อ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่างและ $n(A) = k$

ตัวอย่าง 8.2.3 กำหนดให้ $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
พิจารณาแผนภาพ



ทฤษฎีบท 8.2.4 ให้ $k \in \mathbb{N}$ และ A เป็นเซตใด ๆ โดยที่ $a \in A$ แล้วจะได้ว่า

A มีสมาชิก $k+1$ ตัว ก็ต่อเมื่อ $A - \{a\}$ มีสมาชิก k ตัว

ทฤษฎีบท 8.2.5 ถ้า $A \sim \mathbb{N}_n$ สำหรับบางจำนวนนับ n แล้วจะไม่มีฟังก์ชัน 1–1 จากสับเซตแท้ B ของ A ใดๆไปทั่วถึง $\mathbb{N}_n$ ยังได้อีกว่า B เป็นเซตจำกัด และจำนวนสมาชิกของ B น้อยกว่า n ตัว

ข้อสังเกต โดยทฤษฎีบทนี้สรุปได้ว่าสับเซตของเซตจำกัดย่อมเป็นเซตจำกัดเสมอ

บทแทรก 8.2.6 ถ้า A เป็นเซตจำกัดที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า

ไม่มีฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไปทั่วถึงสับเซตแท้ใด ๆ ของ A

บทแทรก 8.2.7 จำนวนสมาชิกของเซตจำกัด A มีเพียงจำนวนเดียวเท่านั้น

ทฤษฎีบท 8.2.8 ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันจาก $\{1, 2, ..., n\}$ ไปทั่วถึง A
2. มีฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไป $\{1, 2, ..., n\}$
3. A เป็นเซตจำกัด และมีสมาชิกอย่างมาก n ตัว

บทแทรก 8.2.9 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตจำกัด

ทฤษฎีบท 8.2.10 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด
โดยเฉพาะอย่างยิ่งถ้า $A \cap B = \varnothing$ แล้ว

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

บทแทรก 8.2.11 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $n(A) = n(A - B) + n(A \cap B)$

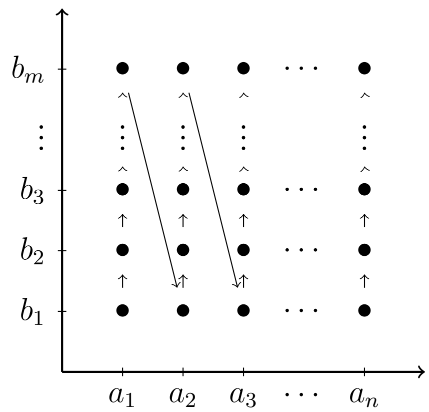
บทแทรก 8.2.12 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

บทแทรก 8.2.13 ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

ทฤษฎีบท 8.2.14 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตจำกัด

บทพิสูจน์. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด ให้ $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ และ $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$ พิจารณากราฟต่อไปนี้



กำหนดให้ $f : A \times B \to \mathbb{N}_{nm}$ โดย

$$f((a_i, b_j)) = (i-1)m + j \qquad \text{ทุก } (a_i, b_j) \in A \times B$$

แสดงได้โดยง่ายว่า f เป็นไปได้อย่างแจ่มชัด ต่อไปจะแสดงว่า f เป็นฟังก์ชัน 1–1 ให้ $(a_i, b_j), (a_k, b_t) \in A \times B$ สมมติว่า $f((a_i, b_j)) = f((a_k, b_t))$ นั่นคือ $(i-1)m + j = (k-1)m + t$ สมมติว่า $i \neq k$ โดยไม่เสียนัยทั่วไป $i < k$ นั่นคือ $i \leq k-1$ ทำให้สรุปได้ว่า

$$(i-1)m + j \leq (i-1)m + m = im \leq (k-1)m < (k-1)m + t$$

ทำให้ได้ว่า $f((a_i, b_j)) \neq f((a_k, b_t))$ ซึ่งขัดแย้งกับสมมติฐาน ทำให้ได้ว่า $i = k$ แล้ว

$$(i-1)m + j = (k-1)m + t = (i-1)m + t$$

จะได้ว่า $j = t$ นั่นคือ $(a_i, b_j) = (a_k, b_t)$ ดังนั้น f เป็นฟังก์ชัน 1–1 โดยทฤษฎีบท 8.2.8 จะได้ว่า $A \times B$ เป็นเซตจำกัด $\square$

แบบฝึกหัด 8.2

1. จงตรวจสอบว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตจำกัดหรือไม่

   1.1 $\{2, 4, 6, ..., 100\}$
   1.2 $\mathbb{N} \cap \{\frac{n}{3} : n \in \mathbb{N}\}$
   1.3 $\{1, 5, 9, 13, 17\}$
   1.4 $\{n \in \mathbb{Z} : |n| \leq 10\}$
   1.5 $\{x : x = 2n + 3, n = 0, 1, 2, ..., 10\}$
   1.6 $\mathcal{P}(\{1, 2, 3\})$

2. ถ้า A เป็นเซตจำกัด จงแสดงว่า $A \times \{a\}$ เป็นเซตจำกัด

3. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตจำกัด

4. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จงแสดงว่า $n(A \cup B) = n(A - B) + n(B)$

5. ให้ A และ B เป็นเซต จงแสดงว่า

   5.1 ถ้า $A \cup B$ เป็นเซตจำกัด แล้ว A และ B เป็นเซตจำกัด
   5.2 ถ้า $A - B$ เป็นเซตจำกัด แล้ว A เป็นเซตจำกัด

6. ให้ A และ B เป็นเซต และ $\mathbb{F} = \{f \mid f : A \to B\}$ จงแสดงว่า ถ้า A และ B เป็นเซตจำกัด แล้ว $\mathbb{F}$ เป็นเซตจำกัด

7. ให้ A, B และ C เป็นเซตจำกัด จงพิสูจน์ว่า $A \times (B \times C)$ เป็นเซตจำกัด

8. ให้ $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ เมื่อ A_α เป็นเซตจำกัดทุกๆ $\alpha \in \Lambda$ จงพิสูจน์ว่า

   8.1 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด
   8.2 $\bigcup\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด
   8.3 $\prod\limits_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ เป็นเซตจำกัด

9. $A = \{2, 4, 6, ..., 100\}$ และ $B = \{3, 9, 12, ..., 99\}$ จงหา

   9.1 $n(A)$
   9.2 $n(B)$
   9.3 $n(A \cap B)$
   9.4 $n(A \cup B)$
   9.5 $n(A - B)$
   9.6 $n(B - A)$

8.3 เซตอนันต์

บทนิยาม 8.3.1 เซตอนันต์ (infinite set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตจำกัด

อาศัยกฎแย้งสลับที่จากบทแทรก 8.2.6 จะได้ว่า

ถ้ามีฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไปทั่วถึง สับเซตแท้บางเซตของ A แล้ว A เป็นเซตอนันต์

หรือกล่าวอีกนัยหนึ่งคือ ถ้ามีสับเซตแท้ B ของ A ซึ่ง $B \sim A$ แล้ว A เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 8.3.2 $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์

โดยบทแทรก 8.2.6 ทำให้ได้ข้อสรุปดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.3.3 เซตที่มีสับเซตเป็นเซตอนันต์ย่อยเป็นเซตอนันต์

เนื่องจาก $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์ และ $\mathbb{N}$ เป็นสับเซตของ $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ ดังนั้น $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ และ $\mathbb{R}$ เป็นเซตอนันต์

ทฤษฎีบท 8.3.4 ให้ A เป็นเซต จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

1. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $f : \mathbb{N} \to A$
2. มีฟังก์ชัน 1–1 จาก A ไปทั่วถึง สับเซตแท้บางเซตของ A
3. A เป็นเซตอนันต์

ตัวอย่าง 8.3.5 จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์

1. $(0,1)$

2. $(1,3)$

ทฤษฎีบท 8.3.6 ให้ A เป็นเซตอนันต์ ถ้า $A \sim B$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์

แบบฝึกหัด 8.3

1. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์

   1.1 $\{1, 4, 7, 11, ...\}$

   1.2 $\{1, 1.5, 2, 2.5, ...\}$

   1.3 $(0, 5)$

   1.4 $[-3, 5]$

2. จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตอนันต์

3. ให้ A และ B เป็นเซต จงพิสูจน์หรือยกตัวอย่างค้านข้อความต่อไปนี้

   3.1 $A \cap B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A และ B เป็นเซตอนันต์

   3.2 $A \cap B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A หรือ B เป็นเซตจำกัด

   3.3 $A - B$ เป็นเซตจำกัด ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตจำกัด

   3.4 $A - B$ เป็นเซตอนันต์ ก็ต่อเมื่อ A เป็นเซตอนันต์

4. ให้ A เป็นเซตอนันต์ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์ ทุก ๆ เซต B

5. จงยกตัวอย่างค้านข้อความ ถ้า $A \cap B$ เป็นเซตอนันต์ แล้ว A และ B เป็นเซตอนันต์

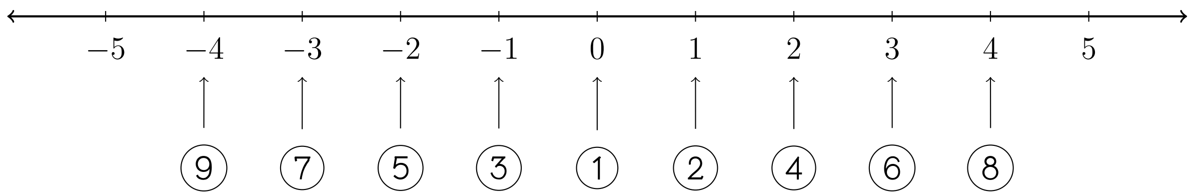
8.4 เซตนับได้

ในหัวข้อนี้จะกล่าวในการแยกแยะชนิดของเซตแต่ละชนิดออกจากกัน โดยดูความสามารถในการนับจำนวนสมาชิกของเซตนั้น ๆ

บทนิยาม 8.4.1 จะกล่าวว่าเซต A เป็น**เซตอนันต์แบบนับได้** (countably infinite set **หรือ** denumerable set) ถ้า $A \sim \mathbb{N}$

ข้อสังเกต เนื่องจาก $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ดังนั้น $\mathbb{N}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.2 $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้



ทฤษฎีบท 8.4.3 ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ และ $B \sim A$ แล้ว B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 8.4.4 ให้ A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $A \times \{a\}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 8.4.5 จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

1. $\{1, 4, 7, 11, ...\}$

3. $\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, ...\right\}$

2. $\{0, 4, 8, 12, ...\}$

4. $\{1, 3, 9, 27, ...\}$

บทนิยาม 8.4.6 จะกล่าวว่าเซต A เป็น**เซตนับได้ (countable set)** ถ้า A เป็นเซตจำกัด หรือเป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ตัวอย่าง 8.4.7 จงแสดงว่า $E = \{2n : n \in \mathbb{Z}\}$ เป็นเซตนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.8 ให้ A เป็นเซตไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่าข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

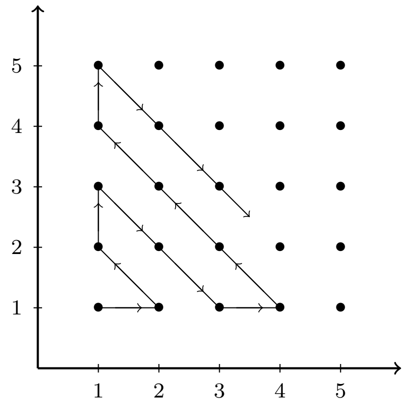
1. มีฟังก์ชันทั่วถึง $f : \mathbb{N} \to A$
2. มีฟังก์ชันหนึ่งต่อหนึ่ง $g : A \to \mathbb{N}$
3. A เป็นเซตนับได้

บทแทรก 8.4.9 สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้

ข้อสังเกต ถ้า A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cap B$ และ $A - B$ เป็นเซตนับได้ เพราะว่า $A \cap B \subseteq A$ และ $A - B \subseteq A$

บทแทรก 8.4.10 ถ้า A เป็นเซตซึ่งมีฟังก์ชันจากเซตนับได้ไปทั่วถึง A แล้ว A เป็นเซตนับได้

ต่อไปจะพิจารณาการนับสมาชิกของ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ดังกราฟต่อไปนี้



รูปที่ 15 แสดงการนับสมาชิกของเซต $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

จากกราฟสามารถสร้างฟังก์ชัน $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ โดย $f((x, y)) = 2^{x-1}(2y - 1)$ ถ้าพิสูจน์ได้ว่า f เป็นฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง จะสรุปได้ว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้ แต่การพิสูจน์ดังกล่าวมีความยุ่งยากและต้องตรวจสอบทั้ง 2 อย่าง ดังนั้นจะใช้ทฤษฎีบท 8.4.8 ในการพิสูจน์ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 8.4.11 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ เป็นเซตนับได้

จากทฤษฎีบททำให้ได้ข้อสรุปว่า $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}$ ทำให้เพียงพอในการพิสูจน์เซตอนันต์แบบนับได้ โดยแสดงว่าเซตนั้นสมมูลกับสับเซตของ $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$

ทฤษฎีบท 8.4.12 ให้ A และ B เป็นเซตนับได้ แล้ว $A \cup B$ เป็นเซตนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.13 ให้ A และ B เป็นเซตนับได้แล้ว $A \times B$ เป็นเซตนับได้

จากทฤษฎีบทนี้จะได้ว่า $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ เนื่องจาก $\mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.14 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

ทฤษฎีบท 8.4.15 $\mathbb{Q}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

จากทฤษฎีบทนี้ทำให้สรุปได้ว่า $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

บทนิยาม 8.4.16 เซตนับไม่ได้ (uncountable set) คือเซตที่ไม่ใช่เซตนับได้

การพิสูจน์เซตนับไม่ได้มีความยุ่งยากและซับซ้อนเมื่อใช้บทนิยามดังกล่าว จำเป็นต้องอาศัยผลที่ได้จากทฤษฎีบทต่างๆที่ได้มาในหัวข้อก่อนนี้ ซึ่งสรุปได้ดังนี้

1. เซตนับไม่ได้เป็นเซตอนันต์ (โดยนิยามของเซตนับได้)
2. ถ้า $A \subseteq B$ และ A เป็นเซตนับไม่ได้ แล้ว B เป็นเซตนับไม่ได้ (โดยบทแทรก 8.4.9)
3. ถ้า $A \sim B$ จะได้ว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ B เป็นเซตนับไม่ได้ (โดยทฤษฎีบท 8.4.3)
4. ให้ A เป็นเซตที่ไม่ใช่เซตว่าง จะได้ว่า A เป็นเซตนับไม่ได้ ก็ต่อเมื่อ ไม่มีฟังก์ชันจาก $\mathbb{N}$ ไปทั่วถึง A (โดยทฤษฎีบท 8.4.8)

ทฤษฎีบท 8.4.17 เซตของสับเซตทั้งหมดของ $\mathbb{N}$ หรือ $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ เป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 8.4.18 $(0, 1)$ เป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 8.4.19 $\mathbb{R}$ เป็นเซตนับไม่ได้

ทฤษฎีบท 8.4.20 $\mathbb{Q}^c$ เป็นเซตนับไม่ได้

แบบฝึกหัด 8.4

1. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตอนันต์แบบนับได้

   1.1 $\{3, 6, 9, 12, ...\}$

   1.2 $\{-1, -3, -5, ...\}$

   1.3 $\{1, 4, 9, 15, ...\}$

   1.4 $\{2, 7, 12, 17, ...\}$

2. จงแสดงว่าเซตต่อไปนี้เป็นเซตนับไม่ได้

   2.1 $(0, 1)$

   2.2 $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$

   2.3 $(1, \infty)$

   2.4 $(-1, 1)$

3. เซตของจำนวนคี่เป็นเซตนับได้
4. สับเซตของเซตนับได้ย่อมเป็นเซตนับได้
5. เซตใดก็ตามมีสับเซตที่เป็นเซตนับไม่ได้ย่อมเป็นเซตนับไม่ได้
6. ถ้า A เป็นเตจำกัด และ B เป็นเซตนับได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตนับได้
7. ถ้า A เป็นเซตนับไม่ได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตนับไม่ได้
8. ให้ A เป็นเซตอนันต์ และ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้
9. ให้ A และ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $A \cup B$ เป็นเซตอนันต์แบบนับได้
10. ให้ A และ B เป็นเซต ถ้า $A \sim B$ และ A เป็นเซตนับได้ แล้ว B เป็นเซตนับได้

บทที่ 9

จำนวนเชิงการนับ

9.1 จำนวนเชิงการนับ

ทฤษฎีบท 9.1.1 ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด จะได้ว่า

$$n(A) = n(B) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A \sim B$$

สัจพจน์ 9.1.2 สัจพจน์ของจำนวนเชิงการนับ (Axiom of Cardinality)
จะมีหมู่ของเซต $\mathbb{A}$ เพียงหมู่เดียวซึ่งสำหรับแต่ละเซต A จะมีเซต B ใน $\mathbb{A}$ เพียงเซตเดียวเท่านั้นที่ $A \sim B$

บทนิยาม 9.1.3 สำหรับเซต A ใด ๆ เรียกเซต B ในสัจพจน์ 9.1.2 ว่า **จำนวนเชิงการนับ (cardinal number)** ของ A เขียนแทนด้วย $\#(A)$

ทฤษฎีบท 9.1.4 สำหรับเซต A และ B ใด ๆ จะได้ว่า

$$\#(A) = \#(B) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad A \sim B$$

ตัวอย่าง 9.1.5 จงหาจำนวนเชิงการนับของเซตต่อไปนี้

1. $A = \{1, 2, 3\}$
2. $A = \{x \in \mathbb{Z} : -3 \leq x < 7\}$

บทนิยาม 9.1.6 ให้ A เป็นเซต ใด ๆ

1. เรียก $\#(A)$ ว่า **จำนวนเชิงการนับแบบจำกัด (finite cardinal number)** ถ้า A เป็นเซตจำกัด
2. เรียก $\#(A)$ ว่า **จำนวนเชิงการนับแบบอนันต์ (infinite cardinal number)** ถ้า A เป็นเซตอนันต์

ข้อสังเกต ในกรณีที่ A เป็นเซตจำกัด จำนวนเชิงการนับ $\#(A)$ คือ $n(A)$

ตัวอย่าง 9.1.7 จงตรวจสอบชนิดของจำนวนเชิงการนับของเซตต่อไปนี้

1. $\{1, 2, 3\}$
2. $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$
3. $[0, 1]$
4. $\mathbb{Z}$

ทฤษฎีบท 9.1.8 กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ จะได้ว่า

1. $a = a$ สมบัติสะท้อน (reflexive)
2. ถ้า $a = b$ แล้ว $b = a$ สมบัติสมมาตร (symmetric)
3. ถ้า $a = b$ และ $b = c$ แล้ว $a = c$ สมบัติถ่ายทอด (transitive)

บทนิยาม 9.1.9 ให้ A และ B เป็นเซต แล้ว
$\#(A)$ **น้อยกว่า (less than)** $\#(B)$ เขียนแทนด้วย $\#(A) < \#(B)$ ก็ต่อเมื่อ

1. มี $B_0 \subseteq B$ ซึ่ง $A \sim B_0$ และ
2. ไม่มีเซต $A_0 \subseteq A$ ซึ่ง $A_0 \sim B$

และเรียก $\#(B)$ is **มากกว่า (greater than)** $\#(A)$ เขียนแทนด้วย $\#(B) > \#(A)$ นั่นคือ

$$\#(B) > \#(A) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \#(A) < \#(B)$$

บทนิยาม 9.1.10 ให้ A และ B เป็นเซต แล้ว

$$\#(A) \leq \#(B) \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad \#(A) < \#(B) \ \text{ หรือ } \ \#(A) = \#(B)$$

ทฤษฎีบท 9.1.11 กำหนดให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ จะได้ว่า

1. $a \leq a$ สมบัติสะท้อน (reflexive)
2. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq a$ แล้ว $a = b$ สมบัติปฏิสมมาตร (antisymmetric)
3. ถ้า $a \leq b$ และ $b \leq c$ แล้ว $a \leq c$ สมบัติถ่ายทอด (transitive)

ทฤษฎีบท 9.1.12 สำหรับแต่ละเซต A จะได้ว่า $\#(\varnothing) \leq \#(A)$

ทฤษฎีบท 9.1.13 สำหรับแต่ละเซต A ถ้า A เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ แล้ว $\#(A) = \#(\mathbb{N})$

บทนิยาม 9.1.14 เรียก $\#(\mathbb{N})$ ว่า **อะเลฟศูนย์ (aleph null)** เขียนแทนด้วย $\aleph_0$

ทฤษฎีบท 9.1.15 ให้ A เป็นเซตใด ๆ จะได้ว่า

1. ถ้า A เป็นเซตจำกัด แล้ว $\#(A) < \aleph_0$
2. ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้ว $\aleph_0 \leq \#(A)$

ทฤษฎีบท 9.1.16 $\#(\mathbb{N}) < \#(\mathbb{R})$

บทนิยาม 9.1.17 เรียก $\#(\mathbb{R})$ ว่า **อะเลฟหนึ่ง (aleph one)** เขียนแทนด้วย $\aleph_1$

สมมติฐานของภาวะความต่อเนื่อง (Continuum Hypothesis)
ไม่มีเซต B ซึ่ง $\aleph_0 < \#(B) < \aleph_1$

การวางนัยทั่วไปของสมมติฐานของภาวะความต่อเนื่อง (General Continuum Hypothesis)
ถ้า A เป็นเซตอนันต์ แล้วไม่มีเซต B ซึ่ง $\#(A) < \#(B) < \#(\mathcal{P}(A))$

แบบฝึกหัด 9.1

1. ให้ A และ B เป็นเซตจำกัด โดยที่ $A \subseteq B$ และ $A \sim B$ จงแสดงว่า $n(A) < n(B)$
2. จงแสดงว่า มีเซต A และ B ซึ่ง $A \subseteq B$ แต่ $A \neq B$ สอดคล้อง $\#(A) = \#(B)$
3. ให้ A และ B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $\#(A) = \#(B)$
4. ให้ A เป็นเซตจำกัด B เป็นเซตอนันต์แบบนับได้ จงแสดงว่า $\#(A) < \#(B)$
5. จงแสดงว่า จำนวนเชิงการนับแบบจำกัดน้อยกว่าจำนวนเชิงการนับแบบอนันต์
6. เซตใดต่อไปนี้มีขนาดเป็น $\aleph_0$ หรือ $\aleph_1$ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

   6.1 $\mathbb{Q}$ 6.3 $\mathbb{Q}^c$ 6.5 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

   6.2 $\mathbb{Z}$ 6.4 $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 6.6 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$

7. ให้ A, B และ C เป็นเซตใด ๆ จงตรวจสอบข้อความต่อไปนี้ว่าจริงหรือเท็จ

   7.1 ถ้า $\#(A) < \#(B)$ และ $\#(B) < \#(C)$ แล้ว $\#(A) < \#(C)$

   7.2 ถ้า $\#(A) \leq \#(B)$ และ $\#(A) \geq \#(B)$ แล้ว $\#(A) = \#(B)$

   7.3 ถ้า $\#(A) \leq \#(B)$ และ $\#(A) = \#(C)$ แล้ว $\#(A) < \#(C)$

   7.4 ถ้า $\#(A) < \#(B)$ และ $\#(B) = \#(C)$ แล้ว $\#(A) < \#(C)$

8. จงแสดงว่าจำนวนเชิงการนับสอดคล้อง **กฎไตรวิภาค (Trichonomy Law)** นั่นคือ สำหรับจำนวนเชิงการนับ a และ b จะสอดคล้องข้อใดข้อหนึ่งใน 3 ข้อต่อไปนี้

   8.1 $a < b$ 8.2 $a = b$ 8.3 $a > b$

9.2 การดำเนินการของจำนวนเชิงการนับ

บทนิยาม 9.2.1 ให้ A และ B เป็นเซตโดยที่ $A \cap B = \varnothing$ ถ้า $\#(A) = a$ และ $\#(B) = b$ นิยาม

$$a + b = \#(A \cup B) \qquad \text{และ} \qquad a \cdot b = \#(A \times B)$$

ตัวอย่าง 9.2.2 จงหา $3 + 4$ และ $3 \cdot 4$

ทฤษฎีบท 9.2.3 สมบัติการสลับที่ (Commutative)
ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

1. $a + b = b + a$
2. $a \cdot b = b \cdot a$

ทฤษฎีบท 9.2.4 สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (Associative)
ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$
2. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

ทฤษฎีบท 9.2.5 สมบัติการแจกแจง (Distributive)
ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

1. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
2. $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$

ทฤษฎีบท 9.2.6 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

1. $a + 0 = a = 0 + a$
2. $a \cdot 1 = a = 1 \cdot a$
3. $a \cdot 0 = 0 = 0 \cdot a$

ทฤษฎีบท 9.2.7 ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงการนับ แล้ว

$$a \cdot b = 0 \quad \text{ก็ต่อเมื่อ} \quad a = 0 \quad \text{หรือ} \quad b = 0$$

ทฤษฎีบท 9.2.8 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับแบบอนันต์ แล้ว

1. $a + a = a$
2. $a \cdot a = a$

ทฤษฎีบท 9.2.9 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับแบบจำกัด แล้ว $a + \aleph_0 = \aleph_0$

ทฤษฎีบท 9.2.10 $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

ทฤษฎีบท 9.2.11 ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับแบบจำกัด แล้ว

1. $a + \aleph_1 = \aleph_1$
2. $\aleph_0 + \aleph_1 = \aleph_1$
3. $\aleph_1 + \aleph_1 = \aleph_1$

แบบฝึกหัด 9.2

1. ให้ a และ b เป็นจำนวนเชิงการนับ จงแสดงว่า

$$a \leq b \text{ ก็ต่อเมื่อ มีจำนวนเชิงการนับ } c \text{ ที่ทำให้ } b = a + c$$

2. ให้ a, b, c และ d เป็นจำนวนเชิงการนับ จงแสดงว่า

   2.1 $a \cdot b = 1$ ก็ต่อเมื่อ $a = 1$ และ $b = 1$

   2.2 $a = b$ ก็ต่อเมื่อ $a + c = b + c$

   2.3 ถ้า $a = b$ แล้ว $a \cdot c = b \cdot c$

   2.4 ถ้า $a = b$ และ $c = d$ แล้ว $a + c = b + d$

   2.5 ถ้า $a = b$ และ $c = d$ แล้ว $a \cdot c = b \cdot d$

3. พิจารณาข้อความต่อไปนี้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ พร้อมให้เหตุผลประกอบ

$$\text{ถ้า } a \cdot c = b \cdot c \text{ แล้ว } a = b$$

   เมื่อ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ

4. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงการนับ จงแสดงว่า

   4.1 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a + c \leq b + cb$

   4.2 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a \cdot c \leq b \cdot c$

5. ให้ a เป็นจำนวนเชิงการนับ และ b เป็นจำนวนเชิงการนับแบบอนันต์ จงแสดงว่า

   5.1 ถ้า $a \leq b$ แล้ว $a + b = b$

   5.2 ถ้า $a \leq b$ และ $a \neq 0$ แล้ว $a \cdot b = b$

9.3 จำนวนเชิงอันดับที่

สัจพจน์ 9.3.1 สัจพจน์ของจำนวนเชิงอันดับที่ (Axiom of Ordinaly)
กำหนดให้ $(A, \precsim)$ เป็นเซตอันดับดีแล้ว จะได้ว่ามีจำนวนเชิงอันดับที่ของ $(A, \precsim)$

บทนิยาม 9.3.2 Ordinal number กำหนดให้ $(A, \precsim)$ เป็นเซตอันดับดีแล้ว **จำนวนเชิงอันดับที่ (ordinal number)** ของ $(A, \precsim)$ เขียนแทนด้วย ord$(A, \precsim)$ และมีสมบัติดังนี้

$$\text{ord}(A, \precsim_A) = \text{ord}(B, \precsim_B) \qquad \text{ก็ต่อเมื่อ}$$

1. มีฟังก์ชัน 1–1 แบบทั่วถึง $f : A \to B$ และ
2. ถ้า $a \precsim b$ แล้ว $f(a) \precsim f(b)$

ตัวอย่าง 9.3.3 จงตรวจสอบว่าจำนวนเชิงอันดับที่ใดเท่ากันบ้าง พร้อมให้เหตุผลประกอบ

1. $(\{1, 2, 3\}, \leq)$
3. $(\{2, 4, 8\}, |)$

2. $(\{0, 1, 3, 4\}, \leq)$
4. $(\{\varnothing, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, \mathbb{N}_3\}, \subseteq)$

ทฤษฎีบท 9.3.4 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงอันดับที่ จะได้ว่า

1. $a + b = b + a$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a + (b + c) = (a + b) + c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

บทนิยาม 9.3.5 ให้ $(A, \precsim_A)$ และ $(B, \precsim_B)$ เป็นจำนวนเชิงอันดับที่ โดยที่ $A \cap B = \varnothing$ ถ้า $a = \text{ord}(A, \precsim_A)$ และ $b = \text{ord}(B, \precsim_B)$ นิยาม **การบวก (addition)** ของ a และ b ด้วย $a + b$ หมายถึง

$$a + b = \text{ord}(A \cup B, \precsim_{A \cup B})$$

เมื่อ $a \precsim_{A \cup B} b \leftrightarrow [(a \precsim_A b \vee a \precsim_B b) \vee (a \in A \wedge b \in B)]$ ทุก ๆ $(a, b) \in A \cup B$

ตัวอย่าง 9.3.6 จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงอันดับที่ของ

1. $(\{1, 3, 5, 7\}, \leq)$ และ $(\{2, 4, 6\}, \leq)$

2. $(\{1, 2, 4\}, |)$ และ $(\{5, 6, 7\}, \leq)$

3. $(\{\varnothing, \{1\}\}, \subseteq)$ และ $(\{1, 2, 3\}, \leq)$

บทนิยาม 9.3.7 ให้ $(A, \precsim_A)$ และ $(B, \precsim_B)$ เป็นจำนวนเชิงอันดับที่ โดยที่ $A \cap B = \varnothing$ ถ้า $a = \text{ord}(A, \precsim_A)$ และ $b = \text{ord}(B, \precsim_B)$ นิยาม **การคูณ (multiplication)** ของ a และ b ด้วย ab หมายถึง

$$ab = \text{ord}(A \times B, \precsim_{A\times B})$$

เมื่อ $(x_1, y_1) \precsim_{A\times B} (x_2, y_2) \leftrightarrow [(y_1 \precsim y_2) \vee (y_1 = y_2) \wedge (x_1 \precsim_A x_2)]$
ทุก ๆ $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$

ตัวอย่าง 9.3.8 จงหาผลคูณของจำนวนเชิงอันดับที่เมื่อ

1. $(\{1, 3, 5, 7\}, \leq)$ และ $(\{2, 4, 6\}, \leq)$

2. $(\{1, 2, 4\}, |)$ และ $(\{5, 6, 7\}, \leq)$

3. $(\{\varnothing, \{1\}\}, \subseteq)$ และ $(\{1, 2, 3\}, \leq)$

ทฤษฎีบท 9.3.9 ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงอันดับที่ จะได้ว่า

1. $ab = ba$ สมบัติการสลับที่ (commutative)
2. $a(bc) = (ab)c$ สมบัติการเปลี่ยนกลุ่ม (associative)

แบบฝึกหัด 9.3

1. จงหาผลบวกและผลคูณของจำนวนเชิงอันดับที่เมื่อ

    1.1 $(\{1,2\},\leq)$ และ $(\{3,4,5\},\leq)$

    1.2 $(\{1,2,8\},|)$ และ $(\{3,6,12\},|)$

    1.3 $(\{1,2,4\},|)$ และ $(\{\varnothing,\{\varnothing\}\},\subseteq)$

    1.4 $(\{\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\}\},\subseteq)$ และ $(\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,1\}\},\subseteq)$

2. ให้ a, b และ c เป็นจำนวนเชิงอันดับที่ จงแสดงว่า

    2.1 $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

    2.2 ถ้า $a=b$ แล้ว $a+c=b+c$

    2.3 ถ้า $a=b$ แล้ว $ac=bc$

3. กำหนดให้ $(\{1,2,3\},\leq)$ และ $(\{6,7\},\leq)$ เป็นเซตอันดับดีแล้ว จงหาความสัมพันธ์ t ใน $(A\cup B,t)$ โดยที่ $\text{ord}(\{1,2,3,6,7\},t)=\text{ord}(\{1,2,3\},\leq)+\text{ord}(\{6,7\},\leq)$

บรรณานุกรม

กรรณิกา กวักเพฑูรย์. (2542). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ฉวีวรรณ รัตนประเสริฐ. (2536). **ทฤษฎีเซต**. นครปฐม: ภาควิชาคณิตศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยศิลปากร.

พัฒนี อุดมกะวานิช. (2559). **หลักคณิตศาสตร์**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

พิมพ์เพ็ญ เวชชาชีวะ. (2558). **ระบบจำนวน**. กรุงเทพฯ: วี.พริ้นท์(1991).

ไพโรจน์ เยียระยง. (2559). **ตรรกศาสตร์และทฤษฎีเซต**. กรุงเทพฯ: สำนักพิมพ์แห่งจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

มานะ เอกจริยวงศ์. (2542). **ทฤษฎีเซต**. ลพบุรี: ศูนย์ตำราและเอกสารทางวิชาการ มหาวิทยาลัย สถาบันราชภัฏเทพสตรี ลพบุรี.

Arthur Benjamin. (2015). **Magic of math**. New York: Hachette book group, Inc.

Brian Clegg. (2003). **A brief history of infinity**. UK: CPI group (UK) Ltd.

Pual Glendinning. (2012). **Maths in minutes**. London, England: Quercus Editions Ltd.

ประวัติผู้เขียน

นายธนัชยศ จำปาหวาย

- ปริญญาเอก วิทยาศาสตร์ดุษฎีบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2557
  Ph.D. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2014
- ปริญญาโท วิทยาศาสตร์มหาบัณฑิต (คณิตศาสาตร์), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2552
  M.Sc. (Mathematics), Chulalongkorn University, 2009
- ปริญญาตรี วิทยาศาสตร์บัณฑิต (คณิตศาสาตร์, เกียติรนิยมอันดับสอง), จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย, 2549
  B.Sc. (Mathematics, 2nd class honours),Chulalongkorn University, 2006
- ปัจจุบันดำรงตำแหน่งอาจารย์ประจำสาขาวิชาคณิตศาสตร์ คณะครุศาสตร์ มหาวิทยาลัยราชภัฏสวนสุนันทา

Email: thanatyod_ja@ssru.ac.th
Office: 1145
Facebook: www.facebook.com/Jampawai
Block: www.eledu.ssru.ac.th/thanatyod_ja

ผลงานทางวิชาการ

1. เอกสารประกอบการสอนวิชาหลักการคณิตศาสตร์สำหรับครู, 2559
2. ตำราวิชาทฤษฎีจำนวน, 2559
3. หนังสือความจริงที่ต้องพิสูจน์, 2560